# 단일 위치에서의 측정을 이용한 가속도 종파 분리 방법의 개발

## Development of longitudinal acceleration wave decomposition method with single point measurement

정병보·박영진*·박윤식*

**B. Jung, Y. Park and Youn-Sik Park**

**Key Words :** longitudinal wave(종파), wave decomposition(파동 분리), single point measurement(단일 위치 측정)

ABSTRACT

We investigated a new longitudinal acceleration wave decomposition method in time domain. The proposed method separates up- and down-stream waves with an axial strain and axial acceleration measured at a single point on the transmission path. The advantages such as low computation load and easy implementation would be possible by developing time domain under the following assumptions; low frequency range, uniform cross sectional area and elastic wave propagation. We confirmed the feasibility and performance of the method through experiment using Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB). The method can be effective in several applications, including active vibration control with wave view point, where real time wave decomposition is necessary.

기호설명

| | |
|---|---|
| $y$ | *longitudinal displacement* |
| $a$ | *longitudinal acceleration* |
| $\varepsilon$ | *axial strain* |
| $\dot{\varepsilon}$ | *strain rate* |
| $c$ | *phase velocity of longitudinal wave* |
| $c_n$ | *nominal phase velocity* |
| $\omega$ | *angular velocity* $= 2\pi f$ |
| $\gamma$ | *propagation coefficient* $= \omega/c$ |
| $M$ | *number of rightward waves* |
| $N$ | *number of leftward waves* |

## 1. 서 론

지금까지 종파(longitudinal wave)의 분리는 크게 한 위치에서의 측정된 값을 이용하는 방법과 두 위치 이상에서 측정된 값을 이용한 방법으로 나눌 수 있다.

한 위치에서 측정된 물리량을 이용하는 방법은 1999 년 S. W. Park 과 M. Zhou 의 논문에서 처음 소개되었다.(1) 이 방법은 한 위치에서 하나의 스트레인 게이지(strain gage)를 설치하여 얻은 스트레인 값과 파동이 진행하는 전달경로의 정확한 경계 조건을 이용하여 각 방향으로 진행하는 스트레인 종파를 분리하는 방법이다. 그러나 이 방법은 정확한 경계 조건 정보와 좌우로 진행하는 파동이 서로 중첩되는 경우는 사용하지 못하는 제약적인 조건으로 그 사용 범위가 매우 제한적이다.

두 위치에 측정 장치를 설치하여 파동을 분리하는 방법은 1977 년 Lundberg 와 Henchoz(2)에 의해서 최초로 제안된 것으로 현재까지 많은 연구가 진행 중 이다. 이 방법은 서로 다른 두 위치에 설치된 측정 센서에서 측정된 값과 설치된 센서의 위치 정보를 이용하여 분리하는 방법(3)으로 종파 분리 분야의 대표적 방법이다.

이와 같은 기존의 방법들은 주로 주파수 영역에서의 해석으로 이상적인 전통적 파동 이론에서와는 달리 파동의 전달 속도 등의 특성 값들이 주파수에 따라서 변하는 분산 현상(dispersion)이 나타나게 되어 각 주파수 별로의 해석을 필요로 한다. 이러한 분산에 의한 실험적 결과는 Pochhammer 와 Chree 가 그들의 논문에서(4, 5) 이미 제시한 바 있으며 그 후에도 Davies 의 논문(6) 등에서 실험 및 이론적으로 보이고 있다.

주파수 영역에서의 해석으로 인하여 기존의 방법들은 측정값을 퓨리에 변환(Fourier Transform) 및 해당 주파수에서의 분리 연산을 원하는 주파수 영역 안에서 모두 수행하게 되므로 많은 계산량이 요구되며 각 주파수에서의 분리를 위하여 파동의 전달 속도와 같은 물성치의 주파수에 따른 변화 값을 필요로 한다. 또한 2 개 이상의 센서를 설치하기 위한 공간과 설치된 위치의 정확한 위치 정보를 필요로 한다.

† B. Jung; 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : bbjung22@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3076, Fax : (042) 869-8220

* 한국과학기술원 기계공학과

이와 같은 제약 조건으로 인하여 기존의 두 위치 측정값을 이용하는 방법은 주로 양방향으로 진행하는 종파을 분석하는 분야 등과 같이 매우 제한적으로 사용되고 있다.

그러나 진동에 대한 연구가 지속적으로 진행됨에 따라 진동 제어와 같이 다양한 응용 분야에서 진동을 파동의 관점에서 해석하는 연구가(9) 수행되고 있으며 다양한 응용 분야에 적절한 전달 경로 상의 파동을 분리하는 방법의 필요성이 야기되고 있다.

따라서 본 연구에서는 기존의 종파 분리 방법의 문제점을 보완하여 실시간 응용 분야 등과 같이 다양한 분야로의 적용이 적합한 새로운 단일 위치에서의 가속도 종파 분리 방법을 제안하고 이를 실험을 통하여 검증하고자 한다.

## 2. 종파 분리 이론

본 연구에서는 다양한 형태의 진동 파동 중 가장 기본이 되며 많은 형태의 응용 분야를 고려할 수 있는 1 차원 전달 경로 상의 진동 종파의 분리에 관하여 다루고자 한다.

### 2.1 단일 위치 측정을 이용한 종파 분리

아래의 그림 1 과 같이 1 차원 전달 경로상의 양 끝단에 각 진동원이 존재하는 경우 전달 경로상의 임의 한 위치 $x=l$ 에서 측정되는 변위는 식 (2.1)와 같이 좌우 방향으로 전달되는 종파들의 합으로 나타낼 수 있다. 이 때 전달 경로는 일직선이고 일정한 단면을 가지고 있으며 전체 경로상에 종파 현상이 주로 발생한다고 가정한다.

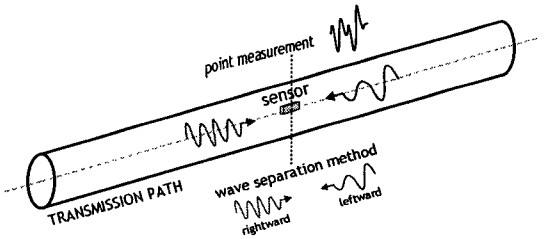


그림 1. 1차원 전달 경로 상의 진동 종파

$$y(x,t)=\sum_{m=1}^{M} f_m(\gamma_m l-\omega_m t+\phi_m)+\sum_{n=1}^{N} g_n(\gamma_n l+\omega_n t+\phi_n) \quad (2.1)$$

여기서 $\phi$는 상수이다. 부호는 압축과 우측으로 진행하는 것을 양의 값으로 정의한다.

변위나 속도와 같은 진동값은 측정이 용이하지 않거나 고가의 측정 장비를 필요로 하므로 실용적인 활용이 부적합하므로 본 연구에서는 가속도와 스트레인 값을 이용하여 새로운 종파 분리 이론을 유도하고자 한다. 식 (2.1)에서의 변위값에서 가속도와 스트레인 값을 구하면 식 (2.2)와 같다.

$$\begin{aligned} a&=\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{m=1}^{M}\omega_m^2\cdot\ddot{f}_m(\gamma_m l-\omega_m t+\phi_m)+\sum_{n=1}^{N}\omega_n^2\cdot\ddot{g}_n(\gamma_n l+\omega_n t+\phi_n)\\ \varepsilon&=\frac{dy}{dx}=\sum_{m=1}^{M}\gamma_m\cdot\dot{f}_m(\gamma_m l-\omega_m t+\phi_m)+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\cdot\dot{g}_n(\gamma_n l+\omega_n t+\phi_n)\end{aligned} \quad (2.2)$$

가속도는 변위의 2 계도함수이나 스트레인은 변위의 1 계도함수이므로 두 종파를 구성하는 함수의 형태가 다르다. 따라서, 유사한 형태의 함수로 표현되는 진동 종파를 정의하기 위하여 스트레인을 시간에 대하여 미분한 스트레인 비(strain rate)를 식 (2.3)와 같이 정의한다.

$$\dot{\varepsilon}=\frac{d^2y}{dxdt}=\sum_{m=1}^{M}(-\omega_m\gamma_m)\cdot\ddot{f}_m(\gamma_m l-\omega_m t+\phi_m)+\sum_{n=1}^{N}(\omega_n\gamma_n)\cdot\ddot{g}_n(\gamma_n l+\omega_n t+\phi_n) \quad (2.3)$$

변위에 대한 두 개의 2 계도함수를 퓨리에 변환을 통하여 주파수 영역에서 나타내면 식 (2.4)와 같다.

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x,\omega)&=\sum_{m=1}^{M}\omega_m^2\cdot\Phi_m(\omega_m)+\sum_{n=1}^{N}\omega_n^2\cdot\Gamma_n(\omega_n)\\ \tilde{\dot{\varepsilon}}(x,\omega)&=\sum_{m=1}^{M}(-\omega_m\gamma_m)\cdot\Phi_m(\omega_m)+\sum_{n=1}^{N}(\omega_n\gamma_n)\cdot\Gamma_n(\omega_n)\end{aligned} \quad (2.4)$$

식 (2.4)에서 틸데(tilde) 기호는 퓨리에 변환된 물리량을 뜻하며 두 변수가 동일한 함수들로 구성되어 있음을 알 수 있다.

식 (2.4)의 주파수 영역에서의 두 물리량을 이용하여 특정 주파수에서의 각 방향으로 진행하는 가속도 종파 성분을 아래의 식 (2.5)와 같은 간단한 연산을 통하여 분리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\textit{rightward accel.}&=\frac{1}{2}\left\{\tilde{a}(x,\omega_p)-\frac{\omega_p}{\gamma_p}\tilde{\dot{\varepsilon}}(x,\omega_p)\right\}\\ &=\omega_p^2\cdot\Phi_p(\omega_p),\ 1\le p\le M\end{aligned} \quad (2.5)$$

$$leftward\ accel. = \frac{1}{2}\left\{\tilde{a}(x,\omega_q) + \frac{\omega_q}{\gamma_q}\tilde{\varepsilon}(x,\omega_q)\right\}$$
$$= \omega_q^2 \cdot \Gamma_q(\omega_q), 1 \le q \le N$$

위의 한 위치에 측정한 종방향 가속도와 스트레인을 이용한 가속도 종파 분리 방법은 기존의 다중 위치 측정 방법에 비하여 측정 센서의 설치를 위한 공간과 분리를 위한 위치 정보를 필요로 하지 않으며 기존의 단일 위치 측정 방법에서 가지는 제한 조건과 경계 조건의 정보 없이 사용 가능한 장점을 가진다.

그러나 제안된 새로운 방법(2.5) 또한 주파수 영역으로의 변환과 각 주파수에서의 분리 과정에 따른 많은 계산량 등의 단점으로 인하여 실시간 응용 등과 같은 분야의 적용에 제약을 받게 된다.

### 2.2 시간 영역에서의 종파 분리

이러한 주파수 영역에서의 해석은 식 (2.5)의 유도 과정에서 알 수 있듯이 전달 속도와 같은 파동의 특성 값이 주파수에 따라 변하게 되는 분산 현상이 주된 원인이다.

종파의 분산에 관한 기존의 문헌의(7) 내용을 바탕으로 약 10,000Hz 이하의 주파수 영역에 대해서는 종파 전달 속도의 변화량이 약 2% 미만으로 해당 주파수 영역에서는 일정한 전달 속도를 (nominal phase velocity, $c_n$ ) 가정할 수 있다. 또한, 이러한 주파수 영역은 대다수의 기계 응용 분야의 허용 가능한 주파수 영역을 포함하므로 적용 주파수 영역을 고려할 경우 종파 전달 속도를 일정한 값으로 가정할 수 있다.

위와 같이 주파수 값에 관계없는 일정한 전달 속도를 가정할 경우 식 (2.2)의 가속도 값과 식 (2.3)에서 정의한 스트레인 비의 두 시간 영역에서 물리량을 이용하여 아래와 같은 간단한 연산을 통하여 각 방향으로 진행하는 가속도 종파를 분리할 수 있다.

$$rightward\ accel. = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - c_n\frac{d^2y}{dxdt}\right\}$$
$$= \sum_{m=1}^{M}\omega_m^2 \cdot \ddot{f}_m(\gamma l - \omega_m t + \phi_m)$$
$$leftward\ accel. = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + c_n\frac{d^2y}{dxdt}\right\} \quad (2.6)$$
$$= \sum_{n=1}^{N}\omega_n^2 \cdot \ddot{g}_n(\gamma l + \omega_n t + \phi_n)$$

위 식 (2.6)에서 제안된 시간 영역에서의 가속도 종파 분리 방법은 앞서 2.1 절에서 제안된 주파수 영역에서의 방법과 같이 위치 제약 없이 사용 가능할 뿐 아니라 측정된 값을 시간 영역에서 해석함으로써 분리에 필요한 계산량을 현저히 줄여 간단히 다양한 분야로의 적용이 기대된다.

## 3. 검증 실험 및 결과

### 3.1 SHPB 장치를 이용한 실험 장치

2 장에서 제안한 새로운 가속도 종파 분리 방법의 성능과 타당성을 실험을 통하여 검증하였다.

그림 2 와 같은 1 차원 전달 경로 상에 이상적인 충격을 가해 입사파와 반사파의 형태를 생성하는 실험 방법으로는 Split Hopkonson Pressure Bar(이하 SHPB) 방법이(8) 주로 사용된다.

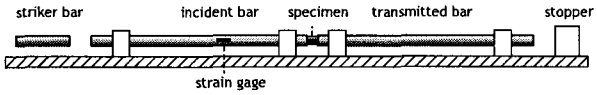


그림 2. 일반적인 압축형 SHPB 실험 장치

SHPB 방법은 그림 2 와 같이 충격을 인가하는 충돌 막대(striker bar)와 입사파와 반사파가 생성되는 입사 막대(incident bar), 투과파가 생성되는 투과 막대(transmitted bar)로 구성되며 입사 막대와 투과 막대 사이에 특정 시편을 두고 시편에 생성되는 고속에서의 스트레인 특성을 확인하는데 주로 응용되고 있다.

기본적인 SHPB 실험 장치를 제안된 가속도 종파 방법에 적용하기 위하여 다음 그림 3 과 같은 실험 장치를 구성하였다.

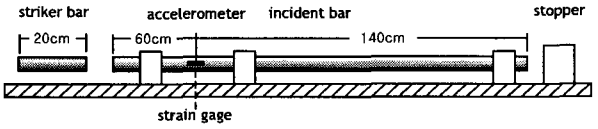


그림 3. 종파 분리 검증을 위한 SHPB 실험 장치

충격을 인가해 주는 충돌 막대와 좌우로 진행하는 입사파와 반사파만이 필요하므로 투과파가 형성되는 투과 막대 없이 입사 막대만으로 구성하였다.

모든 막대는 직경 20mm 의 단면적을 가진 철로 제작되었으며 각 막대의 길이와 측정을 위한 가속도 센서와 스트레인 게이지의 설치 위치는 그림 3 과 같다. 사용된 막대 내부에서 종파의 전달 속도

는 5100m/s 으로 가정하였으며 실험 데이터 측정에 사용된 측정 주파수는 1,000kHz 로 정하였다.

충돌 막대는 압축 공기에 의해서 약 10~20m/s 의 속도로 입사 막대에 충돌하여 내부에 우측으로 진행하는 단일한 돌출부를 가진 입사파를 형성하게 되며 자유단 경계 조건을 가진 끝단에서 반사되어 좌측으로 진행하는 반사파를 만들게 된다. 두 종파는 시간 지연으로 각 방향으로 진행하는 파동의 정확한 결과를 얻을 수 있다.

### 3.2 실험 결과

측정된 가속도의 측정 결과는 그림 4 와 같으며 입사파가 측정된 시점과 반사파가 측정되는 시점의 시간 지연으로 입사파와 반사파를 구분할 수 있으며 입사파가 센서에서 자유단까지의 길이를 2 회 이동하므로 입사파와 반사파 사이의 시간 지연에 의한 거리는 약 2.8m 이며 실험 결과 일치함을 확인 할 수 있다.

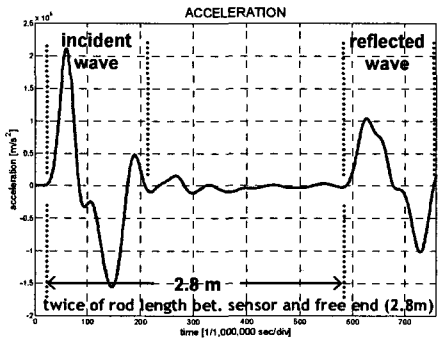


그림 4. 측정된 가속도 신호

측정된 스트레인을 바탕으로 계산된 스트레인비와 가속도 값을 2.2 절에서 제안한 시간 영역의 방법을 적용하여 각 방향으로 진행하는 입사파와 반사파를 구하면 그림 5 와 같은 결과를 얻을 수 있다.

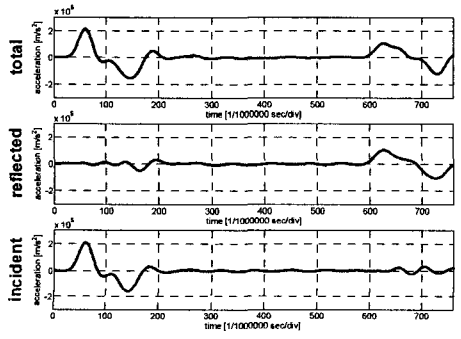


그림 5. 제안된 분리 방법을 이용한 실험 결과

그림 5 의 결과에서 알 수 있듯이 각 방향으로 진행하는 입사파와 반사파의 파동이 분리됨을 확인할 수 있으며 각 방향의 종파만이 존재하는 구간에서 다소의 오차가 발생함을 알 수 있다. 이는 측정 오차와 같은 실험 오차와 이론 유도에서 사용한 가정 등에서 발생하는 오차에 의해서 생성된 것으로 고려된다.

## 4. 결 론

종파 분리 방법은 1 차원의 진동 전달 경로 상에서 각 방향으로 진행하는 진동 종파를 분리하는 방법으로 기존의 방법은 주로 주파수 영역에서의 해석 방법으로 실시간 응용 분야 등과 같은 다양한 분야로의 적용 시 많은 제약을 가진다.

본 논문에서는 단일 위치에서 측정된 종방향의 가속도와 스트레인 값을 이용한 가속도 종파 분리 방법의 제안과 검증에 관한 것이다.

새로운 종파 분리 방법은 시간 영역에서의 분리 방법으로 기존의 방법에 비하여 현저히 적은 계산량과 경계 조건과 위치 정보 없이 간단히 다양한 분야로의 적용이 가능한 장점을 가진다.

제안된 종파 분리 방법의 성능을 검증하기 위하여 1 차원 전달 경로 상에 종파 생성에 주로 이용되는 Hopkinson pressure bar 장치를 응용한 실험 장치를 구성하고 그 실험 결과를 통하여 그 성능과 가능성을 타진하였다.

실험 결과 한 위치에서의 측정 값들을 이용하여 수 회의 연산만으로 간단히 각 방향으로 진행하는 가속도 종파를 시간 영역에서 분리함을 확인할 수 있었으며 향후 다양한 분야로의 응용 연구가 선행되어야 할 것이다.

## 참고문헌

(1) S. W. Park and M. Zhou, 1999, Separation of Elastic Waves in Split Hopkinson Bars Using One-point Strain Measurements, *Experimental Mechanics*, 39(4), 287~294

(2) Lundberg B, Henchoz A., 1977, Analysis of elastic waves from two-point strain measurement, *Experimental Mechanics*, 17, 213~218

(3) Christophe Bacon, 1999, Separation of waves propagating in an elastic or viscoelastic Hopkinson Pressure bar with three-dimensional effects, *International Journal of Impact Engineering*, 22, 55~69

(4) L. Pochhammer, 1876, Journal fur die Reline und

Angewandte Mathematik, 91, 324~326,
(5) C. Chree, 1889 The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications, *Cambridge Philosophical Society*, Transactions 14, 250~369,.
(6) Davies R.M., 1948, A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, A240, 375~457
(7) Love, A. E. H., 1944, a treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Publications, New York
(8) H. Kolsky, 1949, An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading, *Proc. Phys. Soc.*, 62, 676~701
(9) C. Mei, 2002, The Analysis and Control of Longitudinal Vibrations from Wave Viewpoint, *Journal of Vibration and Acoustic*, Vol. 124, 645~649