

복합단면 감쇠보의 강제진동해석

Forced Vibration Analysis of Damped Composite Beam

원성규† · 정의봉* · 배수룡**

Sung Gyu Won, Weui Bong Jung and Soo Ryong Bae

Key Words : damped composite beam(복합감쇠보), complex Young's modulus(복소영율), complex shear modulus(복소전단탄성계수), force vibration(강제진동), FEM(유한요소법)

ABSTRACT

In this paper, the forced vibration of damped composite beam with arbitrary section was analyzed. The damping material was assumed to have either complex shear modulus or complex Young's modulus. Damped composite beam could be modeled using beam elements with less D.O.F. rather than solid elements. Finite element method for these methods was formulated and programmed using complex values. The results of frequency responses revealed good agreement with those of NASTRAN in several beam structures.

1. 서론

감쇠재를 포함하는 복합단면 감쇠보의 특성을 범용 유한요소 툴로 해석하기 위해서는 솔리드 요소를 사용하여야 한다. 그러나 솔리드 요소는 많은 요소를 필요로 하므로 보형상의 구조물을 해석하기 위해서는 비효율적이다. 따라서 솔리드 요소를 보요소로 등가치환할 수 있는 기술이 절실히 필요하다. 감쇠재의 감쇠특성은 복소수의 허수부로 표현되어질 수 있으므로 복소전단탄성계수(complex shear modulus) 또는 복소영율(complex Young's modulus)이 이용되어진다.

전단 감쇠에 대한 이론적 고찰은 많은 사람들에게 의해 연구되어 왔다. DiTaranto⁽¹⁾는 유한 길이를 가진 3층 적층보가 자유진동하는 경우에 있어서 6차 운동방정식과 흡진재의 감쇠 효과를 설명하기 위한 보조방정식을 유도했으며, Mead 와 Markus⁽²⁾는 강제진동을 받는 3층 적층보에 대하여 6차 운동방정식을 유도하였다. Yan 과 Dowell⁽³⁾은 완전피복된 3층 적층보에서 각 층의 길이방향 변위 및 회전관성과 모재 및 보강재의 전단스트레의 영향을 고려한 해석방법을 제시하였다. Rao 와 Nakra⁽⁴⁾는 비대칭의 샌드위치형 감쇠 보구조물에 대해 횡방향, 수직방향, 회전운동의 관성 효과를 고려하였다. Seo⁽⁵⁾는 샌드위치형 감쇠보에 대하여 감쇠재의

두께와 손실계수(loss factor)가 감쇠보 전체의 감쇠율(damping ratio)에 미치는 영향을 조사하였으며 Won⁽⁶⁾은 Mead 와 Markus⁽²⁾의 운동방정식을 바탕으로 임의의 다층 감쇠층을 갖는 감쇠보의 운동방정식으로 확장하여 유한요소해석 기법을 적용하였다. 본 연구에서는 복소전단탄성계수 또는 복소영율특성을 갖는 감쇠재를 포함하는 복합단면 감쇠보에 대한 유한요소해석 방안을 제시하고 성능을 비교하고자 한다. 또한 범용 유한요소해석 툴인 NASTRAN 에서 솔리드 요소를 사용하였을 때의 해석결과와 비교하여 계산결과와 정확도 및 효율성을 비교하고자 한다.

2. 복소전단탄성계수를 갖는 감쇠보

두 탄성재 사이에 감쇠재가 끼워져 있는 3층 감쇠보에 대하여 Mead 와 Markus⁽²⁾는 다음 식과 같은 운동방정식을 유도하였다.

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+bY)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_1}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{D_1}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - gq\right) \quad (1)$$

이 식은 다음 식과 같이 고쳐서 쓸 수 있다.

$$C_6 w^{(6)} + C_4 w^{(4)} + K_2 m \ddot{w}^{(2)} + K_0 m \ddot{w} = K_2 q^{(2)} + K_0 q \quad (2)$$

단,

$$C_6 = -D_1 E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$$

$$C_4 = (bd_2^2 E_1 h_1 E_3 h_3 + D_1 (E_1 h_1 + E_3 h_3)) G_2^*$$

$$K_2 = -E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$$

$$K_0 = (E_1 h_1 + E_3 h_3) G_2^*$$

† 부산대학교 대학원 기계설계공학과
E-mail : fabre@pusan.ac.kr
Tel : (051) 510-3088, Fax : (051) 517-3805

* 부산대학교 기계공학부

** 국방과학연구소

여기서 E_i 는 탄성재의 탄성계수, m 은 감쇠보의 단위길이당 질량 그리고 q 는 외부분포하중이다.

그리고 Won⁽⁶⁾은 n 개의 감쇠층이 있는 경우의 횡변위에 대한 일반화된 운동방정식으로 확장하여 다음과 같은 식을 유도하였다.

$$C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \dots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial x^{2n}} \quad (3)$$

$$+ \dots + K_0 m \ddot{w} = K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 q$$

갤러킨법을 적용하기 위하여 식(3)의 양변에 가중함수 w^* 를 곱하고 요소길이에 대해서 적분하면 식(4)와 같다.

$$\int w^* \left[C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \dots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ \left. + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 m \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right] dx \quad (4)$$

$$= \int w^* \left[K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 q \right] dx$$

유도된 지배방정식은 $2n+4$ 차의 미분항이 포함되므로 일반적으로 탄성보에서 가정하는 노드당 2자유도가 아닌 노드당 $n+2$ 자유도의 유한요소를 가정하였다. 이 경우 형상함수는 다음과 같이 $2n+3$ 차의 다항식으로 가정하였다.

$$w = [N] \{w\}_e \quad (5)$$

단,

$$\{w\}_e = \left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_1}{\partial x^{n+1}}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_2}{\partial x^{n+1}} \right\}^T$$

식(6)을 식(5)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M]_e \{\ddot{w}\}_e + [K]_e \{w\}_e = \{f\}_e \quad (6)$$

단,

$$[M]_e = K_{2n} m \int_e \left[\frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T \left[\frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right] dx + \dots + K_0 m \int_e [N]^T [N] dx$$

$$[K]_e = C_{2(n+2)} \int_e \left[\frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right]^T \left[\frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right] dx + \dots + C_4 \int_e \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]^T \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] dx$$

$$\{f\}_e = K_{2n} q \int_e \left[\frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T dx + \dots + K_0 q \int_e [N]^T dx$$

식(6)을 각 요소에 대해서 중첩하면 전체 구조물에 대한 유한요소지배방정식을 구할 수 있다.

3. 복소 영을을 갖는 감쇠보

실수로 표현되는 비감쇠 복합재질 단면을 단일 재질 단면으로 등가 치환하는 환산단면법

(transformed-section method)을 복소수로 표현되는 감쇠 복합 단면에 확장하여 적용한다. 각 재료의 탄성계수가 E_1^* 와 E_2^* 를 가진다면 응력과 변형률의 관계는 식(7)과 같다. 여기서 $*$ 는 복소수 (complex value)를 나타낸다.

$$\sigma_{x1}^* = E_1^* \varepsilon_x^* = E_1^* k y^* \quad (7)$$

$$\sigma_{x2}^* = E_2^* \varepsilon_x^* = E_2^* k y^*$$

복소 탄성계수비 (n^*)와 중립축은 식(8)-(9)과 같이 정의될 수 있다.

$$n^* = \frac{E_2^*}{E_1^*} \quad (8)$$

$$\bar{y}^* = \frac{A_1 \bar{y}_1 + n^* A_2 \bar{y}_2}{A_1 + n^* A_2} \quad (9)$$

중립축에서의 복소 굽힘강성은 식(10)과 같이 표현된다.

$$(EI)_i^* = E_1^* I_1^* + n^* E_2^* I_2^* \quad (10)$$

여기서 I_1^* 과 I_2^* 는 복합재의 중립축에서 각 재료의 단면에 해당하는 관성모멘트이다.

m 개의 다른 재질로 이루어진 감쇠복합보에 대한 단면의 중립축의 위치와 굽힘강성은 식(11)-(12)와 같이 정의된다.

$$\bar{y}^* = \frac{A_1 \bar{y}_1 + \sum n_i^* A_i \bar{y}_i}{A_1 + \sum n_i^* A_i} \quad (11)$$

$$(EI)_i^* = E_1^* I_1^* + \sum n_i^* E_i^* I_i^* \quad (12)$$

여기서 복소탄성계수비 (n_i^*)는

$$n_i^* = \frac{E_i^*}{E_1^*} \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (13)$$

이다.

한편, 굽힘을 받는 감쇠보요소의 운동방정식은 다음과 같다.

$$(EI)_i^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z(x, t) \quad (14)$$

여기서 q_z 는 보에 수직으로 작용하는 외력이다.

보의 변위 w 를 형상함수를 이용하여 식(15)와 같이 가정한다.

$$w = [N] \{w\}_e \quad (15)$$

단,

$$\{w\}_e = \left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x} \right\}^T$$

그리고 앞절과 마찬가지로 갤러킨법을 적용하면 다음의 유한요소방정식을 유도할 수 있다.

$$[M]_e \{\ddot{w}\}_e + [K]_e \{w\}_e = \{F\}_e \quad (16)$$

단,

$$[M]_e = \rho A \int [N]^T [N] dx$$

$$[K]_e = (EI)_e \int \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]^T \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] dx$$

3 차원 구조물에 대해서 적용하기 위하여 국소(local)좌표를 전체(global)좌표로 변환하여 중첩하면 전체 구조물에 대한 유한요소 지배방정식을 얻을 수 있다.

4. 해석결과

복소 전단탄성계수를 갖는 3 층 감쇠보와 5 층 감쇠보의 형상을 Fig. 1 과 Fig. 2 에 나타낸다. 3 층 감쇠보와 5 층 감쇠보의 감쇠성능을 비교하기 위하여 동일한 두께로 가정하였으며 그 외에 사용한 치수 및 물성치는 Table 1 과 같다. 3 층 감쇠보의 경우 Fig. 1 에서 알루미늄의 두께는 $h_1 = h_3 = 3mm$ 이고, 감쇠재의 두께는 $h_2 = 2mm$ 이다. 5 층 감쇠보의 경우 Fig. 2 에서 알루미늄의 두께는 $h_1 = h_3 = h_5 = 2mm$ 이고, 감쇠재의 두께는 $h_2 = h_4 = 1mm$ 이다. Fig. 3 은 가진력 $f(t)$ 에 대한 응답 $w(t)$ 의 주파수응답함수를 나타내며 실선은 3 층 감쇠보의 경우이고 점선은 5 층 감쇠보의 경우를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 동일한 두께의 감쇠재를 다층으로 만들수록 고유진동수는 낮아지고 응답의 크기는 작아짐을 알 수 있다.

Fig. 4 는 복소 영율을 갖는 감쇠재의 해석에 사용된 감쇠외팔보를 나타내며 길이는 12m 이고 자유단에 하중을 가하였다. 사용된 재료의 물성치는 Table 2 와 같다. Fig. 5 는 보요소의 복합감쇠 단면을 나타내며 빗금친 부분이 감쇠재에 해당한다. NASTRAN 과 개발된 프로그램에 사용된 모델의 자유도를 Table 3 에서 비교하였다. 하중이 작용하는 위치에서의 주파수 응답을 구하였으며 NASTRAN 과 개발된 프로그램에서 구한 주파수 응답을 Fig. 6 에서 비교하였다. 고유진동수와 감쇠의 크기가 서로 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 따라서 NASTRAN 에 비해서 작은 자유도로 복합단면 감쇠보를 해석할 수 있음을 알 수 있다.

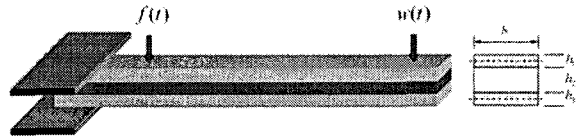


Fig. 1 Model of 3-layered damped beam

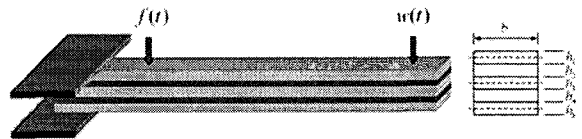


Fig. 2 Model 5-layered damped beam

Table 1 Input data of layered damped beam

	탄성재	감쇠재
Length (mm)	250	
Width (mm)	10	
ρ_i (kg/m ³)	2710	1300
E_i (N/m ²)	7.1×10^{10}	.
ν_i	0.33	.
G_i (N/m ²)	.	5.0×10^6
η_i	.	0.2

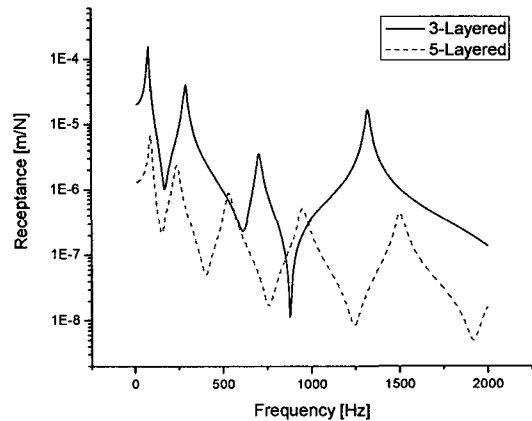


Fig. 3 Comparison of FRF for model in Fig.1 and Fig. 2

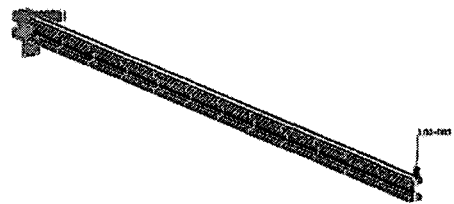


Fig. 4 A model of damped composite beam

Table 2 Properties of damped composite beam

	I 단면 / 구속층	감쇠재
탄성계수 [N/m^2]	2×10^{11}	7×10^{10}
손실계수	-	0.3
밀도 [kg/m^3]	7850	2800

Table 3 Comparison of D.O.F.

	Number of element	Number of element	D.O.F.
NASTRAN	648	963	2889
Developed	12	13	78

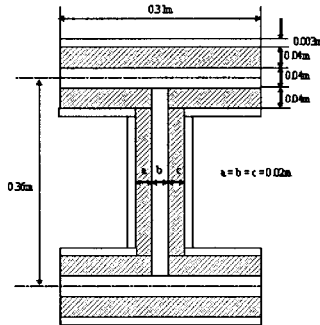


Fig. 5 Cross section of damped composite beam

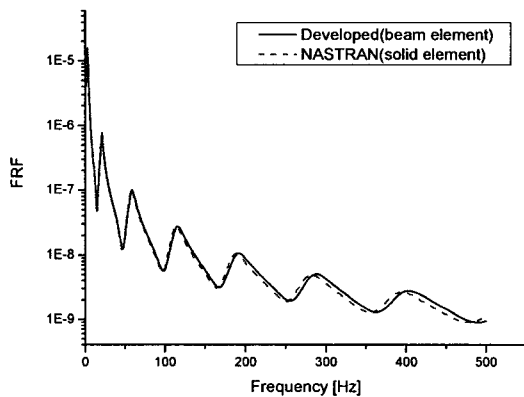


Fig. 6 Comparison of FRF for model in Fig. 4

5. 결론

본 논문에서는 감쇠재를 포함하는 복합보를 해석하기 위해서 솔리드 요소를 사용한 정밀 모델을 사용하지 않고 단순 모델인 보요소를 사용하는 방법을 제시하여 복잡한 모델링 과정을 생략하고 계산량을 줄이는 방법을 제시하였다.

기존의 환산단면법에 복소탄성계수와 복소응력을 도입하여 수정된 환산단면법을 제시하였다.

제시된 방법을 복합단면 감쇠보에 적용한 결과 솔리드 요소에 비하여 작은 자유도로 동등한 성능의 결과를 나타내었다.

후 기

본 연구는 국방부가 지정한 수중운동체특화연구센터(UVRC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) DiTaranto, R. A., 1965, Bending of the Vibratory for Elastic and Viscoelastic Finite Length Beams? Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 881~886.
- (2) Mead, D. J. and Markus, S., 1969, Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions? J. of Sound and Vibration, Vol. 10(2), pp. 163~175.
- (3) Yan, M. J. and Dowell, E. H., 1972, Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams? Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 94, pp. 1041~1046.
- (4) Rao, Y. V. K. and Nakra, B. C., 1974, Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores? J. of Sound and Vibration, Vol. 34(3), pp. 309~326.
- (5) 서영수 등, 2005, 유한요소법을 이용한 샌드위치형 감쇠 보구조물의 진동해석? 춘계학술발표회 논문집, 한국소음진동공학회, pp. 978~981
- (6) 원성규 등, 2005, 샌드위치형 다층 감쇠보의 강제진동 응답 해석? 추계학술발표회 논문집, 한국소음진동공학회, pp. 608~611