

유체유동 파이프의 안정성에 미치는 크랙의 영향

Influence of a Crack on Stability of Pipe Conveying Fluid

안성진*·손인수**·윤한익†

Sung-Jin Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

Key Words : Flutter Instability(플러터 불안정), Pipe Conveying Fluid(유체이송 파이프), Follower Force(종동력)

ABSTRACT

In this paper a dynamic behavior(natural frequency) of a cracked cantilever and simply supported pipe conveying fluid is presented. In addition, an analysis of the flutter and buckling instability of a cracked pipe conveying fluid subjected to a follower compressive load is presented. Based on the Euler-Bernouli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations.

1. 서론

파이프 속을 흐르는 유체는 파이프에 진동을 일으키는 원인이 되며, 유체의 속도가 어떤 임계값에 도달하면 그 진동이 불안정하여 파이프가 좌굴되기도 한다. 점성이 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중종동력으로 작용하며 진동해석에 중요한 인자가 된다. 또, 구조손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 유체유체를 갖는 파이프에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성을 파악하는 것은 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고 예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법⁽¹⁾에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다⁽²⁾. 크랙과 종동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을 계산하는 연구결과들이 발표되고 있다^(3,4). 또, Liu⁽⁵⁾등은 파이프 형태의 중공 축에 크랙이 존재

하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였으며, 이동질량의 영향을 받는 유체유동 파이프의 진동특성에 대해서도 많은 연구결과가 발표되어지고 있다⁽⁶⁾. 이 연구에서는 단순지지 및 외팔 유체유동 파이프에 크랙이 존재할 때 종동력과 유체유체가 파이프의 횡방향 고유진동수 및 좌굴/플러터 임계하중에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙이 존재하는 경우와 크랙이 존재하지 않는 경우의 고유진동수를 서로 비교, 고찰하였다. 또 크랙은 비진전 개구형 크랙(open crack)이라 가정하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 예제해석을 위하여 가정한 크랙을 가진 유체유동 파이프의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서 U 와 L 은 각각 유체유동의 속도와 파이프의 전체 길이를 나타낸다. 또, x_c , $2b$, 그리고 θ_c 는 각각 단순지지 파이프 상에 존재하는 크랙의 위치, 크랙의 횡방향 길이, 그리고 전체 크랙의 반각(half-angle)을 의미한다.

2.1. 크랙 모델링

탄형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유연행렬의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이

† 정회원, 동의대학교 기계공학부

E-mail : hiyoon@deu.ac.kr

Tel: (051) 890-1645, Fax: (051) 890-2232

* 정회원, 동의대학교 대학원 기계공학과

** 정회원, 동의대학교 산업기술개발 연구소

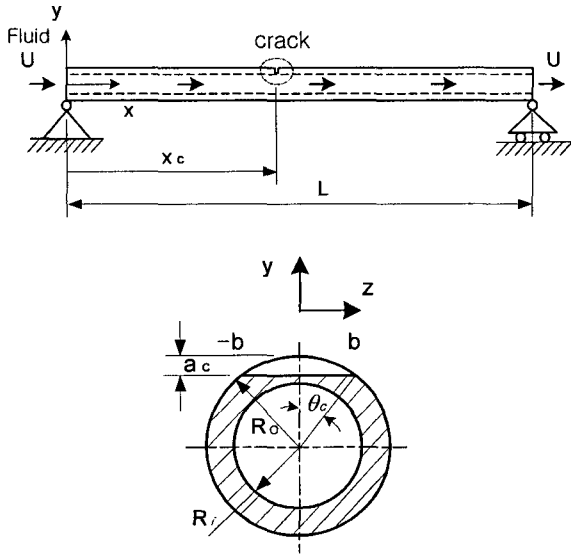


Fig.1 Geometry of cracked pipe conveying fluid and cross section of pipe

작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 다음과 같이 유연행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_{-b}^b \int_0^{a_c} J \, dy \, dz \right] \quad (1)$$

여기서 P 는 각 방향에서의 힘, J 는 변형률 에너지 밀도 함수로서 제 1 파괴모드에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{Ml} + K_{Jp})^2 \quad (2)$$

응력확대계수 K_{Ml} 과 K_{Jp} 는 참고문헌(5)에서 확인할 수 있다. 해석에 필요한 회전 스프링 상수(K_R)는 식 (1)의 역수이다. 또, 크랙위치에서 다음의 기울기 변화, 변위, 모멘트 및 전단력의 연속조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{dw_2(x_c)}{dx} - \frac{dw_1(x_c)}{dx} &= \frac{EI}{K_R} \frac{d^2 w_2(x_c)}{dx^2} \\ w_1(x_c) = w_2(x_c) \quad \frac{d^2 w_1(x_c)}{dx^2} &= \frac{d^2 w_2(x_c)}{dx^2}, \quad (3) \\ \frac{d^3 w_1(x_c)}{dx^3} &= \frac{d^3 w_2(x_c)}{dx^3} \end{aligned}$$

여기서 $w_1(x)$ 와 $w_2(x)$ 는 크랙에 의해 분할되는 단순지지 파이프의 각 분할구간의 횡변위를 나타낸다.

2.2. 압축하중을 받는 파이프

유체유동 파이프의 안정성 해석을 위하여 먼저 축 압축하중을 받는 단순지지 및 외팔파이프를 고려하였다. 자유진동에 대한 압축하중을 받는 파이프의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁷⁾.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서 P 는 종동력(follower force), m 은 파이프의 단위길이당 질량이다. 여기서 파이프의 횡변위는 변수분리법을 이용하여 $w(x,t) = w(x) e^{i\omega t}$ 와 같이 표현할 수 있으며, 여기서 $w(x)$ 는 크랙에 의한 분할구간에 대하여 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_1(x) &= A_1 \cos(\lambda_1 x) + A_2 \sin(\lambda_1 x) + A_3 \cosh(\lambda_2 x) \\ &\quad + A_4 \sinh(\lambda_2 x) \quad ; (0 \leq x \leq x_c), \\ w_2(x) &= B_1 \cos(\lambda_1 x) + B_2 \sin(\lambda_1 x) + B_3 \cosh(\lambda_2 x) \\ &\quad + B_4 \sinh(\lambda_2 x) \quad ; (x_c \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\lambda_1 = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})^{1/2}$, $\lambda_2 = (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})^{1/2}$, 그리고 $\lambda = \frac{P}{2EI}$, $\mu^2 = \frac{m\omega^2}{EI}$ 이다. 식 (5)의 미지수는 식 (3)의 크랙에 의한 연속조건과 각 파이프(단순지지, 외팔)의 끝단 경계조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 따라서 식 (4)의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda X = 0, \quad |\Lambda| = 0 \quad (6)$$

여기서 Λ 는 식 (5)에 8개의 연속 및 경계조건을 대입하여 얻은 식을 행렬형태로 표현한 것이며, $|\Lambda|$ 는 Λ 의 행렬식, 그리고 $X = [A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4]^T$ 이다.

2.3. 유체유동을 갖는 파이프

유체유동을 갖는 파이프의 기본 운동방정식은 다음과 같다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ + 2MU \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 M 은 유체의 단위길이당 질량이다. 또 파이프의 횡변위 $w(x, t)$ 는 크랙의 위치에 따라 식 (5)와 같은 형태로 다음과 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= A_1 \cos(\beta_r x) + A_2 \sin(\beta_r x) + A_3 \cosh(\beta_r x) \\
 &\quad + A_4 \sinh(\beta_r x) \quad ; (0 \leq x \leq x_c), \\
 w_2(x) &= B_1 \cos(\beta_r x) + B_2 \sin(\beta_r x) + B_3 \cosh(\beta_r x) \\
 &\quad + B_4 \sinh(\beta_r x) \quad ; (x_c \leq x \leq L)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

식 (8)의 미지수는 크랙 위치에서의 연속조건 및 보의 경계 조건에 의해 구할 수 있다. 따라서 다음과 같은 계의 무차원 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \eta_1'''' + u^2 \eta_1'' + 2u\beta^{1/2} \bar{\eta}_1' + \bar{\eta}_1 &= 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_c), \\
 \eta_2'''' + u^2 \eta_2'' + 2u\beta^{1/2} \bar{\eta}_2' + \bar{\eta}_2 &= 0 \quad (\xi_c \leq \xi \leq 1)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

여기서 (\cdot) 과 $(\bar{\cdot})$ 는 각각 무차원 변위 ξ 와 시간 τ 에 대한 미분이며, 파이프의 무차원 횡변위 $\eta_{1,2}$ 는 일반화좌표 $(q_i(\tau))$ 와 식 (5)의 보의 고유함수의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \eta_1(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{1,i}(\xi) q_i(\tau), \\
 \eta_2(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{2,i}(\xi) q_i(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

식 (9), (10)에 사용된 무차원 매개변수는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \tau &= \sqrt{\frac{EI}{M+m}} \frac{t}{L^2}, \quad u = \sqrt{\frac{M}{EI}} LU, \quad \beta = \frac{M}{M+m}, \\
 \eta &= \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 종동력과 유속의 임계값(Eluer의 좌굴 임계하중 / 플러터 임계하중) 및 크랙의 영향에 의한 파이프의 고유진동수 변화를 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab(6.1) 및 Mathematica(5.0)을 이용하여 계산을 수행하였으며, 수치해석에 있어서 제 1,2차 모드의 고유진동수가 제 3차 또는 그 이상의 상위 모드에 비하여 일반적으로 대단히 중요하기 때문에 이 연구에서는 제 1,2차 모드로 한정하였다. 수치해석 예제에 적용한 파이프 길이는 1m, 영계수 $E = 216$ GPa, 그리고 단순지지 파이프의 밀도는

7850 kg/m³으로 하였다. Fig. 2는 크랙을 가진 단순지지 파이프가 압축 종동력을 받는 경우 압축 종동력의 좌굴 임

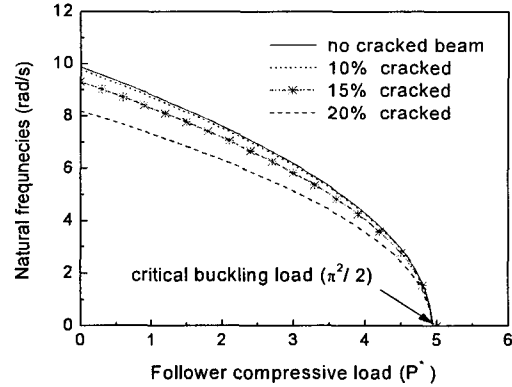


Fig. 2 Natural frequency of cracked simply supported pipe under follower force(1st mode)

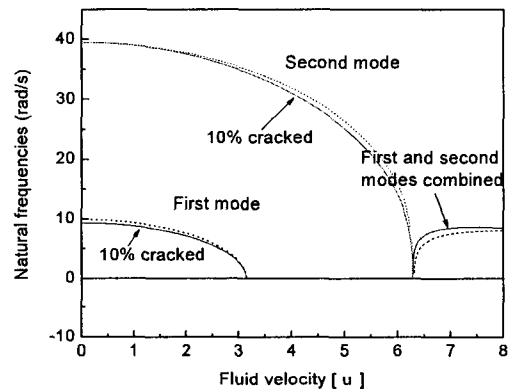


Fig. 3 Natural frequency of cracked simply supported pipe conveying fluid (1st, 2nd mode)

계값(P_{cr})과 파이프의 1차 모드 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 크랙의 위치가 단순지지 보의 중앙에 위치하는 경우에 크랙의 크기($\theta_c/2R \times 100(\%)$)의 영향에 의한 단순지지 파이프의 고유진동수 변화를 표현하고 있다. 크랙의 존재 유무에 관계없이 좌굴 임계값은 $P_{cr} = \pi^2/2$ 로 항상 일정한 값을 가짐을 알 수 있다. 일반적인 결과와 마찬가지로 크랙의 크기와 고유진동수는 서로 반비례하는 경향을 보이고 있으며, 크랙의 위치가 보의 중앙에 존재할 때 종동력과 관계없이 항상 가장 작은 진동수를 가진다.

Fig. 3은 무차원 질량비 $\beta = 0.2$ 로 일정한 값을 가진 경우 크랙을 가진 유체유동 단순지지 파이프의 고유진동수를 9차 모드까지 계산하여 그 결과를 2차 모드까지 도시한 것이다. 크랙의 영향에 의한 유체유동 파이프의 고유진동수 변화를 표현한 것이다. 크랙의 위치는 보의 중앙에 위치한 경우의 결과이다. 크랙의 영향에 관계없이 불안정을

유발하는 임계유속은 1, 2 차 모드($\pi, 2\pi$)에서 일정하며, 크랙의

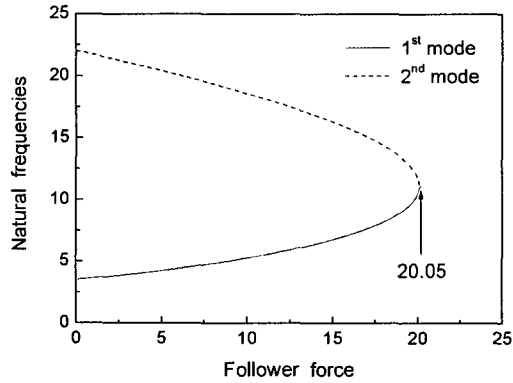


Fig. 4 Critical follower force and natural frequency of un-cracked cantilever pipe(flutter critical)

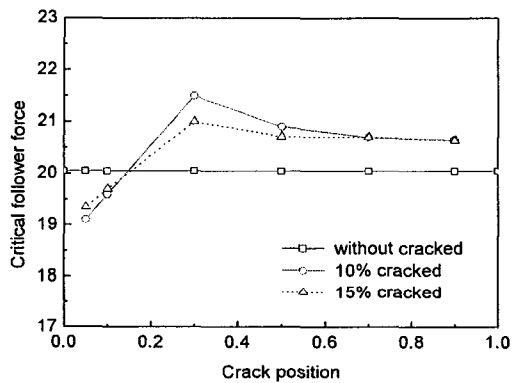


Fig. 5 Critical follower force of cracked cantilever pipe due to crack

크기와 파이프의 유속은 서로 반비례한다. 또 1, 2차 모드 연성에 의해 나타나는 파이프의 고유진동수는 크랙의 크기와 서로 비례한다는 사실을 발견할 수 있다. Fig. 4는 외팔 파이프에 종동력이 작용하는 경우 1, 2차 모드에 의한 파이프의 플러터 불안정 임계값을 표현한 것이다. 또, Fig. 5는 크랙이 존재하는 경우 크랙의 영향에 의한 임계하중의 변화를 도시한 것이다. 크랙이 파이프의 전반부에 존재하는 경우(약 $\xi_c < 0.17$)에 크랙의 크기와 임계 하중은 서로 반비례하지만 그 이후에는 크랙의 크기와 임계하중은 서로 비례적인 경향을 보인다. 이것은 종동력이 작용하는 경우 모드형상과 곡률(curvature)의 영향에 의한 결과임을 알 수 있다⁽⁹⁾.

4. 결론

단순지지 및 외팔보 형태의 크랙을 가진 파이프에 종동력 및 유체가 작용하는 경우 파이프의 안정성, 즉 임계하중 및 임계유속의 변화 및 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 크랙의 영향에 대하여 수치해석 하였다. 집중 종동력 및 유체가 작용하는 단순지지 파이프에 크랙이 존재하는 경우, 임계하중 및 임계유속은 크랙과 관계없이 항상 일정한 임계 값을 가짐을 확인 할 수 있다. 또한 유체유동을 갖는 단순지지 파이프에 크랙이 존재하는 경우 1,2차 모드 연성에 의해 발생하는 파이프의 고유진동수는 크랙의 크기와 서로 비례하는 경향을 보인다. 외팔 파이프인 경우 크랙의 위치에 의해 임계하중에 미치는 영향이 상반된 결과를 초래함을 확인 하였다. 이후 크랙의 위치 및 연성 관계에 의한 고유진동수에 관하여 좀더 명확한 연구가 보충되어야 할 것이며, 나아가 크랙을 가지는 유체유동 외팔 파이프의 안정성 및 플러터 불안정에 관한 연구를 진행할 것이다.

참고문헌

- (1) Datta, P.K. and Lal, M.K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load," *Computer and Structures*, 4(6) pp.1199~1202.
- (2) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers & Structures*, 61(6), pp.1057~1074.
- (3) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force with an Axial Force," *Int. Journal of Solids and Structures*, 35(23) pp.3071~3080.
- (4) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force," *Computers and Structures*, 71, pp.585~591.
- (5) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures Through Coupled Response Measurements," *Journal of Sound and Vibration*, 261, pp.17~29.
- (6) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성," *한국소음진동공학회논문집*, 12(7), pp.550~556.
- (7) Igor, A.K. and Olga, I.L., 2001, *Formulas Structural Dynamics*, McGraw Hill, New York.
- (8) Páidoussis, M.P., 1998, *Fluid-Structure Interactions (Volume 1)*, Academic Press.
- (9) Wang, Q., 2004, "A Comprehensive Stability Analysis of a Cracked Beam Subjected to Follower Compression," *Int. Journal of Solids and Structures*, 41, pp.4875~4888.