

변동물림강성/감쇠와 마찰을 고려한 기어구동계의 동특성 해석 Dynamic Analysis of a Gear Driving System with Time-varying Mesh Stiffness/Damping and Friction

김우형† · 정태일* · 정진태**

Woohyung Kim, Taeil Jung, Jintai Chung

Key Words : Gear driving system(기어구동계), Mesh stiffness (물림강성), Bearing (베어링), Friction force (마찰력), Transmission error (전달오차), Natural frequency (고유진동수), Time response (시간응답)

ABSTRACT

A six-degree-of-freedom dynamic model with time-varying mesh stiffness/damping and friction has been developed for the dynamic analysis of a gear driving system. This model includes a spur gear pair, bearing, friction and prime mover. Using Newton's method, equations of motion for the gear driving system were derived. Two computer programs are developed to calculate mesh stiffness, transmission error and friction force and analyze the dynamics of the modeled system using a time integration method. The influences of mesh stiffness/damping, bearing, and friction affecting the system were investigated by performing eigenvalue analysis and time response analysis. It is found that the reduction of the maximum peak magnitude by friction is decided according to designing the positions of pitch point and maximum peak in the responses.

1. 서론

기어구동계는 승용차, 항공기, 선박, 공작기계, 로봇 등의 동력전달장치의 핵심요소로, 인공위성의 안테나, 레이더와 미사일 등의 위치 정밀제어 요소로, 엔코더 등의 계측기 핵심부품으로 광범위하게 이용되고 있다. 이들 기계시스템의 진동, 효율, 내구성능, 정밀도 등은 기어구동계의 동특성에 의해 크게 좌우되므로 이에 관한 연구가 필요하다.

기어구동계의 진동특성을 규명하기 위한 동특성 해석연구는 1980년대 말부터 맞물리는 기어쌍을 대상으로 한 전달오차와 진동모드에 대한 해석이 진행되었고, 1990년대부터 기어, 축 그리고 베어링의 연성해석이 진행중이며, 비선형 동특성에 관한 연구는 비교적 최근에 시작되었다. Houser에 의해 기어만을 모델링하여 치의 강성변화와 치형오차를 고려한 운동방정식을 유도하여 진동을 평가한 연구[1,2]와 치의 강성변화와 축을 고려한 기어 진동을 평가한 연구[3]가 수행되었다. Kahraman, Singh에 의해 기어진동과 밀접한 관계에 있는 정적·동적 전달오차에 의한 기어진동에 대한 연구[4]와 기어, 베어링이 고려된 기어계의 동적 응답을 해석한 연구가 수행되었다[5]. Amabili는

낮은 물림률을 가지는 기어쌍의 변동물림강성 과 감쇠를 고려한 1 자유도 모델의 정상상태응답 과 안정성에 대하여 연구[6]하였고, Natsiavas는 주기적인 변동물림강성과 백래시를 고려한 기어 쌍의 비선형 동특성 해석에 대한 연구를 수행 하였다[7]. Jozef는 평기어의 변형과 마모가 기어 쌍의 동특성에 미치는 영향에 대하여 연구하였고[8], 기어이에 작용하는 마찰에 대한 연구가 Howard[9]와 Vaishya[10]에 의해 수행되었다. 이와 같이 지금까지의 연구는 시간에 따라 변화하는 변동물림강성과 베어링을 고려한 동특성을 해석 하였으나 이와 이 사이에 작용하는 마찰력을 고려 하지 않았고 변동물림강성/감쇠를 고려하였지만 베어링의 효과를 고려하지 않은 1 자유도 모델을 해석하여 베어링에 대한 영향을 예측할 수 없었다

본 연구에서는 기어쌍과 기어축, 그리고 축을 지지하는 베어링으로 해석모델을 구성하고 변동물 림강성/감쇠, 베어링의 강성과 감쇠효과, 그리고 마찰이 모두 포함된 6 자유도의 운동방정식을 유 도하였다. 컴퓨터를 이용한 수치적분 방법으로 해 석을 수행하여 기어구동계를 이루는 요소들이 시 스템에 끼치는 영향을 비교 분석하였다.

2. 기어구동계 운동방정식

해석하기 위한 기어구동계는 기어쌍, 축, 그리고 베어링으로 구성되고 시스템의 외부 가진원으로 모터의 입력토크를 고려하고 모터의 토크변동 불평형질량 등에 의한 변동토크가 없다고 가정한다

† 한양대학교 기계공학과 대학원
E-mail : woohyung@ihanyang.ac.kr
Tel : (031) 501-4590, Fax : (031) 501-4590

* 한양대학교 기계공학과 대학원

** 한양대학교 기계정보경영공학과

다. 해석모델에서는 축방향 운동이 작다고 가정하여 무시하고, 축을 강체로 가정하여 축의 처짐을 무시하며 기어 백래쉬는 없다고 가정한다. 기어는 강성과 감쇠를 가지는 베어링의 영향에 따른 상하 좌우 병진운동을 고려하고 기어이의 맞물림강성/감쇠에 의한 맞물림진동, 그리고 기어이 사이에 작용하는 마찰력을 고려한다. 기어의 강성 변화는 물리는 기어이의 수와 위치에 따라 결정되고 강성 변화에 의해 생기는 기어와 피니언 사이의 회전각의 오차, 즉 정적전달오차 $e(t)$ 를 고려한다. 해석 모델은 Fig.1 과 같이 모델링할 수 있다.

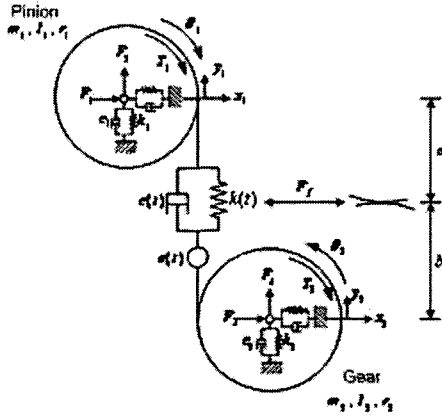


Fig. 1 Gear driving system model

해석모델을 Newton 의 법칙에 따라 운동방정식을 유도하면 다음과 같은 6 자유도 방정식을 구할 수 있다.

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + r_1 c(t) \left(r_1 \frac{d\theta_1}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + r_1 k(t) (r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - y_1 + y_2 - e(t)) = T_1(t) - F_f a \quad (1)$$

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - r_2 c(t) \left(r_1 \frac{d\theta_1}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{de}{dt} \right) - r_2 k(t) (r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - y_1 + y_2 - e(t)) = -T_2(t) + F_f b \quad (2)$$

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + c_1 \frac{dy_1}{dt} - c(t) \left(r_1 \frac{d\theta_1}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + k_1 y_1 - k(t) (r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - y_1 + y_2 - e(t)) = F_2 \quad (3)$$

$$m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + c_2 \frac{dy_2}{dt} + c(t) \left(r_1 \frac{d\theta_1}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + k_2 y_2 + k(t) (r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - y_1 + y_2 - e(t)) = F_4 \quad (4)$$

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 = F_1 + F_f \quad (5)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + c_2 \frac{dx_2}{dt} + k_2 x_2 = F_3 - F_f \quad (6)$$

여기서

$$F_f = \mu [c(t)\dot{p}(t) + k(t)p(t)] \quad (7)$$

$$p(t) = r_1\theta_1(t) - r_2\theta_2(t) - y_1 + y_2 - e(t) \quad (8)$$

m_1, m_2 는 피니언과 기어의 질량, I_1, I_2 는 피니언과 기어의 질량관성모멘트, $k(t), c(t)$ 는 변동물림강성/감쇠, k_1, k_2, c_1, c_2 는 각각 피니언과 기어축을 지지하는 베어링의 강성/감쇠, θ_1, θ_2 는 피니언과 기어 중심의 회전변위, x_1, x_2, y_1, y_2 는 각각 피니언과 기어의 상하 좌우 병진변위, r_1, r_2 는 각각 피니언과 기어의 기초원 지름을 의미한다. T_1, T_2 는 피니언과 기어에 작용하는 외부토크에 해당한다. F_1, F_2, F_3, F_4 는 피니언과 기어를 지지하는 베어링에 작용하는 외부하중으로 외부토크와 불평형질량, 축정렬불량 등에 의해 결정된다. F_f 는 피니언과 기어 이 사이에 작용하는 마찰력으로서 마찰계수 μ 와 수직항력에 해당하는 동적맞물림 $[c(t)\dot{p}(t) + k(t)p(t)]$ 의 곱으로 표현할 수 있다. $p(t)$ 는 기어구동계의 회전운동과 병진운동, 그리고 전달오차로 구성되는 맞물림진동을 나타낸다.

베어링에 작용하는 외부하중이 없다고 가정하면 식 (1)~(6)을 행렬식의 형태로 식 (9)과 같이 정리할 수 있다.

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = \{F\} \quad (9)$$

3. 변수의 정의

3.1 변동물림강성/감쇠 및 전달오차

기어가 맞물려 회전하는 경우 이에 작용하는 하중에 의해 기어이의 변형이 발생한다. 이 변형량으로부터 맞물림강성을 구할 수 있다. 기어이의 변형량은 Cornell[11]의 식을 프로그램화하기 좋게 변형한 Tavakoli 와 Houser[12]의 방법을 사용한다. 이 방법은 다음 세 가지를 고려한다.

(1) 기어이를 외팔보로 보았을 때 굽힘과 전단에 의한 변형

(2) 이뿌리에서의 강체운동에 의한 변형

(3) 헤르츠 접촉 응력에 의한 국부 변형

굽힘과 전단에 의한 기어이의 변형량은 기어이를 불균일단면 외팔보로 가정한 후, 접촉구간을 여러 개의 직사각형 단면 미소요소로 나누어 각각의 미소요소의 변형량을 합하여 구한다. 기어이뿌리 지지부분의 유연성 때문에 강체가 지지 기초에 대하여 회전할 경우 발생하는 변형량과 헤르츠 접촉응력에 의한 기어이 연성도 같이 고려한다.

하나의 기어쌍이 서로 맞물리는 경우 접촉진행에 따른 기어쌍의 복합연성은 Fig.2 와 같다.

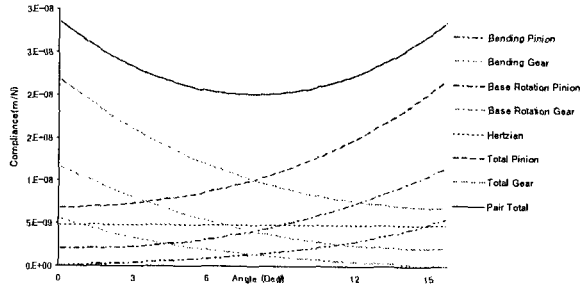


Fig. 2 Compliance of a tooth pair

기어의 치형·설치·제작오차 등의 각종 오차를 무시하고 기어이가 2 개 이상 맞물릴 때의 기어이 사이에 발생하는 불균일한 하중분배를 무시한다면 기어 메쉬의 강성은 단순히 앞에서 구한 연성 Q_j 로부터 다음 관계를 이용하여 구할 수 있다[15].

임의의 위치 j 에 하중이 작용할 때 기어이 한 쌍의 강성을 K_{pair_j} 라 하고, 기어 맞물림강성을 K_{mesh_j} 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{pair_j} = 1/Q_j \quad (10)$$

$$K_{mesh_j} = \sum K_{pair_j} \quad (11)$$

변동물림감쇠는 점성감쇠로 가정하고 여러 실험결과에 기초하여 얻은 감쇠비를 이용하여 다음 근사식으로 구할 수 있다[3].

$$c(t) = 2\zeta \sqrt{m_e \cdot k(t)} \quad (12)$$

$$m_e = I_1 I_2 / (I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2) \quad (13)$$

식 (13)은 피니언과 기어 관성에 의한 등가질량이다. 변동물림강성의 감쇠비 ζ 는 일반적으로 0.07~0.1 정도의 값을 가진다. 여기서는 감쇠비를 0.1 로 한다. 기어의 치형오차, 설치오차, 제작오차 등의 각종 오차를 무시한다면 정적전달오차는 다음과 같은 식을 통해 구할 수 있다.

$$e(t) = W_j / k_{mesh} \quad (14)$$

해석모델의 물림율은 1.5 로서 Fig.3 (a), (b)는 계산된 주기적으로 변하는 맞물림요소인 변동물림강성과 정적전달오차이다.

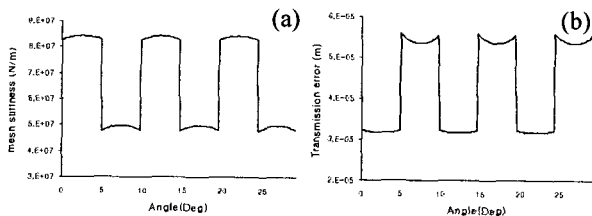


Fig. 3 Periodic meshing parameters; (a) gear mesh stiffness, (b) static transmission error

3.2 베어링 강성/감쇠

일반적으로 베어링은 하중이 작용할 때 처짐이 발생하므로, 시스템의 동적거동을 명확히 하려면 베어링강성/감쇠의 계산이 필요하다. Gargiulo[13]에 의해 개발된 구름 베어링에 대한 강성의 근사값 방정식 중 깊은 홈 볼베어링의 식 (15)을 이용하여 베어링의 강성 k_1, k_2 를 추정하였다.

$$k_r = 5.69 \times 10^6 (D_a F_r Z^2 \cos^5 \alpha)^{1/3} \quad (15)$$

D_a 는 볼 직경, F_r 은 반경방향 하중, Z 는 볼 개수, α 는 볼 접촉각이다. 베어링감쇠는 변동물림강성과 마찬가지로 점성감쇠로 가정하고 감쇠비를 0.1로 가정하여 식 (16)에 의해 추정하였다.

$$c_j = 2\zeta \sqrt{m_j \cdot k_j} \quad j=1,2 \quad (16)$$

3.3 마찰력

마찰력은 작용선을 따라 작용하는 맞물림하중에 대하여 직각방향으로 이와 이 사이에 작용하게 된다. 따라서 이의 상대속도는 작용선 방향에 대하여 항상 0이다. 작용선을 따라 맞물림지점이 이동하면서 이 사이에 작용하는 마찰력의 작용점도 이동한다. 마찰력의 방향은 작용선을 따라 이동하는 각 맞물림지점에서 이의 상대속도를 해석함으로써 구할 수 있다.

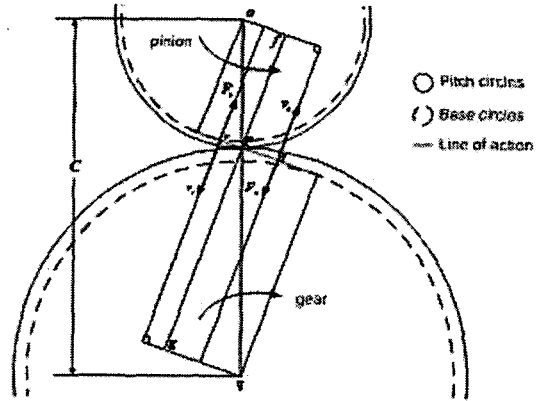


Fig. 4 Friction force directions

Fig.4 에서 피치점 p 에 맞물림지점이 위치하였을 때, 이의 상대속도는 0 일 것이다. 이것은 다음과 같이 기하학적으로 구할 수 있다.

$$qg / of = qp / op = \omega_p / \omega_g \quad (17)$$

여기서 ω_p 는 피니언의 각속도, ω_g 는 기어의 각속도를 나타낸다. 피치점에서 기어이에 대한 피니언의 상대속도는 다음과 같이 0 이 된다.

$$v_p = of \times \omega_p - qg \times \omega_g = 0 \quad (18)$$

따라서 피치점에 작용하는 마찰력도 0 이 된다. 피치점 왼쪽에 위치한 맞물림지점 r 에서 기어이에 대한 피니언의 상대속도는 다음과 같다.

$$v_r = (of - rp) \times \omega_p - (qg + rp) \times \omega_g < 0 \quad (19)$$

이 지점에서의 마찰력 F_r 은 v_r 의 반대방향으로 작용한다. 피치점 오른쪽에 위치한 맞물림지점 s 에서 기어이에 대한 피니언의 상대속도는 다음과 같다.

$$v_s = (of + sp) \times \omega_p - (qg - sp) \times \omega_g > 0 \quad (20)$$

마찬가지로 이 지점에서의 마찰력 F_s 은 v_s 의 반대방향으로 작용한다. 어느 한 접촉점에서 피니언에 작용하는 마찰력과 기어 이에 작용하는 마찰력의 방향은 서로 반대이다.

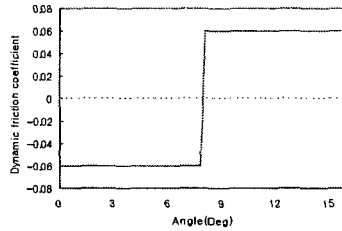


Fig. 5 The dynamic friction coefficient

맞물림지점이 작용선을 따라 이동하면서 마찰력은 변하게 된다. 각각의 맞물림지점에 대한 함수로 표현되는 마찰계수는 Howard[9]의 0.06 의 값을 사용하였고 Fig.5 와 같이 피치점의 좌우로 미끄럼 방향에 따라 변화하는 동적마찰계수이다. 작용선을 따라 이동하는 임의의 맞물림지점에 대한 마찰력 F_f 는 2 장에서 유도된 식 (7), (8)을 통해 구할 수 있다. 마찰력은 작용선에 직각방향으로 기어에 대하여 병진하중과 모멘트로서 작용하게 된다. 이러한 부가하중의 영향을 알기 위하여 기어의 기하학적 해석은 반드시 필요하다.

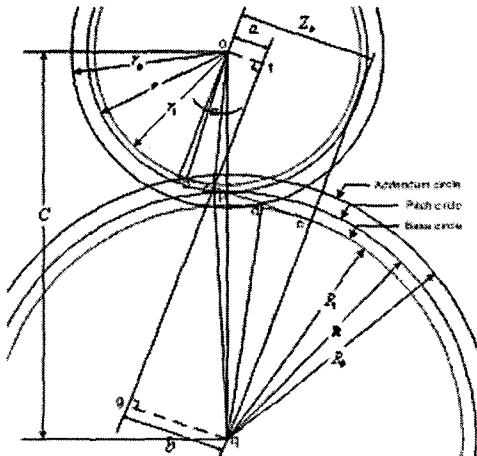


Fig. 6 The contact geometry of two spur gear

Fig.6 은 맞물림지점 c 가 작용선을 따라 점 b 에서 점 d 로 이동하는 모습을 보여준다. 기어 회전각의 함수로서 임의의 맞물림지점 c 의 위치는 기어와 피니언의 중심에 대한 모멘트암 $a = \overline{ac}$, $b = \overline{ce}$ 의 길이를 통해 구할 수 있다. 작용선의 길이 Z_0 와 모멘트암 a, b 와의 관계는 다음과 같다.

$$Z_0 = \overline{ac} = a + b \quad (21)$$

기어의 회전각 θ 와 작용선상의 맞물림지점 이동각 α 와의 관계는 인볼루트기어에서 매우 중요하다. Fig.7 은 초기의 맞물림지점 b 와 인볼루트프로파일을 따라 이동한 현재의 맞물림지점 c 사이의 각 β 를 나타내는 인볼루트기어를 보여준다.



Fig. 7 An involute gear tooth

따라서 기어의 회전각 θ 는 작용선에서의 맞물림지점 이동각 α 와 기어 프로파일에서의 맞물림지점 이동각 β 의 합과 같다.

$$\theta = \alpha + \beta \quad (22)$$

인볼루트 뿌리부분인 점 i 의 반경 r_i 와 인볼루트 임의의 점의 반경 r 사이의 각 ϕ 은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\phi = \sqrt{\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 - 1} \quad (23)$$

따라서 각 β 는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{r_c}{r_i}\right)^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{r_c}{r_i}\right)^2 - 1} - \angle boa \quad (24)$$

여기서 점 c 의 반경 r_c 는 다음과 같다.

$$r_c = \frac{\overline{ob} \sin \angle oba}{\sin(\angle oba - \alpha)} \quad (25)$$

식 (22), (24), (25) 을 통해 기어 회전각 θ 의 함수인 모멘트암의 길이 a, b 를 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$a = \overline{ac} = r_c \sin(\angle aob + \alpha) \quad (26)$$

$$b = \overline{ce} = Z_0 - a \quad (27)$$

4. 수치해석

4.1 수치해석모델

시스템의 동특성 해석을 위해 운동방정식에 대한 고유치 해석, 시간응답 등의 수치해석을 하였다. 시스템의 시간응답을 구하기 위해 Newmark 방법을 사용하여 수치적분을 하였다. 각각의 맞물림주기는 맞물림 시작점에서 끝점까지의 길이를 100 개의 점으로 나누어서 해석하였다. 주어진 회전속도에 맞춰 두 점 사이의 이동시간 Δt 를 구한 다음 초기 가정값들을 이용하여 변위, 속도, 가속도를 계산하고 새로운 값을 찾기 위해 수치적분을 한다. 초기조건으로 변위, 속도를 0 으로 두고 해석하였다.

수치해석에 사용한 기어모델의 사양은 Table 1 과 같다. 모터에서 전해지는 입력토크는 일정한 것으로 가정한다. 3 장에서 계산한 변동물림강성/감쇠, 정적전달오차, 베어링강성/감쇠, 마찰요소를 해석모델에 적용하여 수치해석을 행하였다. 이러한 요소들이 시스템에 끼치는 영향을 분석하기 위하여 각각의 요소를 고려하지 않은 모델에 대해서도 수치해석을 행하여 비교분석을 하였다.

	Pinion	Gear
Tooth Profile	Involute	
Pressure angle	20°	
Module	2	
Number of teeth	40	40
base radius	37.588 mm	37.588 mm
mass	1 kg	1 kg
inertia	$1.15 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$	$1.15 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
Transmitted Torque	100 Nm	

Table.1 Gear design parameters

4.2 고유치 해석

시스템의 고유진동수를 구하기 위해서 고유치 해석을 수행하였다. 맞물림강성이 변하기 때문에 한 주기에 대한 평균물림강성을 구하여 고유치 해석에 사용한다. 마찰요소는 방향성을 가지고 있고 평균값을 시스템에 적용하였을 때 고유진동수에 거의 영향을 미치지 못하기 때문에 운동방정식에서 마찰을 제외하게 되면 작용선의 수직방향인 x 축 방향의 운동이 연성되지 않는다. 따라서 마찰 성분과 x 축 방향의 운동을 제외한 4 자유도 모델에 대한 고유치 해석을 수행하였다.

맞물림 한 주기에 대한 평균물림강성/감쇠는 각각 $6.12 \times 10^7 \text{ N/m}$, 998.66 Ns/m 이다. 이 값을 이용한 고유치 해석결과는 Table 2 와 같다.

	고유진동수 (Hz)
1 st	0
2 nd	686.99
3 rd	954.13
4 th	2712

Table.2 Natural frequencies of the gear driving system

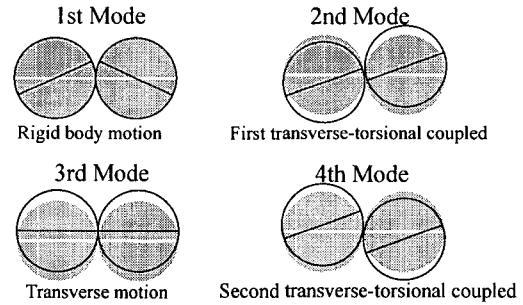


Fig. 8 Natural modes of the gear driving system

이 시스템의 거동 형상을 나타내는 고유모드는 Fig.8 과 같다. 음영진 부분은 정지상태이고 선으로 표현된 부분이 고유모드이다. 첫번째 모드는 강체운동을, 두번째는 비틀림과 병진운동으로 인한 맞물림변위의 진동방향이 서로 반대인 비틀림-병진연성운동, 세번째는 병진운동, 그리고 마지막은 비틀림과 병진운동으로 인한 맞물림변위의 진동방향이 같은 비틀림-병진연성운동을 보여준다.

시스템의 가진요인으로 입력축의 회전속도 및 회전속도의 배수, 그리고 가장 주된 요인으로 변동물림강성/감쇠가 있다. 따라서 물림강성 변화로 인한 맞물림주파수와 회전속도와의 관계를 파악해야 한다. Fig.9 는 이 시스템의 캠벨선도이다.

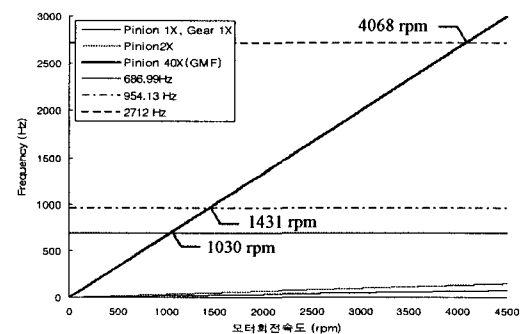


Fig. 9 Campbell diagram

시스템의 회전속도 영역인 0 ~ 4500 rpm 에서 기어쌍 회전속도의 1,2 배수 성분은 크게 영향을 미치지 못하고 맞물림주파수만이 주로 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. 공진이 발생할 수 있는 영역이 1030, 1431, 4068 rpm 이라는 것을 예측할 수 있다.

4.3 정상상태응답

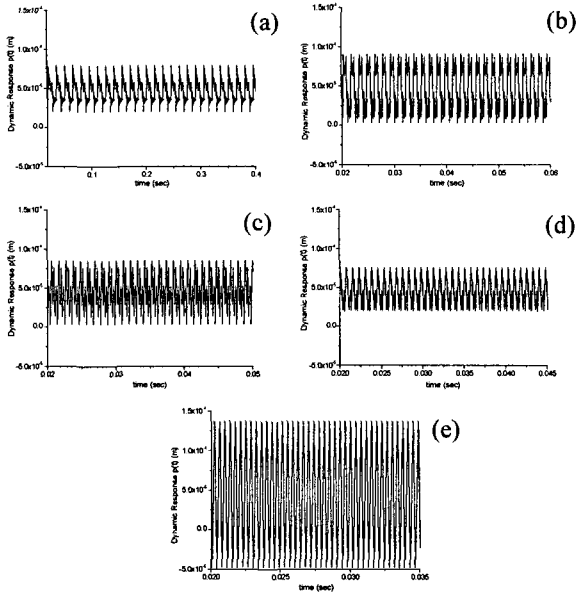


Fig. 10 Steady state responses of gear driving system at various driving speeds; (a) 100rpm, (b) 1030rpm, (c) 1431rpm, (d) 2000rpm, and (e) 4068rpm

Fig.10 은 앞서 예측한 공진영역의 회전속도와 그 밖의 회전속도에 대한 정상상태응답을 나타낸 것이다. 공진영역에 해당하는 1030 rpm, 1431rpm, 4068 rpm 에 대한 정상상태응답의 크기가 다른 회전수에 비해 매우 큰 것을 알 수 있고 낮은 고유진동수영역인 1030 rpm, 1431rpm 에서보다 높은 고유진동수영역인 4068 rpm 에서의 진동이 매우 크게 발생한다는 것을 알 수 있다.

4.4 정상상태응답 비교

변동물림강성과 베어링, 그리고 마찰이 시스템에 미치는 영향을 파악하기 위해 변동물림강성, 베어링 그리고 마찰의 모든 요소를 포함하는 6 자유도의 모델을 model 1, 변동물림강성 대신에 평균물림강성을 사용한 모델을 model 2, 베어링을 제외한 모델을 model 3, 마찰을 제외한 모델을 model 4 라 하여 총 4 개의 모델에 대하여 축의 회전속도를 100rpm 과 2000rpm 으로 구동하였을 때의 정상상태응답을 Fig.11, Fig.12 에 비교하였다.

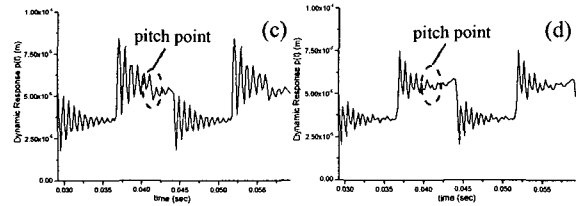
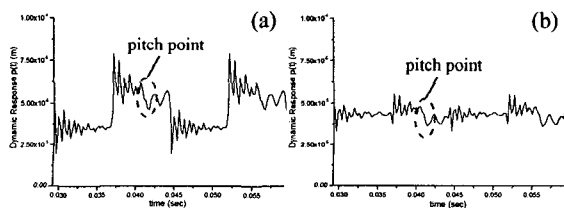


Fig. 11 Comparison of steady state responses for the four models at the speed of 100rpm; (a) model 1, (b) model 2, (c) model 3, and (d) model 4

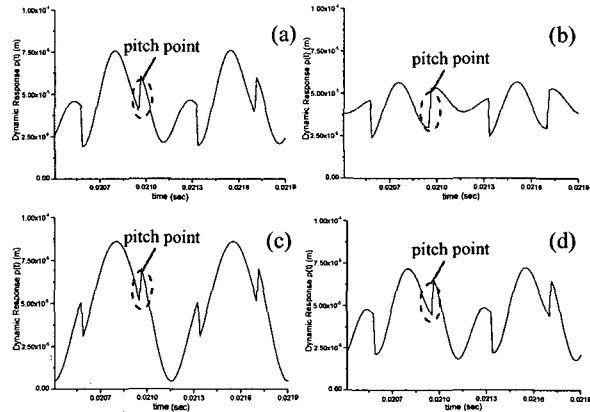


Fig. 12 Comparison of steady state responses for the four models at the speed of 2000rpm; (a) model 1, (b) model 2, (c) model 3, and (d) model 4

Fig.11, Fig.12 에서 4 개의 시스템이 모두 맞물림주파수에 따라 진동한다는 것을 알 수 있고 100rpm 과 2000rpm 의 구동속도에서 각각의 시스템이 비슷한 경향을 보인다. 변동물림강성의 경우 강성변화에 따른 시간응답형태를 보이며 평균물림강성보다 진동량이 크다는 것을 알 수 있다. 베어링을 고려하지 않은 시스템에 비하여 베어링을 고려한 시스템의 진동량이 작고 감쇠효과가 크다. 100rpm 의 구동속도에서 각각의 정상상태응답의 최대 피크(peak) 값은 모든 요소를 고려한 모델에 비해 평균강성시스템이 29.75%의 감소, 베어링을 고려하지 않은 시스템이 6.70%의 증가, 마찰을 고려하지 않은 시스템이 4.75%의 감소가 있었다. 따라서 시스템의 진동량에 미치는 영향은 마찰이나 베어링보다 변동물림강성이 크다는 것을 알 수 있다. 여기서 주목해야 할 것은 피치점(pitch point) 직후 마찰에 의한 영향이 가장 크게 나타나는 것을 확인할 수 있고 피치점 직후에 최대 피크가 위치하도록 설계한다면 응답의 최대 피크값이 줄어들 것이다. 이는 맞물림지점이 피치점을 지나면서 마찰토크의 방향이 외부토크의 방향과 반대로 작용하여 가진력을 감소시켜 시스템의 응답을 감소시키기 때문이다.

4.5 마찰의 감소효과

앞절에서 언급한 마찰에 의한 가진력의 감소효과를 알아보기 위해 물림율을 조절하여 최대 피크와 피치점의 위치가 변함에 따라 정상상태응답의 진동량이 어떻게 변하는지 알아볼 필요가 있다. 여기서 최대 피크는 기어의 맞물림이 2 개에서 1 개로 변하는 지점이다. 기어와 피니언의 잇수가 같은 시스템에서는 정수의 물림율을 제외하고는 최대 피크와 피치점을 일치시킬 수 없으므로 Table.3 과 같이 해석모델의 사양을 변경하여 정상상태응답을 비교한다.

	Pinion	Gear
Tooth Profile	Involute	
Pressure angle	30°	
Module	2	
Number of teeth	18	36
base radius	17.5 mm	75.175 mm
mass	1 kg	4 kg
inertia	$1.15 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$	$1.34 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$
Transmitted Torque	100 Nm	

Table.3 Modified gear design parameters for analyzing the damping effect by the friction

이 시스템에서 최대 피크와 피치점이 일치하는 물림율은 1.5 이다. 따라서 물림율 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 의 총 4 개의 모델에 대하여 축의 회전속도를 100 rpm 으로 구동하였을 때의 정상상태응답을 Fig. 13 에 비교하였다.

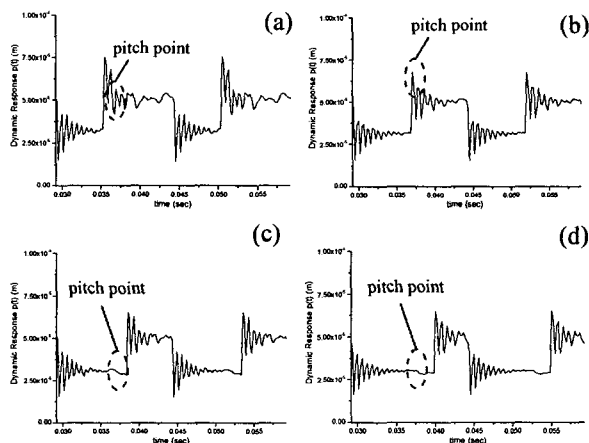


Fig. 13 Steady state responses for the four models with various contact ratios at the speed of 100rpm; (a) 1.4, (b) 1.5, (c) 1.6, (d) 1.7

Fig. 13 을 보면 최대 피크값은 물림율 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 에서 각각 $7.5716 \times 10^{-5} m$, $6.7423 \times 10^{-5} m$, $6.5474 \times 10^{-5} m$, $6.5168 \times 10^{-5} m$ 이다. 물림율 1.4 의

시스템은 피치점이 최대 피크 이후에 오도록 설계하였기 때문에 응답의 최대 피크에 영향을 주지 못하지만 물림율 1.5, 1.6, 1.7 의 시스템은 피치점이 최대피크 이전에 존재하도록 설계하였기 때문에 최대 피크점의 위치가 가진력이 감소되는 구간을 지나므로 응답의 최대피크가 감소되는 것을 확인할 수 있다.

5. 결론

기어쌍과 기어축, 축을 지지하는 베어링, 그리고 마찰요소를 포함한 해석모델을 구성하고 시스템에 대한 동특성 해석을 수행하였다. 기어구동계에 대해 운동방정식을 유도하고 수치해석을 수행하기 위해 수치적분을 이용하여 프로그램을 작성하였다. 해석모델을 총 4 개의 모델로 나누어 고유치 해석, 시간응답해석을 통해 변동물림강성/감쇠, 베어링, 그리고 마찰이 시스템에 미치는 영향을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 시스템의 고유진동수와 맞물림주파수가 일치되는 부근에서 진동량이 가장 큰 경향을 보인다
- (2) 시스템의 진동량에 미치는 영향은 마찰력과 베어링강성보다 변동물림강성이 크다.
- (3) 마찰의 영향은 피치점 직후에 일정부분 나타나고 피치점이 최대 피크점보다 이전에 존재하도록 시스템을 설계하면 최대 피크점에서의 가진력 감소를 통해 진동량의 감소효과를 볼 수 있다.

참고문헌

- (1) Ozguven, H.N. and Houser, D.R., 1988, "Mathematical Models Used in Gear Dynamics-A Review", Journal of Sound and Vibration, 121(3), pp.383-411.
- (2) Ozguven, H.N. and Houser, D.R., 1988, "Dynamic Analysis of High Speed Gears by Using Loaded Static Transmission Error", Journal of Sound and Vibration, 125(1) pp.71-83.
- (3) Ozguven, H.N., 1991, "Non-Linear Mathematical Model for Dynamic Analysis of Spur Gears Including Shaft and Bearing Dynamics", Journal of Sound and Vibration, 145(2) pp.239-260.
- (4) A. Kahraman, R. Singh, 1990, "Non-Linear Dynamic of a Spur Gear Pair", Journal of Sound and Vibration, 142(1), pp.49-75.
- (5) A. Kahraman, R. Singh, 1991, "Non-Linear Dynamics of a Geared Rotor-Bearing System with Multiple Clearances", Journal of Sound and Vibration, 144(3), pp.469-506.
- (6) M. Amabili, A. Rivola, 1997, "Dynamic Analysis of Spur Gear Pairs: Steady-State Response and Stability of the SDOF Model with Time-Varying Meshing Damping", Mechanical

- Systems and Signal Processing, 11(3), pp.375-390.
- (7) S. Theodossiades, S. Natsiavas, 2000, Non-Linear Dynamics of Gear-Pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash? *Journal of Sound and Vibration*, 229(2), pp.287-310.
- (8) Jozef Wojnarowski, Valentin Onishchenko, 2003, Tooth Wear Effects on Spur Gear Dynamics? *Mechanism and Machine Theory* 38, pp.161-178.
- (9) Ian Howard, Shengxiang Jia and Jiande Wang, 2001, The Dynamic Modelling of a Spur Gear in Mesh Including Friction and a Crack? *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), pp. 831-853.
- (10) M. Vaishya, R. Singh, 2001, Sliding Friction-Induced Non-Linearity and Parametric Effects in Gear Dynamics? *Journal of Sound and Vibration*, 248(4), 671-694.
- (11) R. W. Cornell, 1981, Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth? *ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, pp. 447-459.
- (12) M. S. Tavakoli, D. R. Houser, 1986, Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears? *ASME, Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 86-95.
- (13) E. P Gargiulo, 1980, A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness? *Machine Design*, pp. 107-110
- (14) 류재완, 한동철, 최상현, 1999, 기어의 변동물림강성을 고려한 비틀림 진동해석? *한국정밀공학회지* 제 16 권, 제 12 호, pp. 99-108.