

# 변화하는 강성/감쇠를 갖는 계가 조화력을 받을 때의 운동 Motion of a System with Varying Stiffness/Damping Subject to Harmonic Force

이건명\* · 박오철\*

Gun-Myung Lee and O-Cheol Park

**Key Words** : Force Frequency Shifting(가진주파수 이동), Low Frequency Shaker(저주파 가진기), Time Varying Damper(가변 댐퍼), Difference Frequency(차 주파수), Frequency Component(주파수성분).

## ABSTRACT

The motion of a system composed of a plate, constant springs and varying dampers is considered when the system is subject to harmonic force. Letting the frequencies of harmonic force and damper variation  $f_1$  and  $f_2$ , respectively, the displacement at the center of the plate has the strongest component at frequency  $f_1$ . The angular displacement of the plate has strong components at  $f_1 - f_2$  and the natural frequency of the rotational mode of the system. If these two frequencies coincide, the plate oscillates with almost single frequency and a large amplitude. These results can be applied to development of a moment shaker with low frequencies.

## 1. 서론

빌딩, 탑, 다리과 같은 대형 구조물의 동적 거동을 실험적으로 고찰하기 위하여 이들 구조물을 가진하는 방법으로 여러 가지 방법이 사용되어 왔다.<sup>(1)</sup> 그 중 한 가지 방법은 불평형질량(out-of-balance mass)을 이용한 가진기를 사용하는 방법이다. 대형 구조물들은 1Hz 이하의 매우 낮은 고유진동수를 가지고 있고 때문에 이 저주파 모드를 가진시키기 위하여 저주파수의 가진력이 필요하다.<sup>(2)</sup> 그러나 불평형질량 가진기는 진동수의 제곱에 비례하는 가진력을 발생하기 때문에 저주파수에서 일정 크기의 가진력을 얻기 위하여는 매우 큰 불평형질량이 요구된다. 예를 들면 원자력발전소의 동적 테스트를 위하여 고안된 ANCO Mk-16에는 2000톤의 가진력을 얻기 위하여 200,000kgm의 불평형량이 사용되었다.<sup>(3)</sup> 다른 형태의 가진기로는 서보 유압 가진기가 다리의 테스트를 위하여 사용되었으며, 이 가진기는 피스톤 로드위에 설치된 관성 질량을 포함하고 있다.<sup>(4)</sup> 가

진기를 사용하지 않는 방법으로는 계단 이완(step relaxation) 방법이 있다.<sup>(5)</sup> 이 방법에서는 케이블의 한 끝을 테스트하고자 하는 구조물에 연결하고, 다른 한 끝은 움직일 수 있는 차량과 같은 장력 발생장치에 연결한다. 장력이 일정한 값에 도달하면 기계적 링크나 퓨즈가 파열되고, 케이블은 장력 발생장치로부터 해방되어 구조물이 진동을 하게 된다. 이 방법은 높고, 가느다란 구조물에 적합하다. 대형 구조물의 가진을 위하여 이상의 방법들을 적용하는 데에는 공통적으로 대형 장비와 넓은 공간이 요구된다.

한편 저주파수의 가진력 제공을 위한 새로운 형태의 가진기가 제안되었으며 이 가진기는 가진주파수 이동(Force

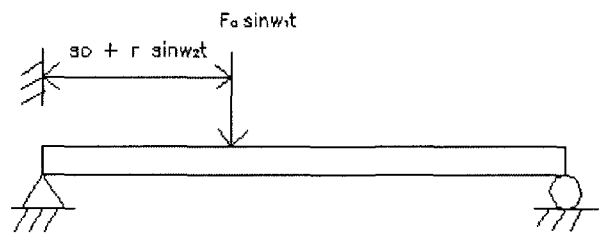


Figure 1 Force frequency shifting with a reciprocating shaker.

† 책임저자, 정희원, 경상대학교 기계항공공학부  
E-mail : gmlee@gsnu.ac.kr  
Tel : (055) 751-5313, Fax : (055) 757-5622

\* 경상대학교 대학원 기계공학과

Frequency Shifting)현상을 이용하고 있다.<sup>(6-8)</sup> Figure 1과 같이 구조물에 가진력  $F = F_0 \sin \omega_1 t$  가 작용하고, 이 가진력의 작용점이  $s = s_0 + r \sin \omega_2 t$  와 같이 구조물을 따라 앞뒤로 이동하면 이 구조물에는 두 개의 주파수  $\omega_1$  과  $\omega_2$ 의 차( $\omega_1 - \omega_2$ )와 합( $\omega_1 + \omega_2$ )의 주파수를 갖는 일반화 힘(generalized force)이 작용하여 구조물을 가진하게 된다. 따라서 일반적인 불평형질량 가진기를 사용하여 이 가진기를 앞뒤로 움직이고, 두 개의 주파수를 조절함으로써 원하는 저주파수의 가진력을 얻을 수 있다. 그러나 이 방법에서는 가진기를 가진력의 방향과 직교하는 방향으로 왕복 운동시켜야 하는 불편한 점이 있다.

가진기를 움직이지 않고 가진주파수 이동현상을 구현할 수 있는 가진기를 Figure 2와 같이 고안하였다. 이 가진 시스템은 판과 여러 개의 스프링, 댐퍼로 이루어져 있다. 불평형질량 가진기로부터 주파수  $\omega_1$ 의 가진력이 판의 중앙에 작용하고, 임의의 한 순간에는 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 활동적이다. 즉 이 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 유한한 스프링상수와 감쇠계수를 갖고, 나머지 스프링과 댐퍼는 영의 계수를 갖는다. 활동적인 스프링과 댐퍼가 판을 따라서  $\omega_2$ 의 주파수로 변화하면 스프링력과 감쇠력은  $\omega_2$ 의 주파수로 판을 따라 움직이게 되고, 구조물에는 두 주파수의 차이  $\omega_1 - \omega_2$ 의 주파수를 갖는 일반화 힘이 작용하리라 예측된다.

본 논문에서는 두개의 스프링과 댐퍼를 갖는 간단한 경우에 판의 운동을 고찰하였다.

## 2. 운동의 해석

이 시스템의 거동을 쉽게 해석하기 위하여 판은 변형이 없는 강체로 가정하고, 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + \sum_i c_i \dot{x} + \sum_i c_i r_i \dot{\theta} + \sum_i k_i x + \sum_i k_i r_i \theta = F_0 \sin \omega_1 t \quad (1)$$

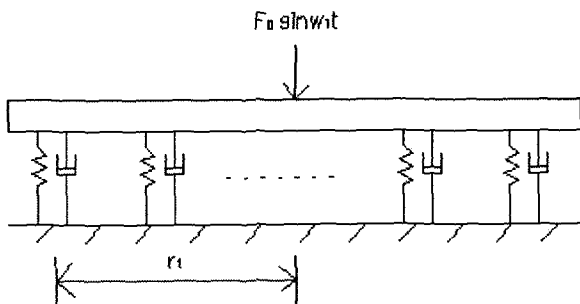


Figure 2 A shaker composed of a plate, springs and dampers.

$$J\ddot{\theta} + \sum_i c_i r_i \dot{x} + \sum_i c_i r_i^2 \dot{\theta} + \sum_i k_i r_i x + \sum_i k_i r_i^2 \theta = 0 \quad (2)$$

이 식에서  $m, J, x, \theta, F_0, k_i, c_i, r_i$ 는 각각 판의 질량과 관성모멘트, 판 중심의 수직 변위와 판의 회전 변위, 가진력의 진폭, 각 스프링과 댐퍼의 스프링상수와 감쇠계수, 그리고 판의 질량 중심으로부터의 거리를 나타낸다. 한 쌍의 스프링과 댐퍼는 판 위의 동일 지점에 부착되어 있다고 가정한다. 스프링과 댐퍼를 통하여 구조물에 전달되는 순 모멘트는 다음과 같다.

$$M_i = \sum_i c_i r_i \dot{x} + \sum_i c_i r_i^2 \dot{\theta} + \sum_i k_i r_i x + \sum_i k_i r_i^2 \theta \quad (3)$$

위의 시스템에서 스프링의 스프링상수는 일정하고, 댐퍼의 감쇠계수는 시간에 따라서 변화하는 경우를 다루었다. 감쇠계수는 다음 식에서 나타낸 바와 같이 부드럽게 변화하도록 하였다.

$$w(t) = 0.42 - 0.5 \cos \omega t + 0.08 \cos 2\omega t \quad (4)$$

위 식은 신호처리에 사용되는 Blackman 윈도우<sup>(9)</sup>를 나타내는 식이나 이 식을 채용한 특별한 이유는 없다. Figure 3은 두 개의 스프링과 댐퍼를 갖는 시스템에서 감쇠계수가 변화하는 모습을 보이고 있다. 이 시스템에서 두 개의 댐퍼는 교대로 활동적이 되는 것을 알 수 있다.

스프링상수  $k$ 의 동일한 스프링을 갖는 시스템에 대하여 비감쇠 시스템의 운동방정식은 비연성화(decoupled)되고, 병진모드와 회전모드의 고유진동수  $\omega_{nd}$ 와  $\omega_{nr}$ 은 각각 다음 식과 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned} \omega_{nd} &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ \omega_{nr} &= \sqrt{\frac{k \sum_i r_i^2}{J}} \end{aligned} \quad (5)$$

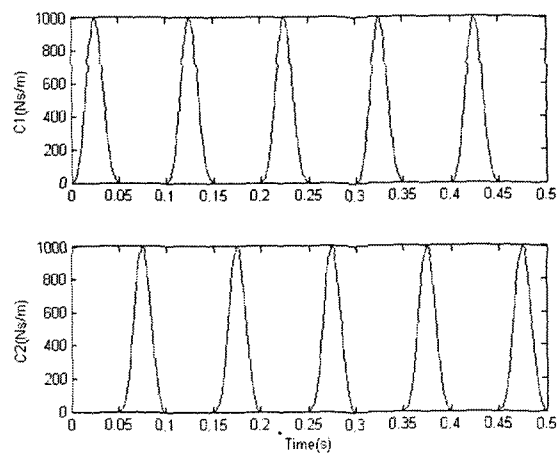


Figure 3 Variation of the damping constants for a two damper system.

이 시스템의 운동을 해석하기 위하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시스템의 운동방정식 (1), (2)를 주어진 시스템 매개변수와 외력에 대하여 Matlab을 사용하여 풀어서 판 중심의 수직변위  $x$ 와 회전변위  $\theta$ 를 구하고, 이 시간데이터를 Fourier 변환하여 주파수성분을 구하였다. 사용된 시스템의 매개변수들은  $m=30\text{kg}$ ,  $J=100\text{kgm}^2$ ,  $k=3.5 \times 10^4\text{N/m}$ ,  $c=1 \times 10^3\text{Ns/m}$ ,  $r_1=1/3\text{m}$ ,  $f_1=\omega_1/2\pi=12\text{Hz}$ ,  $F_0=1000\text{N}$ 이었고,  $f_2$ 를 변화시키며 계산과정을 반복하였다. Figure 4와 5는 각각  $f_2=9\text{Hz}$ 일 때의  $x$ 와  $\theta$ 의 주파수성분을 보이고 있다.  $x$ 의 주파수 성분은 6, 7.56, 12, 24, 30 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각  $2f_2-f_1$ , 병진모드의 고유진동수,  $f_1$ ,  $4f_2-f_1$ ,  $2f_2+f_1$ 에 해당한다. 이 성분 중  $f_1$  성분이 가장 우세하며 그 크기는  $f_2$ 의 값에 무관하게 거의 일정하였다. 다음으로  $2f_2-f_1$  성분이 강하고, 병진모드의 고유진동수 성분,  $2f_2+f_1$  성분의 순이었다.  $\theta$ 의 주파수 성분은 1.38, 3, 15, 21 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각 회전모드의 고유진동수,  $f_1-f_2$ ,  $3f_2-f_1$ ,  $f_1+f_2$ 에 해당하며 이 중 회전모드의 고유진동수 성분과  $f_1-f_2$  성분이 우세하였다.

$f_2$ 를 변화시켰을 때 이러한 현상은 변화하지 않는다. 특별한 경우로  $f_1-f_2$ 와 회전모드의 고유진동수가 일치하는 경우  $\theta$ 의 주파수 성분은 Figure 6에서 보이는 것처럼 두 개의 피크가 합쳐져서 하나로 되고, 다른 주파수 성분은 나타나지 않았다. 즉  $\theta$ 는 거의 한 주파수 성분만을 갖는다. 이 때 스프링에 연결된 점에서의 수직변위  $x_1 = x + r_1\theta$ 를 구하여 그 주파수성분을 Figure 7에 나타내었다. 이 그림으로부터  $x_1$ 의 주파수 성분은  $f_1-f_2$  성분이 우세하여  $x_1$ 은 거의 하나의 주파수를 갖는 사인파형으로 변화함을 알 수 있다.

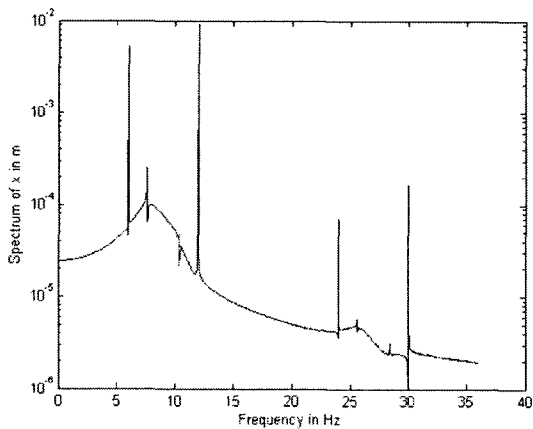


Figure 4 Frequency spectrum of the displacement at the center of the plate.

$f_2$ 를 변화시켜가며  $\theta$ 의 최대 주파수성분을 구하고, 이를 Figure 8에 나타내었다. 이 그림을 관찰하면  $\theta$ 의 최대 주파수 성분은  $f_2=10.6\text{Hz}$  부근에서 급격히 증가하여  $f_1-f_2$ 가 회전모드의 고유진동수와 일치할 때 최대가 된다. 한편  $f_2$ 가  $f_1$ 과 같은 12 Hz에서는  $\theta$ 의 진폭이 시간이 지남에 따라 점점 작아져 영에 수렴한다. 이로 말미암아  $f_2=12\text{Hz}$ 에서  $\theta$ 의 최대 주파수 성분이 매우 작게 나타난다.

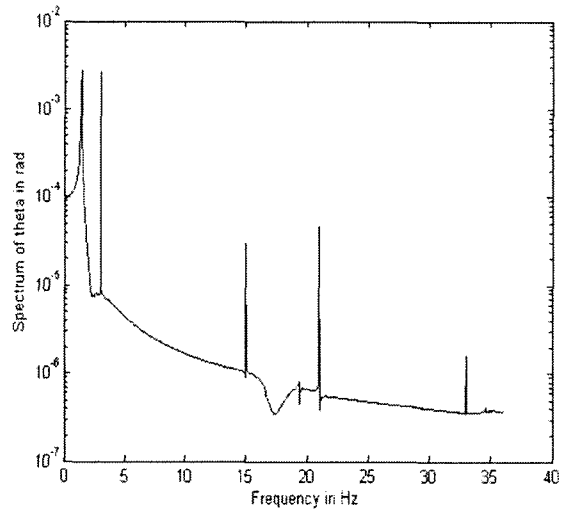


Figure 5 Frequency spectrum of the angular displacement of the plate.

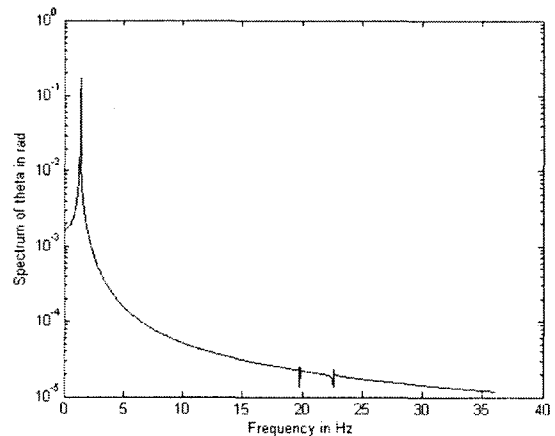


Figure 6 Frequency spectrum of the angular displacement when the difference frequency coincides with the natural frequency of rotational mode.

이상의 결과로부터  $f_1 - f_2$ 가 회전모드의 고유진동수와 일치하도록 함으로써 판을  $f_1 - f_2$ 의 주파수로 큰 진폭의 회전운동을 하게 할 수 있다. 판의 이러한 운동으로 인하여 스프링과 감쇠기가 설치된 기초에는 주파수  $f_1 - f_2$ 의 모멘트가 작용하게 되므로 이 시스템은 모멘트가진기로 사용될 수 있다. 또한  $f_1$ 과  $f_2$ 의 차이를 작게 함으로써 얼마든지 저주파의 모멘트를 얻을 수 있다. 실제로 이러한 저주파 모멘트가진기를 제작할 때 유일한 어려운 점은 가변 댐퍼를 제작하는 일이다. 그러나 자기 또는 전기 유변유체 (rheological fluid)를 사용한 가변 댐퍼<sup>(10)</sup>가 이미 상용화되었으므로 본 논문에서 제안한 저주파 모멘트가진기는 쉽게 제작될 수 있을 것으로 기대한다.

### 3. 결론

본 논문에서는 판, 일정한 스프링상수를 갖는 스프링, 그리고 가변 댐퍼로 이루어진 시스템이 조화력을 받을 때의 거동을 해석하였다. 조화력의 주파수가  $f_1$ 이고, 가변댐퍼의 변화 주파수가  $f_2$ 일 때, 판의 수직변위의 주파수성분은  $f_1$  성분이 가장 우세하며 그 크기는  $f_2$ 의 값에 무관하게 거의 일정하였다. 다음으로  $2f_2 - f_1$  성분이 강하였다. 판의 회전변위의 주파수성분은 회전모드의 고유진동수 성분과  $f_1 - f_2$  성분이 우세하였다. 회전모드의 고유진동수와  $f_1 - f_2$ 가 일치하면 회전변위는 이 주파수에서 큰 주파수성분을 갖고, 다른 주파수성분은 매우 미약하였다. 그리고 회전변위의 최대 주파수성분은 이 주파수에서 최대가 되어 판

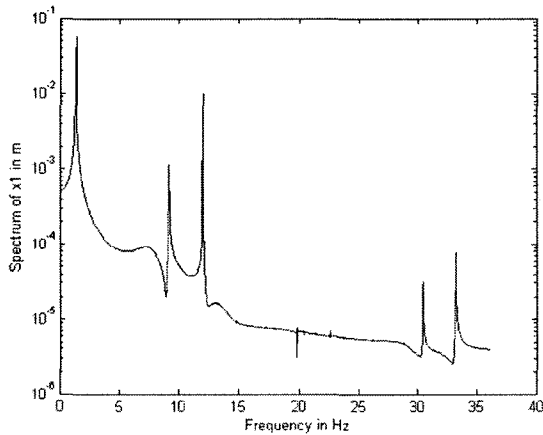


Figure 7 Frequency spectrum of the displacement at the point where a spring and a damper is connected.

의 운동은 거의 한 주파수로 큰 폭으로 요동하는 운동이 된다.

### 후 기

본 연구는 산업자원부 지방기술혁신사업 (RTI04-01-03) 지원으로 수행되었습니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Koss, L. L., 2001, "Excitation of Vibration in Large Structures," The Shock and Vibration Digest, Vol. 33, pp. 473~478.
- (2) Bachmann, H., 1995, Vibration Problems in Structures - Practical Guidelines, Birkhauser Verlag, Basel.
- (3) Stoessel, J. C., et al., 1987, "High Level Vibration Tests Using a 2-kiloton Eccentric Mass Vibrator." Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 166~171.
- (4) Pietrzko, S. and Cantieni, R., 1996, "Modal Testing of a Steel/Concrete Composite Bridge with a Servo-hydraulic Shaker." Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 91~98.
- (5) Mutch, G. E., et al., 1984, "The Dynamic Analysis of a Space Lattice Structure via the Use of Step Relaxation Testing." Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, pp. 368~377.

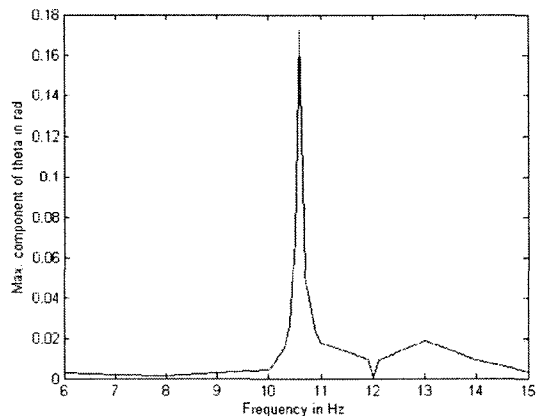


Figure 8 Variation of the maximum frequency component of the angular displacement with frequency  $f_2$ .

(6) Koss, L. L., 1999, "Force Frequency Shifting for Structural Excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 223~237.

(7) Koss, L. L., 1996, "Fluctuating Moment Shaker for Frequency Shifting and Structural Excitation," *Proceedings of the 3rd International Conference of Motion and Vibration Control*, pp. 258~261.

(8) Koss, L. L., He, Y. Y. and Wang, X., 1997, "Bridge and Beam Response to Harmonic Spatial and Time Loads," *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference*, pp. 901~904.

(9) Manual, 1992. *Signal Processing Toolbox - For Use with MATLAB*, MathWorks, Inc.

(10) Weiss, K. D., et al., 1993, "High Strength Magneto- and Electro-rheological Fluids," *SAE Technical Paper Series 932451*, pp. 425~430.