

원판의 비선형 비대칭진동을 위한 수치해 Numerical solution for nonlinear asymmetric vibrations of a circular plate

이원경 *· 세르게이 사모일렌코 **
Won K. Lee and Sergey B. Samoylenko

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형진동), Asymmetric Vibration of a Circular Plate(원판의 비대칭진동), Numerical Solution(수치해), Finite Difference Method(유한차분법), Standing and Traveling Waves(정재파 및 진행파)

ABSTRACT

In order to examine the validity of an asymptotic solution for nonlinear interaction in asymmetric vibration modes of a perfect circular plate, we obtain the numerical solution. The motion of the plate is governed by nonlinear partial differential equation. The initial and boundary value problem is solved by using the finite difference method. The numerical solution is compared with the asymptotic solution. It is found that traveling waves rotating clockwise and counterclockwise as well as standing wave are depicted by the numerical solution.

1. 서론

진동모드 사이의 비선형 상호작용을 고려해 넣을 때 원판이 매우 복잡하고도 흥미로운 현상을 나타낸다는 사실은 잘 알려져 있다.

대칭응답의 경우, Sridhar 등 [1]과, Hadian과 Nayfeh [2]는 세 모드를 고려하여 완전원판의 주공진을, Lee와 Kim [3]은 조합공진을 연구하였다. 이들의 연구에서 정상상태응답은 정재파 성분만의 중점으로 주어짐을 확인하였다. 비대칭응답의 경우, Sridhar 등 [4]은 완전원판의 모드상호작용을 위한 가해조건을 유도하여 일대일 내부공진의 경우 정상상태응답은 정재파만으로 표현된다고 주장하였다. 그러나 Yeo와 Lee [5]는 이 가해조건이 잘 못 유도되었음을 확인하고 수정가해조건을 제시함으로써 일대일 내부공진의 경우 정상상태응답은 많게는 세 개의 안정한 응답 즉, 한 개의 정재파, 두 개의 진행파(시계방향과 반시계방향으로 회전하는)를 가지게 됨을 보여주었다. 이 수정가해조건을 사용하여 Lee와 Yeo [6]는 탄성지반 위의 원판의 일 대 삼 내부공진을 연구하였다. Lee 등 [7]은 절경의 수가 원판의 응답에 미치는 효과를 연구하였다. Lee와 Park [8]은 Yeo와 Lee [5]의 연구를 재조사한 결과, 세 개가 아니라 많게는 다섯 개의 안정한 응답 즉, 한 개의 정재파, 네 개의 진행파(시계방향과 반시계방향으로 회전하는 두

쌍의 진행파)를 가지게 됨을 보여주었다. 이들은 주기배가분기를 거쳐 나타나는 이상한 끌개의 프랙털 흡인경계를 구하였다.

한편 불완전 원판의 국소분기에 관한 많은 연구가 Tobias와 Arnold [9], Williams과 Tobias [10], Williams [11], Raman과 Mote [12], Touzé 등 [13]과 Thomas 등 [14]에 의해 이루어져왔다. Yeo와 Lee [15]는 감쇠를 가진 불완전 원판의 모드상호작용에서의 대역분기를 연구하여 Silnikov 형 homoclinic 궤도가 존재하는 조건을 찾았다. 그러나 그 궤도도 인근에 존재한다고 알려진 이상한 끌개도 찾지는 못했다. Samoylenko와 Lee [16, 17]는 비감쇠 불완전 원판의 대역분기를 heteroclinic 궤도와 불변 tori의 분쇄개념을 사용하여 연구하였다.

이 연구의 목적은, 완전원판의 비선형 비대칭진동 모드사이의 상호작용에 관한 수치해를 구하여 Yeo와 Lee [5], Lee와 Park [8]가 구한 점근해의 타당성을 검증하는 것이다. 우리는 진동응답의 진폭뿐만 아니라 진행파의 경우 그 방향에도 관심을 가졌다. 실험연구를 예로 들어보면, Raman과 Mote [12], Touzé 등 [13], Thomas 등 [14]은 정재파와 공존하는 진행파의 방향엔 관심을 기울이지 않았다. 이 이유는 아마 초기조건을 비롯하여 계를 지배하는 매개변수를 적당히 제어하는 것이 대단히 어려웠기 때문일 것이다. 완전원판을 지배하는 von Karman 형의 비선형 지배방정식을 포함하는 초기치 및 경계치 문제를 수치적으로 풀기 위하여 유한차분법 (Carnahan 등 [18], Ferziger [19], Mitchell과 Griffiths [20]을 사용하였다. 이렇게 구한 수치해를 Yeo와 Lee [5], Lee와 Park [8]이 구한 점근해와 비교하였다.

* 이원경; 영남대학교 기계공학부

E-mail : wkleee@yu.ac.kr

Tel:(053)810-2455, Fax: (053)810-4627

** 영남대학교 기계공학부

2. 지배방정식과 정상상태응답

Efstathiades [21]는 불균질 원판의 비감쇠 자유진동을 지배하는 방정식을 유도하였다. 균질 원판을 가정함으로써 이 방정식을 단순화한 후, 감쇠와 가진력항을 추가하였다. Fig. 1의 원판의 운동방정식은 다음과 같다 (Sridhar 등 [4]).

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w = L(w, F) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + p(t, r, \theta), \quad (1a)$$

$$\nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (1b)$$

여기서

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2)$$

$$\nabla^4 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2, \quad (3)$$

이고 ρ 는 밀도, h 는 두께, w 중간면의 변형, $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$, c 는 감쇠계수, E 는 영률, ν Poisson 비, p 는 가진력이고 F 면내 판성을 무시한 경우의 면내평형조건을 만족하는 힘 포텐셜 함수이다.

아래와 같이 변수를 조정하면

$$r = \bar{r} R, \quad t = \bar{t} R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad w = \bar{w} \frac{h^2}{R}, \quad F = \bar{F} \frac{Eh^3}{R^2}, \quad (4)$$

$$c = 24 \bar{c} (1-\nu^2) \frac{h^2}{R^2} \sqrt{\rho h D}, \quad p = 12 \bar{p} (1-\nu^2) \frac{Dh^4}{R^2}$$

식 (1)을 아래와 같이 무차원 식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \nabla^4 \bar{w} = \varepsilon \left[L(\bar{w}, \bar{F}) - 2\bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + p(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) \right], \quad (5a)$$

$$\nabla^4 \bar{F} = \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r} \partial \bar{\theta}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\theta}^2} \right), \quad (5b)$$

여기서 $\varepsilon = 12(1-\nu^2)h^2/R^2$ 은 작은 매개변수이며 변수 위의 bar 기호는 생략하였다.

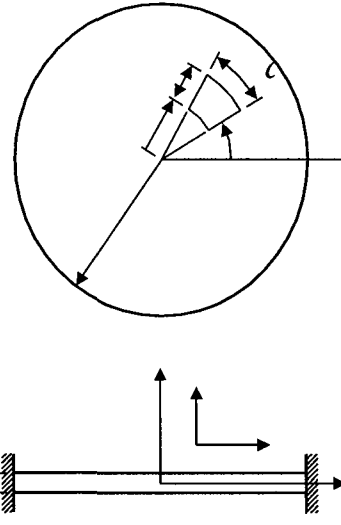


Fig. 1 A schematic diagram of a circular plate

고정경계를 가진 Fig. 1의 원판의 경계조건은 모든 t 와 θ 에 걸쳐서, $r=1$ 에서 아래와 같다.

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (6a, b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (6c)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+\nu}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \quad (6d)$$

마땅히 $r=0$ 에서의 해는 유한해야 한다는 조건도 추가되어야 한다.

조화가진을 고려하기 위해 가진력함수 p 를 다음과 같이 둔다.

$$p(t, r, \theta) = \left[\sum_{n'=1}^{\infty} P_{n'} \phi_{n'}(r) + 2 \sum_{n', m'=1}^{\infty} P_{n', m'} \phi_{n', m'}(r) \cos(n'\theta + \tau_{n', m'}) \right] \cos(\lambda t) \quad (7)$$

여기서 선형 축대칭 모드 $\phi_{n'}(r)$ 고유진동수 $\omega_{n'}$ 에 해당하는 것으로서 첫번째 첨자 n' 은 절경의 수를, 두번째 첨자 m' 은 경계를 포함한 절원의 수를, $P_{n', m'}$ 은 가진력표현의 계수를, $\tau_{n', m'}$ 은 위상을, λ 는 조화가진의 진동수를 나타낸다.

Yeo와 Lee [5]는 $\lambda \approx \omega_{11}$ 인 주공진 즉 해당 모드의 절경은 하나이고 절원은 경계뿐인 경우를 고려하였다. 이들은 수정가해조건을 이용하여 이 진동응답을 지배하는 아래와 같은 자율 상미분방정식계를

유도하였다.

$$a' = -c_{11}a + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \sin \mu_a \quad (8a)$$

$$b' = -c_{11}b + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \sin \mu_b \quad (8b)$$

$$a\mu'_a = \sigma a + \frac{\gamma}{8\omega_{11}} a(a^2 + 2b^2) + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \cos \mu_a \quad (8c)$$

$$b\mu'_b = \sigma b + \frac{\gamma}{8\omega_{11}} b(b^2 + 2a^2) + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \cos \mu_b \quad (8d)$$

여기서 a , b 와 μ_a , μ_b 은 고유진동수 ω_{11} 에 해당하는 진폭과 위상변수를 나타낸다. 매개변수 c_{11} , P_{11} , γ 는 해당모드의 감쇠계수, 가진진폭, 비선형계수를 나타낸다. 여기서 이탈변수 σ 는 $\lambda = \omega_{11} + \hat{\sigma}$ 과 $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ 에 의해 정의된다. 여기서 계 (8)이 변수의 변화 $(a, b, \mu_a, \mu_b) \rightarrow (b, a, \mu_b, \mu_a)$ 에 대해 불변임을 주의해야 한다. 즉 (a, b, μ_a, μ_b) 가 계의 해이면 (b, a, μ_b, μ_a) 도 해가 된다.

Yeo와 Lee [5]는 원판의 정상상태해 즉 계 (8)의 평형해 ($a' = b' = \mu'_a = \mu'_b = 0$)에만 관심이 있었다. 계 일차 근사에 의한 정상상태해는 다음과 같다.

$$w(t, r, \theta) = \phi_{11}(r) \{a \cos(\lambda t - \mu_a + \theta) + b \cos(\lambda t - \mu_b - \theta)\} \quad (9)$$

여기서 $\phi_{11}(r)$ 는 해당모드의 함수로서

$$\phi_{11}(r) = \kappa \left[J_1(\eta r) - \frac{J_1(\eta)}{I_1(\eta)} I_1(\eta r) \right] \quad (10)$$

$J_1(x)$ 과 $I_1(x)$ 는 제 1차의 제 1종 Bessel 함수이며 제 1차의 수정 Bessel 함수이다. 또한 η 는 다음 특성방정식의 근이다.

$$I_1(\eta)J_1'(\eta) - J_1(\eta)I_1'(\eta) = 0. \quad (11)$$

계수 κ 는 다음의 정규화과정을 통해 구해진다.

$$\int_0^1 r \phi_{11}^2(r) dr = 1. \quad (12)$$

식 (9)에 의하면 응답 $w(t, r, \theta)$ 은 시계방향과 반시계방향으로 회전하는 진행파들의 중첩이다. $a = b$ 과 $\mu_a = \mu_b$ 이 성립하는 응답의 경우 식 (9)는 다음의 정상파가 된다.

$$w(t, r, \theta) = 2\phi_{11}(r) a \cos(\lambda t - \mu_a) \cos(\theta). \quad (13)$$

Yeo와 Lee [5]가 사용한 매개변수는 다음과 같다.

$$\varepsilon = 0.001067, \quad \varepsilon c = 0.01, \quad \varepsilon P_{11} = 4, \quad (14)$$

$$\nu = 1/3, \quad \gamma = -772.04.$$

3. 유한차분해석

Lee 등 [22]과 Lee와 Yeo [23]는 각각 봉과 보의 경우, 진동모드의 비선형 상호작용을 위한 점근해의 타당성을 검증하는 데 유한차분법이 유용하다는 걸 확인한 적이 있다. 유한차분법을 사용해서 식 (5)와 (6)을 풀기 위해 먼저 연속인 정의역을 $(0 \leq t \leq \infty, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 유한차분 mesh로 대체하여야 한다.

시간 t 는 다음과 같이 차분시간 t_n 으로 대체된다.

$$t_n = n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

여기서 T 는 선택된 모드로 진동하는 원판의 주기이며, N 은 이 주기내의 분할된 시간구간의 수이다.

원판의 중심 즉 $r = 0$ 에서 식 (5)는 $1/r^k$ 의 특이성을 갖는데 여기서 $k = 1, \dots, 4$ 이다. 이 특이성이 갖는 문제점을 해결하기 위해 유한차분해석에선 Mohseni와 Colonius[24]가 제안한 방법을 따른다. 새로운 반경방향의 좌표 \tilde{r} 은 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{r} = \begin{cases} r & , 0 \leq \theta < \pi \\ -r & , \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (16)$$

여기서 $-1 \leq \tilde{r} \leq 1$ 이 성립한다. 이 새 좌표를 사용하여 차분을 수행함으로써 절점을 아래와 같이 적절히 잡으면 특이성 문제를 피하게 된다.

$$\tilde{r}_l = \left(l - \frac{L+1}{2} \right) \Delta r, \quad \Delta r = \frac{2}{L-1}, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (17)$$

여기서 L 은 Fig. 2에서 보듯이 한 직경을 따라서 절점의 수이다.

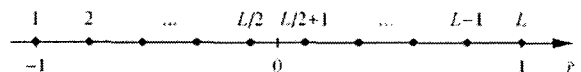


Fig. 2 Discretization of radial coordinate. Indexes of nodes are shown above the axis

좌표 θ 는 다음과 같이 차분좌표 θ_m 으로 대체된다.

$$\theta_m = m\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{M}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

여기서 M 은 반원을 따라서 배정한 절점의 수이다. 식 (17)과 (18)에 의해 정의된 mesh가 Fig. 3에 나타나 있다.

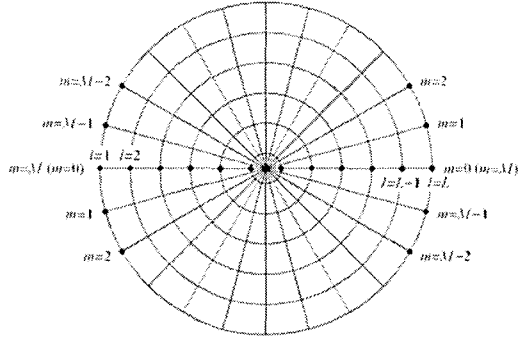


Fig. 3 Discretization of spatial coordinates

좌표 \tilde{r} 을 사용하기 위해서는 식 (5)와 경계조건 (6)을 다음 규칙에 따라 변환해야 한다 (Mohseni와 Colonius [24]). $0 \leq \theta < \pi$ 일 때 식 (5)와 (6)의 모든 양은 두 좌표계에서 같다. 그러나 $\pi \leq \theta < 2\pi$ 인 경우, 반경방향의 좌표 r 과 그 도함수들은 다음의 규칙에 따라 바뀌어야 한다.

$$r \rightarrow -\tilde{r}, \quad \frac{\partial^n}{\partial r^n} \rightarrow (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \tilde{r}^n}. \quad (19)$$

원주방향의 도함수들은 r 에서 \tilde{r} 로의 변환에 의해 영향을 받지 않는다. 식 (5)와 (6)에서 좌표 r 과 반경방향의 도함수들을 서로 결합하여 r 좌표를 사용하든 \tilde{r} 좌표를 사용하든 이 방정식들이 같은 형태를 유지하도록 한다.

변수 $w(t, r, \theta)$ 와 $F(t, r, \theta)$ 를 다음과 같이 근사화 해준다.

$$w_{l,m}^n = w(t_n, \tilde{r}_l, \theta_m), \quad F_{l,m}^n = F(t_n, \tilde{r}_l, \theta_m). \quad (20)$$

여기서 $t_n, \tilde{r}_l, \theta_m$ 는 식 (15), (17), (18)에 주어져 있다. Taylor 급수전개를 사용해서 변수 $w(t, r, \theta)$ 와 $F(t, r, \theta)$ 의 도함수를 위한 표현은 별도로 구해두어야 한다.

이제 식 (5)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + L_w = N_w + P, \quad (21a)$$

$$L_F = N_F, \quad (21b)$$

여기서

$$\begin{aligned} L_w &= \nabla^4 w(t, r, \theta), \\ L_F &= \nabla^4 F(t, r, \theta), \\ N_w &= \varepsilon L(w, F), \\ P &= \varepsilon p(t, r, \theta) \end{aligned} \quad (22)$$

이며 N_F 은 식 (5b)의 우측을 나타낸다. 또한 L_w, L_F, N_w, N_F, P 의 근사를 각각 $(L_w)_{l,m}^n, (L_F)_{l,m}^n, (N_w)_{l,m}^n, (N_F)_{l,m}^n, P_{l,m}^n$ 로 나타내기로 한다. 식 (5)와 (6)을 시간역에서 풀기 위해 다음과 같이 semi-implicit 방법을 사용하기로 한다. $3 \leq l \leq L-2; 1 \leq m \leq M$ 의 경우

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} (w_{l,m}^{n+1} - 2w_{l,m}^n + w_{l,m}^{n-1}) + 2\varepsilon c \frac{1}{2\Delta t} (w_{l,m}^{n+1} - w_{l,m}^{n-1}) \\ + \frac{1}{2} [(L_w)_{l,m}^{n+1} + (L_w)_{l,m}^{n-1}] = (N_w)_{l,m}^n + P_{l,m}^n, \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(L_F)_{l,m}^{n+1} + (L_F)_{l,m}^{n-1}] = (N_F)_{l,m}^n, \\ l = 1, L; 1 \leq m \leq M \text{ 의 경우} \end{aligned} \quad (23b)$$

$$w_{l,m}^{n+1} = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{l,m}^{n+1} = 0, \quad (23c,d)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)_{l,m}^{n+1} - \nu \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{l,m}^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)_{l,m}^{n+1} \right] = 0, \quad (23e)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \right)_{l,m}^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)_{l,m}^{n+1} - \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{l,m}^{n+1} \\ + (2+\nu) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right)_{l,m}^{n+1} - (3+\nu) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)_{l,m}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (23f)$$

경계에선 $-\tilde{r}_l = \tilde{r}_l = 1$ 의 관계식을 사용해서 식 (23e)과 (23f)을 구성해야 한다. $1 \leq l \leq L$ 인 경우 식 (23)을 구성할 때 다음과 같은 대칭관계를 사용한다.

$$\begin{aligned} w_{l,-1}^n &= w_{l,M-1}^n, & F_{l,-1}^n &= F_{l,M-1}^n, \\ w_{l,0}^n &= w_{l,M}^n, & F_{l,0}^n &= F_{l,M}^n, \\ w_{l,M+1}^n &= w_{l,1}^n, & F_{l,M+1}^n &= F_{l,1}^n, \\ w_{l,M+2}^n &= w_{l,2}^n, & F_{l,M+2}^n &= F_{l,2}^n. \end{aligned} \quad (24)$$

결국 $2 \times L \times M$ 개의 미지수 $w_{l,m}^{n+1}$ 과 $F_{l,m}^{n+1}$ 를 구하기 위한 $2 \times L \times M$ 개의 방정식 (23)을 갖게 되었다. 함수 F 는 공간좌표에 대한 도함수로만 식 (5)와 (6)에서 나타나며 포텐셜 함수의 역할을 한다. 그러므로 식 (23)을 사용해서는 이 함수의 값을 얻을 수가 없다. 이 문제를 풀기 위해서는 인위적으로 이 포텐셜 함수의 기준 위치를 정해두어야 한다. 이를 위해서 원판내의 어느 한 점에서 함수 F 의 값을 영으로 정하기만 하면 된다. $l = m = 1$ 의 경우에는 (23e)이나 (23f) 중 어느 하나를 $F_{1,1}^{n+1} = 0$ 로 대체하기만 하면 된다..

식 (23)의 선형항들은 Crank-Nicolson 식에서 암시적으로 (implicitly) 포함되는 반면에 비선형항들은 명시적으로 (explicitly) 포함된다. 그 다음 매 시간 스텝마다 선형 대수방정식계의 해를 구해야 한다. 이 방법의 정확도는 $O(\Delta t^2, \Delta r^4, \Delta \theta^4)$ 라고 말할 수 있다. 초기 즉 $n = 0$ 의 경우엔, 다음과 같이 implicit 방법을 사용해야 한다.

$3 \leq l \leq L-2; 1 \leq m \leq M$ 의 경우

$$\frac{1}{\Delta t^2} (w_{l,m}^0 - w_{l,m}^1 + \Delta t \dot{w}_{l,m}^0) + \varepsilon c \frac{1}{\Delta t} (2w_{l,m}^0 - 2w_{l,m}^1 + \Delta t \dot{w}_{l,m}^0) + (L_r)_{l,m}^1 = (N_r)_{l,m}^1 + P_{l,m}^1, \quad (25a)$$

$$(L_r)_{l,m}^1 = (N_r)_{l,m}^1, \quad (25b)$$

$l = 1, L; 1 \leq m \leq M$ 의 경우

$$w_{l,m}^1 = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{l,m}^1 = 0, \quad (25c, d)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)_{l,m}^1 - \nu \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{l,m}^1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)_{l,m}^1 \right] = 0, \quad (25e)$$

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \right)_{l,m}^1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)_{l,m}^1 - \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{l,m}^1 + (2+\nu) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right)_{l,m}^1 - (3+\nu) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)_{l,m}^1 = 0, \quad (25f)$$

여기서 $\dot{w}_{l,m}^0 = \dot{w}(0, \bar{r}_l, \theta_m)$ 은 초기속도장을 차분화한 것이다. $l = m = 1$ 의 경우 식 (25e)나 (25f)은 $F_{1,1}^1 = 0$ 으로 대체되어야 한다. 식 (25)은 Newton-Raphson 방법을 사용해서 풀기로 한다. 이 단계의 정확도는 $O(\Delta t^2, \Delta r^4, \Delta \theta^4)$ 라고 말할 수 있다.

4. 계산 결과

식 (23)을 사용해서 완전원판의 모드상호작용을 연구함으로써 Yeo와 Lee [5], Lee와 Park [8]이 구한 정상상태 응답의 타당성을 조사하고자 한다. 연구에서 사용한 원판의 크기와 철판에 해당하는 물리량은 다음과 같다.

$$R = 0.1 \text{ m}, \quad h = 0.001 \text{ m}, \\ E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \rho = 8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 1/3, \quad (26) \\ c = 1.168 \times 10^6 \text{ kg/m}^2 \text{ s}.$$

고려중인 무차원 진동수 $\omega_{11} = 21.2604$ 에 해당하는 실제 진동수는 3311.2 Hz가 된다. 이 원판은 다음의 분포가진력을 받고 있는 것으로 보는데

$$p(t, r, \theta) = P e^{-\alpha(r-r_f) - \beta(\theta-\theta_f)} \cos[(\omega_{11} + \varepsilon \sigma)t], \quad (27)$$

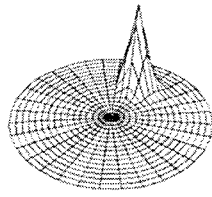
여기서 r_f 와 θ_f 는 최대가진력이 작용하는 위치를, α 과 β 는 가진력의 분포를 말해주고 있다. 또한 P 의 값은 식 (14)와 같이 $\varepsilon P_{11} = 4$ 가 되도록 조정해야 한다. 결국 사용한 값은 다음과 같다.

$$\alpha = 60, \quad \beta = 20, \\ r_f = 0.5, \quad \theta_f = \pi/2, \quad (28) \\ P = 1.553 \times 10^4 \text{ N}.$$

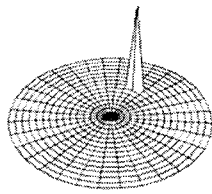
사실 식 (27)의 가진력을 선택한 이유는 분포력이 아니라 집중력을 근사화 하기 위한 것이다. Fig. 4a의 분포력으로부터 α 와 β 의 값을 키우면 Fig. 4b의 집중력을 얻게된다. 다만 집중력의 경우 실제 계산에서는 고주파성분이 가진되는 효과를 낳게 되어 응답의 진폭을 구하는 데 많은 시간이 걸리는 단점이 있다. 결국 이 연구에선 Fig. 4b의 집중력이 아니라 Fig. 4a의 분포력을 가진력으로 선택하였다.

식 (26)와 (28)의 값들은 Yeo와 Lee [5]가 사용한 무차원 값들에 해당하는 것이다. 또한 유한차분계산을 위해선 $N = 50, T = 2\pi/\lambda, L = 32, M = 16$ 의 값을 사용하였다.

Fig. 5은 정상상태응답을 보여주고 있는데 실선은 Yeo와 Lee [5]가 해석적으로 구한 결과물, Δ 과 \circ 은 수치적으로 구한 결과이다. 여기서 Δ 과 \circ 는 정재파해와 진행파해를 나타내고 있다. 이 그림의 $Z_a, Z_b, Z_c, Z_c', Z_d, Z_d', Z_e$ 부분을 확대한 결과가 Figs. 6에서 12까지 나타나 있다.



(a)



(b)

Fig. 4 Distribution of the excitation force.

a) $\alpha = 60, \beta = 20$, b) $\alpha = 1000, \beta = 120$

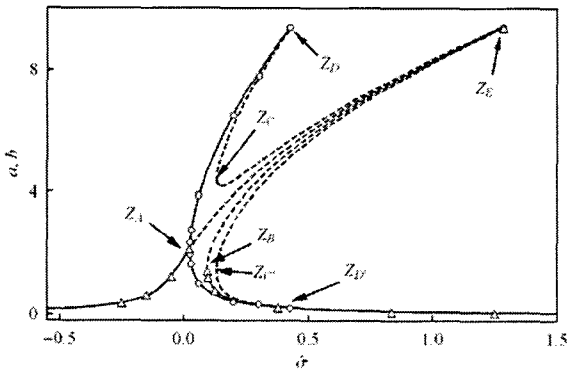


Fig. 5 Local bifurcation diagram of system (8). —, stable; - - -, unstable. Numerical solutions: Δ , standing wave ($a = b$); \circ , traveling wave ($a \neq b$)

Fig. 6은 $\hat{\sigma}_A$ 에서 발생한 pitchfork 분기를 보여주고 있는데, 이 곳에서 안정한 정재파해 SS1은 안정성을 잃게 되고 두 안정한 진행파해 ST1_A와 ST1_B가 발생하게 된다. Fig. 7은 $\hat{\sigma}_B$ 에서 발생한 saddle-node 분기를 보여주고 있는데, 이 곳이 불안정한 정재파해 US2가 안정한 정재파해 SS2로 바뀌는 전환점이 된다. Fig. 8와 Fig. 9는 Z_C 와 Z_C' 을 확대한 부분에서 발생한 분기를 각각 보여주고 있다.

불안정한 진행파해 UT1_A와 UT1_B는 $\hat{\sigma}_C = 0.13247$ 에서 안정한 진행파해 ST4_A와 ST4_B로 전환한다. $\hat{\sigma}_{CH} = 0.13264$ 에서는 이 둘이 Hopf 분기로 인해 다시 안정성을 잃게 된다. 이 두 그림은 수치적인

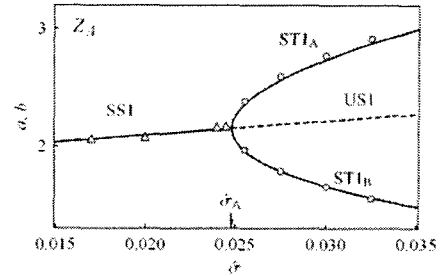


Fig. 6 Close-up Z_A of the local bifurcation diagram of system (8). —, stable; - - -, unstable. Numerical solutions: Δ , standing wave ($a = b$); \circ , traveling wave ($a \neq b$)

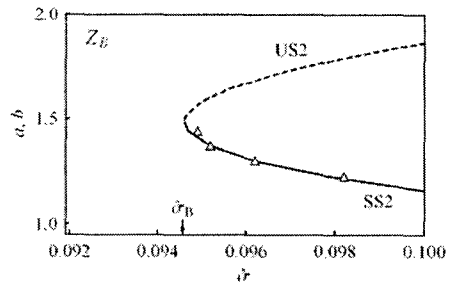


Fig. 7 Close-up Z_B of the local bifurcation diagram of system (8). —, stable; - - -, unstable. Numerical solutions: Δ , standing wave ($a = b$)

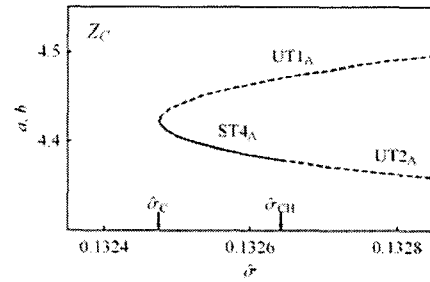


Fig. 8 Close-up Z_C of the local bifurcation diagram of system (8). —, stable; - - -, unstable

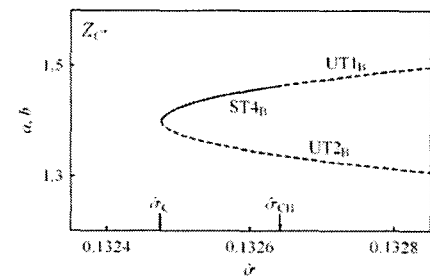


Fig. 9 Close-up Z_C' of the local bifurcation diagram of system (8). —, stable; - - -, unstable 방법으로 안정한 두 진행파 ST4_A와 ST4_B를 구하는 데 실패했음을 보여주고 있다. 이 점은 Lee와 Park [8]의

연구에서 드러났듯이 ST1_A, ST1_B, SS2의 흡인 영역에 비해 ST4_A와 ST4_B의 흡인영역의 크기가 훨씬 작기 때문일 것으로 짐작된다. 더 구체적으로 말하자면, 유한차분 계산을 수행할 때에는 과도과정에 요구되는 계산 시간을 줄이기 위하여, 해석적으로 구한 정상상태 응답으로부터 얻은 초기조건을 사용하였다. 그런데 이때 사용한 초기조건이, 추구하는 실제해의 흡인영역을 벗어나게 되면 우리가 추구하는 해가 아니라 엉뚱한 해로 이끌리게 된다. 이 경우엔 무작위로 인근의 초기조건을 사용해서 계속 시도해야 하는데 본 연구에선 그러한 시도에도 불구하고 원하는 응답을 구할 수가 없었다는 말이다. 결국 해석적으로 구한 해의 타당성을 조사하기 위해 그 해에 의존하지 않으면 안된다는 고백은 다분히 역설적이며 수치적인 방법으로 다중 끝개를 연구하는 일의 어려움을 극적으로 일깨워 주고 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 $\hat{\sigma}_D$ 에서 발생한 saddle-node 분기를 보여주는데 여기서 안정한 진행파해 ST1_A와 ST1_B는 안정성을 잃는다. Fig. 12은 Z_E 부분을 확대한 것으로서 여러 개의 분기를 보여주고 있다. $\hat{\sigma}_{sn} = 1.28484$ 에서 불안정한 진행파해 UT2_A와 UT2_B는 Hopf 분기를 통해 안정한 진행파해가 된다. 이 해는 $\hat{\sigma}_{sp} = 1.28554$ 에서 pitchfork 분기를 통해 사라지고 불안정한 정재파해는 안정한 정재파해 SS3로 변한다. 곧 이 해는 $\hat{\sigma}_e = 1.28585$ 에서 saddle-node 분기를 맞게 된다. 이 결과는 수치적으로 구한 분기점들 ($\hat{\sigma}'_{sn} = 1.2845$, $\hat{\sigma}'_{sp} = 1.2860$, $\hat{\sigma}'_e = 1.28632$)이 해석적으로 구한 분기점들 ($\hat{\sigma}_{sn}$, $\hat{\sigma}_{sp}$, $\hat{\sigma}_e$)로부터 약간 이동한 점을 제외하면 이 수치해가 해석해의 특징을 잘 반영하고 있다. 이러한 계산 결과로부터 Yeo와 Lee [5], Lee와 Park [8]이 구한 해석해의 타당성이 검증되었다고 결론을 내린다.

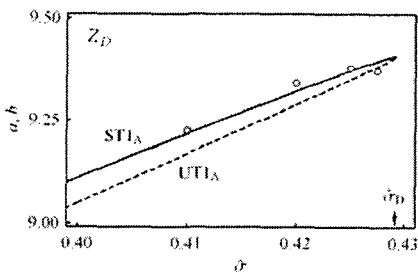


Fig. 10 Close-up Z_D of the local bifurcation diagram of system (8). —? stable; - - -, unstable. Numerical solutions: O, traveling wave ($a \neq b$)

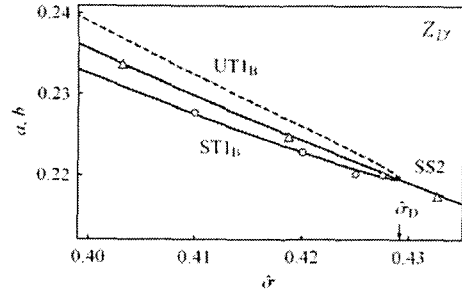


Fig. 11 Close-up Z_D of the local bifurcation diagram of system (8). —? stable; - - -, unstable. Numerical solutions: Δ , standing wave ($a = b$); O, traveling wave ($a \neq b$)

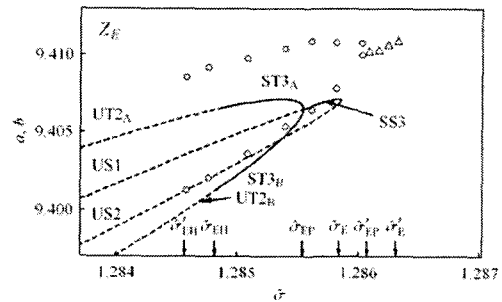


Fig. 12 Close-up Z_E of the local bifurcation diagram of system (8). —? stable; - - -, unstable. Numerical solutions: Δ , standing wave ($a = b$); O, traveling wave ($a \neq b$)

5. 결론

완전원판의 비선형 비대칭진동 모드간의 상호작용을 위한 해석해의 타당성을 검증하기 위하여 수치해를 구하였다. 비선형편미분 방정식과 초기조건 및 경계조건으로 주어지는 문제를 풀기 위해 유한차분법을 사용하였다. 이렇게 구한 수치해를 검토한 결과 해석해의 타당성이 확인되었다.

참고문헌

[1] Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Nonlinear Resonances in Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration* 41, pp. 359- 373.
 [2] Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interactions in Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration* 142, pp. 279- 292.
 [3] Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", *ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS* 62, pp. 1015- 1022.
 [4] Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978,

- " Nonlinear Resonances in Forced Responses of Plates. Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates" , *Journal of Sound and Vibration* 59, pp. 159- 170.
- [5] Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2002, " Corrected Solvability Conditions for Non-Linear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate" , *Journal of Sound and Vibration* 257, pp. 653- 665.
- [6] Lee, W. K. and Yeo, M. H., 2003, " Nonlinear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate" , *Journal of Sound and Vibration* 263, pp. 1017- 1030.
- [7] Lee, W. K., Yeo, M. H. and Samoilenko, S. B., 2003, " The Effect of the Number of the Nodal Diameters on Non-Linear Interactions in Two Asymmetric Vibration Modes of a Circular Plate" , *Journal of Sound and Vibration* 268, pp. 1013- 1023.
- [8] Lee, W. K. and Park, H. D., 2006, " Chaos and Fractal Basin Boundary in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate" , *submitted to Journal of Sound and Vibration*.
- [9] Tobias, S. A. and Arnold, R. N., 1957, " Free Undamped Non-Linear Vibrations of Imperfect Circular Discs" , *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 171, pp. 691- 703.
- [10] Williams, C. J. H. and Tobias S. A., 1963, " Forced Undamped Non-Linear Vibrations of Imperfect Circular Discs" , *Journal of Mechanical Engineering Science* 5, pp. 325- 335.
- [11] Williams, C. J. H., 1966, " The Stability of Nodal Patterns in Disk Vibration" , *International Journal of Mechanical Sciences* 8, pp. 421- 431.
- [12] Raman, A. and Mote, C. D., 2001, " Effects of Imperfection on the Non-Linear Oscillations of Circular Plates Spinning Near Critical Speed" , *International Journal of Non-Linear Mechanics* 36, pp. 261- 289.
- [13] Touzé, C., Thomas, O. and Chaigne, A., 2002, " Asymmetric Non-Linear Forced Vibrations of Free-Edge Circular Plates. Part I: Theory" , *Journal of Sound and Vibration* 258, pp. 649- 676.
- [14] Thomas, O., Touzé, C. and Chaigne, A., 2003, " Asymmetric Non-Linear Forced Vibrations of Free-Edge Circular Plates. Part II: Experiments" , *Journal of Sound and Vibration* 265, pp. 1075- 1101.
- [15] Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2006, " Evidences of Global Bifurcations of an Imperfect Circular Plate" , *Journal of Sound and Vibration* 293, pp. 138-155.
- [16] Samoilenko, S. B. and Lee, W. K., 2006, " Global Bifurcations and Chaos in an Harmonically Excited and Undamped Circular Plate" , *Nonlinear Dynamics*, in press.
- [17] Samoilenko, S. B. and Lee, W. K., 2006, " Hamiltonian Chaos via Breaking of Invariant Tori in Modal Interactions of a Circular Plate" , *submitted to Physica D*.
- [18] Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., 1969, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc.
- [19] Ferziger, J. H., 1981, *Numerical Methods for Engineering Application*, John Wiley & Sons, Inc.
- [20] Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., 1987, *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc.
- [21] Efstathiades, G. J., 1971, " A New Approach to the Large-Deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin' s Procedure" , *Journal of Sound and Vibration* 16, pp. 231- 253.
- [22] Lee, W. K., Yeo, M. H. and Bae, S. S., 1997, " Validity of the Multiple-Scale Solution for a Subharmonic Resonance Response of a Bar with a Non-Linear Boundary Condition" , *Journal of Sound and Vibration* 2008(4) pp. 567- 574.
- [23] Lee, W. K. and Yeo, M. H., 1999, " Two Mode Interaction of a Beam with a Nonlinear Boundary Condition" , *ASME JOURNAL OF VIBRATION AND ACOUSTICS* 121, pp. 84- 88.
- [24] Mohseni, K. and Colonius, T., 2000, " Numerical Treatment of Polar Coordinate Singularities" , *Journal of Computational Physics* 157, pp. 787- 795.