

정사각형 외팔보의 비평면 진동현상 Nonplanar vibration Phenomenon of the Quadrangle Cantilever Beam

김명구[†] · 박철희* · 조종두* · 조호준*
Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chongdu Cho and Ho-Joon Cho

Key Words : Nonplanar(비평면), One-to-one resonance (일대일 공진), Base harmonic excitation(기초조화가진), Nonlinear inertia (비선형 관성), Superharmonic vibration(차수조화진동), Subharmonic vibration(분수조화 진동), Torus(원환체)

ABSTRACT

In this paper, nonlinear nonplanar vibration of a flexible rectangular cantilever beam is analyzed when one-to-one resonance occurs to the beam. The planar and nonplanar motions of the beam are analyzed in time and frequency domains. In frequency domain, FFT analyzer is used to perform autospectrum and cepstrum analyses for nonlinear response of the beam. In time domain, an oscilloscope is used to investigate the phase difference between the planar and nonplanar motions and to perform Torus analysis in the phase space. Through those analyzing process, the main frequencies of superharmonic, subharmonic, and super-subharmonic motions are investigated in the nonplanar motion due to one-to-one resonance. Analyzing the phase difference between the planar and nonplanar motions, it is observed that the phase difference varies in time.

1. 서론

외팔보의 비선형 진동현상은 매우 흥미 있는 동역학적인 응답특성을 보여주고 있다. 비선형 현상이 발생하는 유연 구조물인 로봇이나 대형 우주 구조물 우주선의 태양 전지판, 가스터어빈의 블레이드, 헬리콥터의 로터 블레이드의 동역학적인 현상을 분석하기 위하여 연구되고 있다. 또한 여러 가지 비선형 현상들이 부분적으로 유연성을 갖는 기계 시스템으로 구성된 요소들에서도 발생할 수 있다. 큰 유연성을 갖는 기계 시스템으로 구성된 요소들에서도 발생할 수 있다. 큰 유연성을 갖고 있는 공간 구조물에서는 외부나 내부에서 외력이 작용을 하면 비선형 현상이 발생 가능성이 높으며, 비선형 현상이 발생하였을 때 이것을 구조적으로 쉽게 회피하기가 힘들다. 그러므로 탄성운동을 하는 보 형태의 구조물의 비선형 현상을 이론적으로 예측하고 실험적으로 증명할 필요가 있다.

길고 얇은 외팔보는 유연 구조물로서 관성항, 스프링항, 감쇠항, 중력항, 휨항(warping term) 등의 비선형 특성을 포함하고 있다. 외부 가진력이 작

은 경우 유연 구조물은 선형운동만을 하고 있다. 그러나 외부가진력이 점점 커지면 보가 포함하고 있는 비선형 요소들이 선형운동을 비선형운동으로 변환시킨다. 유연 구조물에서의 운동은 비선형 계에서만 나타나는 차수조화진동(superharmonic), 분수조화진동(subharmonic), 차수-분수조화진동(super-subharmonic), 준 주기운동(quasi-periodic)현상들이 나타나고 있다. 위 현상들을 분석함으로써 계가 갖고 있는 비선형 요소들의 특성을 분석하고, 동역학적으로 왜 이와 같은 현상을 갖는가에 대한 연구가 필요하다.⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁷⁾

유연 외팔보의 비선형현상을 분석하기 위하여 길고 얇은 정사각형 외팔보로 사용하여 실험적 방법으로 접근하였다. 외팔보를 기초조화가진(base harmonic excitation)을 하여 보가 선형운동에서 비선형운동으로 전환해가는 과정을 실험적으로 분석하였다. FFT분석기를 이용하여 오토스펙트럼(autospectrum)과 캡스트럼(cepstrum)을 이용하여 비선형 현상인 차수조화진동과 분수조화진동의 주파수를 분석하였다. 오실로스코프를 이용하여 시간영역에서 비선형 진동 시 발생하는 위상의 변화를 추적하였다. 시간영역에서 Torus구조를 분석하여 보의 준 주기현상을 분석하였다. 그리고 비선형 진동에서 위상변화가 갖는 의미를 분석하였다.⁽⁴⁾

[†] 인하대학교 기계공학과
E-mail: mgkim21@hotmail.com
TEL: (032) 860-7321 FAX: (032) 868-1716

* 인하대학교 기계공학과

2. 비선형 진동현상

2.1 비선형 진동에서 나타나는 조화진동의 분석

외부에서 주기적인 가진력을 받는 시스템에서 비선형 현상이 발생하면 시스템에서는 분수조화진동과 차수조화진동이 발생한다. 시스템에 공급되는 가진주파수가 Ω 이고, 시스템의 응답주파수가 ω 라고 하면 두 주파수 사이에 다음과 같은 관계가 성립된다.⁽⁴⁾

$$\omega = m\Omega \text{ 차수조화진동}$$

$$\omega = \frac{1}{n}\Omega \text{ 분수조화진동}$$

$$\omega = \frac{m}{n}\Omega \text{ 차수-분수조화진동}$$

여기서 m, n 은 정수이다. ($m \neq 1, n \neq 1$)

시스템에서 발생하는 조화진동을 해석하기 위해서는 응답신호에 대한 시계열 분석을 해야 한다. 그러나 응답특성이 복잡한 경우에는 시간영역에서 시계열 분석을 하기 힘들다. 그러므로 응답신호를 FFT 분석을 하여 시간신호를 주파수 신호로 변환을 시키면 조화진동의 응답특성을 해석하기가 쉽다. 응답신호를 FFT 분석을 하여 오토스펙트럼으로 변환을 한 다음에 주파수 영역에서 신호분석을 하면 조화운동의 특성을 해석하기 쉽다. 그러므로 스펙트럼의 피크치 해석을 통해서 차수조화진동, 분수조화진동, 차수-분수조화진동을 해석할 수 있다.

비선형성을 갖는 응답신호를 스펙트럼 해석을 하면 많은 주기적인 조화성분들이 나타난다. 이 조화운동의 성분들의 주기성을 해석하기 위하여 캡스트럼 방법을 사용한다. 캡스트럼은 대수 파워 스펙트럼의 파워스펙트럼”으로 정의된다. 스펙트럼 상에서 고주파의 조화성분의 주기적인 성분이다. 측대파(side band frequency)의 성분들이 어느 일정한 주파수 간격으로 스펙트럼이 나타나 있으며 캡스트럼 상에서는 그 간격을 하나의 주기로 표현할 수 있다. 캡스트럼에서는 고주파의 조화성분과 측대파 성분들이 시간 축에서 하나의 피크 성분으로 나타나기 때문에 비선형 현상 시 나타나는 주파수 변조현상들을 분석할 수 있다.

2.2 비선형진동의 위상해석

위상계적은 평면방향(x-축)과 비평면방향(y-축)에서 외팔보의 운동을 2 차원적으로 해석할 수 있다. 일대일 공진에서 평면운동과 비평면운동이 주기진동의 형태로 나타나고 있으므로 두 운동을 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1)$$

$$y = a_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2)$$

일대일 공진에서 $\omega_1 \cong \omega_2$ 이므로

$$x = a_1 \cos(\omega t)$$

$$y = a_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \varphi : \text{위상차}$$

일대일 공진에서 평면과 비평면 사이의 위상차를 해석할 수 있다. 따라서 φ 값의 해석을 통해서 평면운동과 비평면운동 사이의 위상변화를 해석할 수 있다.

2.3 위상공간 해석

비선형 시스템에서의 응답신호를 시간신호에서 위상공간의 신호로 변환할 수 있다. 응답신호를 미분-적분하여 시간신호를 위상공간의 형태로 변환을 시키면 위상공간 내에서 Non-Autonomous periodic orbit의 형태로 표현이 된다. 그림 2 에서 검은 점들은 외부 가진주파수에 대한 Particular phase를 나타내는 궤적들이다. 한 점에서 다음 점 까지는 가진주파수 $T = 2\pi/\Omega$ 를 갖는 주기성분이다. 이 관계를 분명히 보기 위하여 시간변수 $x_3 = t$ 을 갖는 확장된 위상공간 내에서 계의 운동을 표현하는 것이 유용하다. 이 위상공간 상에서 계의 운동은 Autonomous하며, 각각의 궤적은 상호 교차하지 않는다.⁽⁸⁾

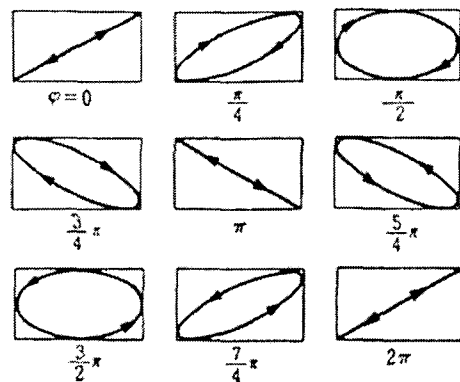


Fig. 1 Phase portrate on the same frequency

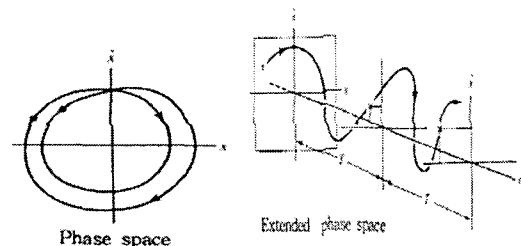


Fig. 2 Phase space and Extended phase space

3. 비선형 실험

3.1 실험 장치

비선형 실험을 하기 위하여 균일한 탄성 재료인 알루미늄 합금으로 된 정사각형 보를 사용하였다. 알루미늄 합금의 물성치는 탄성계수 $E=720\text{GPa}$, 강성계수 $G=27\text{GPa}$, 푸아송 비 $\nu=0.33$, 단위길이당 질량 $m=0.036\text{kg/m}$, 보의 형상은 두께 $t=5\text{mm}$, 길이 $L=675\text{mm}$ 이다. 외팔보의 가진방법은 고정부를 기초조화가진으로 일정한 진폭의 사인파 가진을 하였다.

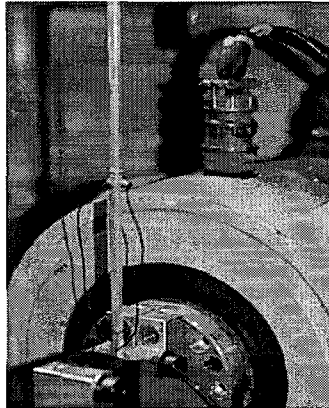


Fig. 3 Accelerometer position on the quadrangle cantilever beam

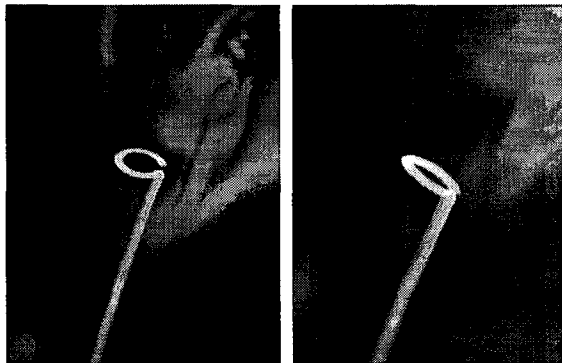


Fig. 4 Nonplanar motions on the one-to-one resonance in the second mode of the cantilever beam

Table 1 Measured natural frequency and damping coefficient of the quadrangle cantilever beam

Mode	λ	Theory(Hz)	Meas.(Hz)	Damping
1	1.8751	8.80	8.50	2.1100%
2	4.6941	55.15	53.50	0.3440%
3	7.8548	154.42	149.50	0.4610%

3.2 실험방법

유연한 정사각형 보를 외팔보의 경계조건을 만족시키는 상태로 가진기에 고정을 하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진주파수를 증가하거나 감소시키는 방법으로 sine sweeping 실험을 수행하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분은 가진주파수의 변화와 상관없이 일정한 값을 갖게 된다. 가진 주파수의 증가와 감소는 sine sweeping의 형태이며 변화비율은 0.030Hz/s 이다.

정사각형 외팔보의 2 차 모드에서 주파수를 고정시키고 가진 진폭을 증가시키는 방법으로 진폭을 증가시킨다. 진폭이 증가시킴에 따라 선형진동에서 비선형진동으로 변화해 가는 과정을 분석하였다. 비선형진동의 오토스펙트럼과 캡스트럼 방법을 사용하였다. 비선형진동의 위상변화를 해석하기 위하여 위상계적 분석을 하였고 혼돈의 형태를 분석하기 위하여 위상계적 해석을 하였다.

4. 실험결과 및 고찰

정사각형 외팔보의 2 차 모드(53.50Hz)에서 발생하는 비선형 응답특성을 FFT 분석기와 오실로스코프로 분석하였다. 비선형 응답특성을 주파수 분석방법인 오토스펙트럼과 캡스트럼을 이용하여 분석하였다. 스펙트럼에서 기준주파수 f_0 (53.50Hz)을 중심으로 $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$ 의 고차조화진동이 발생하였고, $1/2f_0$ 의 분수조화진동과 $3/2f_0$, $5/2f_0$ 의 차수-분수조화진동이 발생하고 있음을 볼 수 있다. 2 차 모드의 비선형 응답신호를 캡스트럼으로 해석하면, 주파수 영역의 하모닉 성분들을 보다 쉽게 해석할 수 있다. 캡스트럼에서 f_0 을 기준으로 하여 $3f_0$, $4f_0$ 성분들이 큰 피크값을 갖고 있음을 알 수 있다. 그리고 $1/2f_0$, $1/4f_0$ 의 분수조화진동 성분들이 잘 나타나고 있음을 볼 수 있다.

2 차 모드에서 평면과 비평면운동의 위상분석에서 외팔보의 일대일 공진에 의한 비평면운동이 강하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 또한 평면과 비평면운동 사이의 위상각이 150° 까지 변화함을 볼 수 있다. 위상공간을 이용한 비선형 계의 분석에 있어서 2 차 모드의 비선형운동의 중요 성분이 $1/2f_0$ 와 $1/3f_0$ 의 성분임을 알 수 있다. 측정시간이 변화함에 따라서 토러스의 모양이 조금씩 변화하고 있으며 또한 토러스의 전체의 운동 양상이 상하로 조금씩 변화함을 실험적으로 볼 수 있었다.

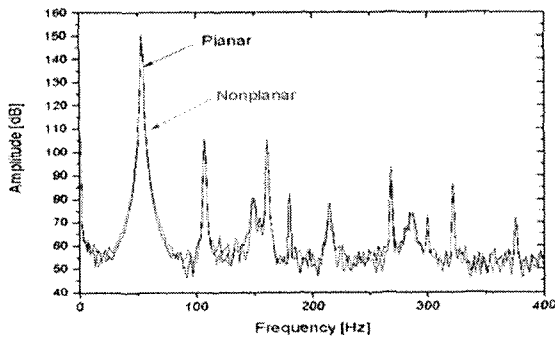


Fig. 5 Autospectrum of the planar and nonplanar in the second mode

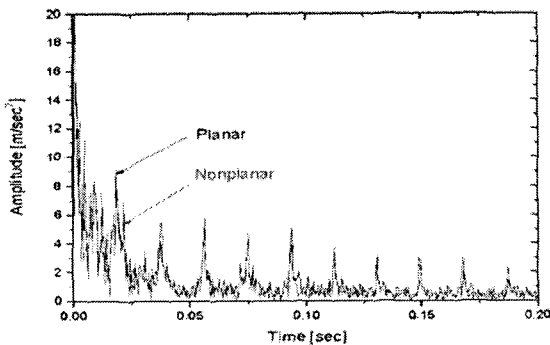


Fig. 6 Cepstrum of the planar and nonplanar in the second mode

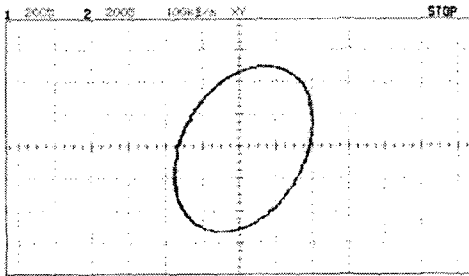


Fig. 7 Phase change in phase portrate of the second mode (x-planar, y-nonplanar)

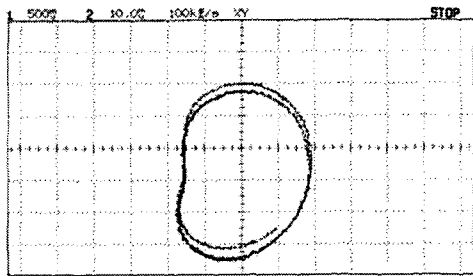


Fig. 8 Torus analysis in the second mode (x-velocity, y-displacement)

유연한 정사각형 외팔보의 일대일 공진에서 나타나는 비선형 현상을 실험적으로 분석하였다. 비선형 신호는 주파수 영역에서 오토스펙트럼과 캡스트럼 분석을 하였고, 시간영역에서 위상분석과 Torus 분석을 수행하였다. 정사각형 외팔보의 2 차 모드인 $f_0 = 53.50\text{Hz}$ 에서 비선형 응답특성을 분석하였다. 주파수 영역인 오토스펙트럼에서는 f_0 을 기준으로 하여 $2f_0, 3f_0, 4f_0$ 의 차수조화진동의 피크성분들이 크게 나타나고 있다. 캡스트럼에서는 f_0 을 기준으로 $1/2f_0$ 와 $3/2f_0, 5/2f_0$ 의 차수-분수조화진동의 피크 성분들이 크게 나타나고 있다. 그러나 Torus 을 이용한 위상공간 해석에서는 외팔보의 주성분이 $1/2f_0$ 와 $1/3f_0$ 의 성분임을 알 수 있다. 그러므로 정사각형 외팔보가 일대일 공진을 할 때, f_0 성분뿐만 아니라 $1/2f_0$ 성분도 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 일대일 공진임에도 불구하고 평면과 비평면의 위상각이 크게 변화하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 비선형 진동에서 일대일 공진에 의한 위상각 변화에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- (1) Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990, "Nonlinear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitation", *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.25, No.5, pp.455-474.
- (2) Nayfeh, A. H. and Pai, P.F., 1989, "Nonlinear Non-Planar Parametric Responses of an inextensional Beam", *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.24, No.2, pp.139-158.
- (3) Haigh, E. C. and King, W. W., 1972, "Stability of Nonlinear Oscillations of an Elastic Rod", *J.Acost.Soc.Am.*52, pp.899-911.
- (4) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, "Nonlinear Oscillations"
- (5) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, "Dynamics the Geometry of Behavior", 2nd Ed., Addison-Wesley.
- (6) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold
- (7) Cusumano, J. P., 1990, "Low-dimensional Chaotic nonplanar motions of the elastica", Ph.D.Thesis, Cornell University, New York.
- (8) Pak, C. H., Rand, R. H, and Moon, F. C., 1992, "Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes", *Nonlinear Dynamics*, Vol.3, pp.347-364.
- (9) M. R. M. Crespo da Silva and C. C. Glynn., 1978 "Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beam-I. Equations of Motion", *J. Struct. Mech.* 6., pp.437-448.

5. 결론