심플렉틱 형태와 로렌츠 상호작용의 관계

Relations Between the Symplectic Form and the Lorentz Reciprocity

조용희
목원대학교 정보통신공학부

Cho Yong-Heui
Mokwon Univ.

요약

근역장 측정 알고리즘 유도를 간략화하기 위하여 심플렉틱 공간에 기반을 둔 심플렉틱 형태를 근역장 탐침 교정 방정식에 도입한다. 근역장 탐침 교정 방정식 유도를 위해 로렌츠 상호작용 원리를 이용한다. 심플렉틱 형태를 이용하면 복잡한 이중적분에 대한 고려가 필요 없으므로 근역장 탐침 교정 방정식이 간략화 된다.

Abstract

The symplectic form based on a symplectic space is introduced to simplify a probe compensation equation in terms of the near-field measurement algorithm. The Lorentz reciprocity principle is also utilized for a near-field probe compensation equation. Applying the symplectic form to the probe compensation equation gives a simplified probe equation, thus confirming the validity of our approach.

I. 서 론

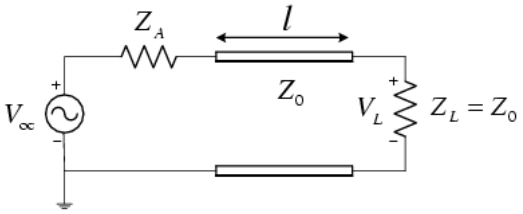
근역장 측정에 대한 교정[1-3]을 간략화하기 위하여 로렌츠 상호작용 원리(Lorentz reciprocity principle)[4]와 심플렉틱 공간(symplectic space)에 기반을 둔 심플렉틱 형태(symplectic form)를 도입한다. 본 논문에서 제안하는 새로운 상호작용(reciprocity) 표기법과 반작용(reaction) 표기법을 이용하여 새로운 탐침(probe) 교정 방정식(compensation equation)[5,6]을 제안한다.

이 교정 방정식을 평면주사법(planar scanning)에 적용하면 근사적인 탐침 교정 방정식을 얻을 수 있다. 마찬가지로 원통주사(circular cylindrical scanning)와 구면주사(spherical scanning)에 대해서도 좌표계를 원통좌표계와 구면좌표계로 변환만 하면 근사적인 탐침 교정 방정식을 새롭게 얻을 수 있다.

새로운 탐침 교정 방정식을 이용하면 탐침 교정의 한계와 근사를 명확히 정의하여 응용할 수 있다. 이를 통해 본 접근법의 명확성과 간결성을 확인한다.

II. 안테나 근역장 측정 모델링

근역장(near-field) 측정법에 대한 알고리즘을 고려하기 위하여 안테나 근역장 측정법을 그림 1과 같이 모델링한다.



▶▶ 그림 1. 안테나 근역장 측정의 모델링

정상적인 근역장 안테나 측정이라면 최대 전력 이송(maximum power transfer) 이론[7]에 의해 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{|V_{oc}|^2}{8R_A} = \frac{|\hat{e}_p \cdot \bar{E}_i|^2}{2\eta_0} A_e \qquad (1)$$

여기서 V_{oc}는 개방회로(open-circuit) 전압, $Z_A = R_A - iX_A$, $\widehat{e_p}$는 편파(polarization)를 나타내는 단위 벡터(unit vector), $\overline{E_i}$는 입사 전기장, A_e는 안테나의 유효 단면적(effective area), G_r은 수신기의 안테나 이득(antenna gain)이다. 식 (1)을 이용하면 탐침이 받는 개방회로 전압을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$V_{oc} = \frac{2\pi i}{k_0}\sqrt{\frac{R_A G_r}{\pi \eta_0}}\hat{e}_p \cdot \bar{E}_i \qquad (2)$$

실제로 탐침에 여기되는 전압은 탐침의 등가 입력 임피던스(equivalent input impedance)인 Z_L에 유기되는 전압이므로, 전송선 방정식(transmission-line equation)을 이용하면

$$V_L = \frac{Z_0}{Z_A + Z_0} V_{oc} e^{i\beta l} \quad (3)$$

식 (3)이 의미하는 바는 탐침 보정 방정식을 V_{oc}에 대해서만 유도하면 실제 측정에 대한 결과를 (3)을 이용해 변환할 수 있음을 뜻한다.

III. 심플렉틱 형태

로렌츠 상호작용 원리에 되입되는 상호작용양을 정의하기 위해 다음과 같은 표기법을 이용한다.

$$\ll a, b \gg = \oint_S (\overline{E}_a \times \overline{H}_b - \overline{E}_b \times \overline{H}_a) \cdot d\overline{a} \quad (4)$$

상호작용 $\ll a, b \gg$를 이루는 원천(source) a와 b의 대수적 구조(algebraic structure)는 벡터공간(vector space)이다.

상호작용 $\ll a, b \gg$의 특성은 (4)식을 이용하면

$$\ll k_1 a_1 + k_2 a_2, b \gg = k_1 \ll a_1, b \gg + k_2 \ll a_2, b \gg \quad (5)$$

$$\ll b, a \gg = - \ll a, b \gg \quad (6)$$

$$\ll a, a \gg = 0 \quad (7)$$

식 (5)-(7)의 성질은 심플렉틱 공간(斜交空間, symplectic space)의 중요한 공리이다. 식 (5)는 상호작용의 두 원천 a, b에 대해 쌍일차(雙一次, bilinearity)가 성립함을 뜻한다. 식 (6)은 상호작용 원천의 관계가 불균제 대칭(不均齊 對稱, skew-symmetry)임을 뜻한다. 식 (7)은 자기자신과의 상호작용은 없음을 뜻한다. 즉, 상호작용이 의미하는 바는 다른 원천과 작용력이 얼마인가를 나타내는 척도가 된다.

그러므로 상호작용 $\ll a, b \gg$는 원천 a, b가 이루는 벡터공간에 심플렉틱 형태(symplectic form) $\ll \gg$를 가진 심플렉티 공간을 이룬다.

IV. 로렌츠 상호작용과의 관계

로렌츠 상호작용 원리는 서로 다른 두 원천(source)의 전자기장이 갖는 관계를 나타내는 것이다. 즉,

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\overline{E}_a \times \overline{H}_b - \overline{E}_b \times \overline{H}_a) \\ &= (\overline{E}_b \cdot \overline{J}_a - \overline{H}_b \cdot \overline{M}_a) \\ &- (\overline{E}_a \cdot \overline{J}_b - \overline{H}_a \cdot \overline{M}_b) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\overline{J}$와 $\overline{M}$은 전기전류와 자기전류를 나타내며, a와 b는 서로 다른 두개의 원천 나타낸다.

럼지(V. H. Rumsey)의 반작용(reaction)을 (8)식에 도입여 간단히 하면

$$\ll a, b \gg = \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle \quad (9)$$

여기서

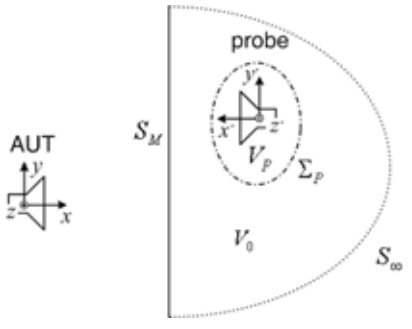
$$\langle a, b \rangle = \int_V (\overline{E}_b \cdot \overline{J}_a - \overline{H}_b \cdot \overline{M}_a) dv \quad (10)$$

반작용 $\langle a, b \rangle$의 특성은

$$\langle k_1 a_1 + k_2 a_2, b \rangle = k_1 \langle a_1, b \rangle + k_2 \langle a_2, b \rangle \quad (11)$$

$$\langle b, a \rangle = \langle a, b \rangle \quad (12)$$

식 (12)는 로렌츠 상호작용 원리가 적용되는 체적 V가 모든 원천 a, b를 포함할 때 성립한다. 반작용 $\langle a, b \rangle$는 원천 a와 전자장 b가 이루는 벡터공간에 내적공간(inner product space)을 이룬다. (10)를 고려하면 자기 자신에 대한 반작용 $\langle a, a \rangle$는 원천 a가 가진 전력(power)을 의미하게 된다. 그래서 $\langle a, a \rangle \rangle 0$.



▶▶ 그림 2. 로렌츠 상호작용 원리의 적용

그림 2에서 AUT(Antenna Under Test)는 측정할 안테나이며 근역장은 탐침으로 측정한다. S_M은 근역장을 측정하는 열린 표면(open surface)이며, S_∞는 로렌츠 상호작용 원리를 적용하기 위한 가상의 무한 표면이다. Σ_P는 프로브를 감싸는 임의의 닫힌 표면(closed surface)이며 V_P는 Σ_P가 만드

는 체적이다. $\Sigma = S_M + S_\infty$라 정의하고 Σ가 만드는 체적을 V라 하면 $V_0 = V - V_p$를 만족한다.

탐침 교정을 수행하기 위하여 AUT와 탐침이 만드는 다중반사(multiple reflection)를 무시한다. AUT와 프로브가 만드는 등가 원천(equivalent source)을 a와 p라 하고, AUT와 탐침에서 반사되는 산란장(scattered field)을 형성하는 등가 원천을 as와 ps라 하자. 그림 2의 구조에 (9)식에 제시된 로렌츠 상호작용 원리를 적용하면

$$\begin{aligned} &\ll a+ps, p+as \gg_\Sigma \\ &= \langle a+ps, p+as \rangle_V \\ &- \langle p+as, a+ps \rangle_V \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 아래첨자 V와 Σ는 상호작용과 반작용이 정의되는 영역을 각각 나타낸다. (11)식을 (13)식의 우변에 적용하고 체적 V에 원천 a와 as가 존재하지 않는 것($\overline{J_a} = \overline{J_{as}} = 0$)을 이용하면

$$\begin{aligned} &\ll a+ps, p+as \gg_\Sigma \\ &= \langle ps, p+as \rangle_V \\ &- \langle p, a+ps \rangle_V \\ &= \ll ps, p \gg_{\Sigma_P} \\ &+ \langle ps, as \rangle_{V_P} - \langle p, a \rangle_{V_P} \end{aligned} \tag{14}$$

식 (5)의 배분법칙을 (14)식의 좌변에 적용하고 정리하면

$$\begin{aligned} &\ll a, p \gg_\Sigma + \ll as, ps \gg_\Sigma \\ &= \langle ps, as \rangle_{V_P} - \langle p, a \rangle_{V_P} \end{aligned} \tag{15}$$

TEM(Transverse ElectroMagnetic) 파동(wave) 조건에 의해 $\ll a, p \gg_{S_\infty} = 0$인 것을 이용하면

$$\ll a, p \gg_{S_M} = 2\langle ps, as \rangle_{V_P} - \langle p, a \rangle_{V_P} \tag{16}$$

탐침에 유기되는 개방회로 전압에 의한 탐침 입사 전력의 비례량을 $P(\overline{r_0})$라 하면 $P(\overline{r_0})$은 상호작용 혹은 반작용으로 근사화할 수 있다. 즉,

$$P(\overline{r_0}) = \ll a, p \gg_{\Sigma_P} = -\langle p, a \rangle_{V_P} \tag{17}$$

식(17)을 이용하면 다음과 같은 일반적인 탐침 교정 방정식을 얻는다.

$$\ll a, p \gg_{S_M} = P(\overline{r_0}) + 2\langle ps, as \rangle_{V_P} \tag{18}$$

AUT와 탐침에 의해 반사되는 산란장의 반작용이 $P(\overline{r_0})$에 비해 매우 작다고 가정하면 근사화된 탐침 교정 방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\ll a, p \gg_{S_M} \approx P(\overline{r_0}) \tag{19}$$

식 (19)식의 결과는 [1-3]에 제시된 근사 탐침 교정 방정식과 유사하다. 만약 AUT와 탐침에서 산란되는 전자장을 예측할 수 있으면 (18)식을 사용하여 탐침 교정 수행하며, 산란장을 알 수 없는 경우에는 (19)식을 사용하여 탐침 교정 수행한다.

▌참 고 문 헌▐

[1] W. M. Leach and D. T. Paris, "Probe-compensated near-field measurements on a cylinder," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.21, No.4, pp.435 - 445, 1973.

[2] D. T. Paris, W. M. Leach Jr., and E. B. Joy, "Basic theory of probe-compensated near-field measurements," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.26, No.3, pp.373-379, 1978.

[3] E. B. Joy, W. M. Leach, G. P. Rodrigue, and D. T. Paris, "Applications of probe-compensated near-field measurements," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.26, No.3, pp.379-389, 1978.

[4] C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design, 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1996.

[5] 류홍균, 조용희, "원통주사법을 이용한 안테나 근역장 측정 방법", 한국콘텐츠학회논문지, 제4권, 제2호, pp.28-35, 2004.

[6] 조용희, "로렌츠 상호작용 원리와 근역장-원역장 변환 공식을 이용한 안테나 극역장 측정 알고리즘 개선", 한국콘텐츠학회논문지, 제6권, 제2호, pp.51-58, 2006.

[7] H.-J. Li, T.-Y. Liu, and J.-L. Leou, "Antenna measurements in the presence of multipath waves," Prog. in Electromag. Research, Vol.30, pp.157-178, 2001.