

적응 퍼지 관측기를 이용한 비선형 시스템의 강인한 제어기 설계

Robust Adaptive Fuzzy Observer Based Control for Unknown Nonlinear Systems

류태영¹, 현창호¹, 김은태¹, 박민용¹

¹ 서울시 서대문구 연세대학교 전기전자공학부
E-mail: hapiten@yeics.yonsei.ac.kr

요 약

본 논문에서는 외란을 갖는 불확실한 비선형 시스템을 제어하기 위하여 H^∞ 제어를 이용한 강인 간접 적응 퍼지 관측기를 설계하여 상태변수를 관측하고 외란관측기를 설계하여 시스템의 외란을 제거하는 강인한 제어기를 구성한다. 제안된 외란관측기는 시스템과 외란의 대역폭보다 큰 궤환 이득을 가짐으로써 기존의 역플랜트 모델 또는 퍼지 기반의 외란관측기 보다 간단한 구조를 가지고 외란과 시스템 모델링 오차의 합을 관측해 낼 수 있다. 본 논문에서는 독립진자 시스템의 모의실험을 통하여 관측기, 외란관측기와 제어기의 성능을 평가한다.

Key Words : Nonlinear systems, Adaptive observer, Disturbance observer, Controller, Fuzzy modeling

1. 서 론

현대 제어 이론들은 알려진 동력학 방정식과 측정 가능한 상태변수를 기반으로 하고 있다. 그러나 실제 비선형 시스템에서 복잡한 동력학 방정식과 변수들을 얻기는 쉬운 일이 아니다. 따라서 관측 및 제어 안정성을 만족하는 적응 기법 등이 적용되고 있지만 알려진 동력학 방정식에 불확실한 변수들을 기반으로 다루고 있다. [2][3] 따라서 변수와 동력학 방정식을 모두 알 수 없는 비선형 시스템에서는 퍼지 적응 관측 및 제어가 많은 강점을 지니고 있다. FBF(Fuzzy Basis Function)는 컴팩트 집합에서 통합근사자로서 임의의 정도까지 비선형시스템을 근사화시킬 수 있기 때문에 불확실한 시스템의 모델로 사용될 수 있다.[6] 이러한 퍼지 시스템은 기존의 적응 및 강인 제어기법과 연계되어 변수 및 동력학 방정식을 모두 알 수 없어도 간단한 입력 또는 입출력 정보를 통하여 FBF로 근사화시키고 관측기 및 제어기로서 활용이 가능하다.[1][4] 본 논문에서는 알려진 비선형 시스템 기반에서 외란관측기를 제시하고 외란을 갖는 불확실한 SISO 시스템에 적용하기 위하여 FBF와 자유

변수(Free Parameter)를 이용하여 모델링한 후 리아프노프 함수를 통하여 관측기의 적응규칙을 유도하였고 H^∞ 추종제어 이론을 통하여 설계된 간접 적응 퍼지 관측기의 상태변수 추종 성능을 확인하였다. 또한 관측기를 통하여 유도한 FBF와 관측된 상태 변수를 기반으로 외란 관측기를 통하여 모델링 오차와 외란의 합을 관측하고 이를 이용한 강인한 CEC(Certainty Equivalent Controller)를 설계하여 시스템의 추종성과 안정성을 확인하였다.

2. 비선형 시스템의 퍼지 모델링

IF-THEN 규칙으로 표현된 퍼지 로직 시스템은 통합 근사자(Universal Approximator)로서 컴팩트 집합의 어떠한 비선형 시스템이라도 근사화를 통하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)은 불확실한 $f(x), g(x)$ 함수를 갖고 $u \in R, y \in R$ 을 각각 입력과 출력으로, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, \hat{x}, \dots, x^{(n-1)})^T \in R^n$ 을 상태변수로 갖는 n 차 SISO 비선형 시스템이다. $f(x), g(x)$ 의 입출력 정보를 알고 있다면 다음과 같은 퍼지 IF-THEN 규칙을 설정할 수 있다.

IF x_1 is $A_1^{l_1}, \dots$, and x_n is $A_n^{l_n}$, THEN \hat{f} is E^{l_1, \dots, l_n}
 IF x_1 is $B_1^{l_1}, \dots$, and x_n is $B_n^{l_n}$, THEN \hat{g} is H^{l_1, \dots, l_n}
 (2)

$l_i = 1, 2, \dots, p_i, i = 1, 2, \dots, n$ 이고 $f(x), g(x)$ 에 대해 x_i 는 각각 p_i, q_i 개의 퍼지 집합과 $\prod_{i=1}^n p_i, \prod_{i=1}^n q_i$ 개의 IF-THEN 규칙을 가지고 있다. 곱 추론엔진, 싱글톤 퍼지화, 중앙평균 비퍼지화를 이용하면 식(3)과 같이 $f(x), g(x)$ 를 퍼지 모델링 할 수 있다.

$$\mathcal{F}(X|\theta_f) = \frac{\sum_{l_1=1}^{p_1} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} \bar{y}_f^{l_1, \dots, l_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i))}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i))}$$

(3)

$$\mathcal{G}(X|\theta_g) = \frac{\sum_{l_1=1}^{q_1} \dots \sum_{l_n=1}^{q_n} \bar{y}_g^{l_1, \dots, l_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^{l_i}}(x_i))}{\sum_{l_1=1}^{q_1} \dots \sum_{l_n=1}^{q_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^{l_i}}(x_i))}$$

$\bar{y}_f^{l_1, \dots, l_n}, \bar{y}_g^{l_1, \dots, l_n}$ 는 자유변수이고 각각 $\theta_f \in R^{\prod_{i=1}^n p_i}, \theta_g \in R^{\prod_{i=1}^n q_i}$ 이다. 따라서 식(4)와 같이 표현된다.

$$\mathcal{F}(X|\theta_f) = \theta_f^T \xi(X), \quad \mathcal{G}(X|\theta_g) = \theta_g^T \eta(X)$$

(4)

$$\xi_{l_1, \dots, l_n}(X) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i))}$$

$$\eta_{l_1, \dots, l_n}(X) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{q_1} \dots \sum_{l_n=1}^{q_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^{l_i}}(x_i))}$$

3. 간접 적응 퍼지 관측기와 강인 제어기 설계

외란을 가지고 있는 불확실한 비선형 시스템의 $f(x), g(x)$ 를 식(4)와 같이 모델링하고 상태변수 관측오차를 없애는 자유변수 θ_f, θ_g 의 적응규칙을 갖는 관측기를 설계하고 실제 플랜트와의 모델링 오차와 외란을 외란관측기를 이용하여 제거하는 제어기를 구성하였다.

3.1 간접 적응 퍼지 관측기 설계

불확실한 $f(x), g(x)$ 를 갖는 비선형 시스템에 외란을 포함하여 식(5)와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B[f(x) + g(x)u + d] \\ y &= CX \end{aligned}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

시스템과 외란은 W 의 대역제한을 갖는다고 가정한다. 관측된 상태변수를 \mathcal{X} 라 하고 Riccati-like 식(7)을 만족하는 퍼지 관측기 식(6)을 구성한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}} &= A\mathcal{X} + B[\mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) + \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g)u - v] + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\mathcal{X}, \quad v = -\frac{1}{\gamma} B^T P e \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} P\Lambda + \Lambda^T P + Q + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma}\right) PBB^T P &= 0 \\ Q \geq 0, B^T P &= C, 2\rho^2 \geq \gamma \end{aligned}$$

(7)

여기서 γ, \hat{g} 는 \mathcal{X} 를 이용한 식(4)의 퍼지모델이고 v 는 외란의 영향을 줄이기 위한 H^∞ 제어 입력이다. 최적 변수는 식(8)과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_f^* &= \arg \min_{\theta_f} \left[\begin{matrix} s & u & p \\ x, & \hat{x} & \end{matrix} \mid \mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) - f(x) \right] \\ \theta_g^* &= \arg \min_{\theta_g} \left[\begin{matrix} s & u & p \\ x, & \hat{x} & \end{matrix} \mid \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g) - g(x) \right] \end{aligned}$$

(8)

식(8)을 이용한 $\mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f^*), \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g^*)$ 는 $f(x), g(x)$ 의 최적 근사자로 사용될 수 있다. 이때 최소 근사 오차는 식(9)와 같다.

$$w_1 = f(x) - \mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f^*) + [g(x) - \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g^*)]u$$

(9)

식(5)에서 식(6)을 빼면 관측오차는 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \Lambda e + B[(\theta_f^* - \theta_f)^T \xi(\mathcal{X}) + \theta_g^* - \theta_g)^T \eta(\mathcal{X})u + v + w] \\ w &= d + w_1, \quad \Lambda = A - LC \text{ (Strictly Herwitz)} \end{aligned} \quad (16)$$

(10)

적응규칙을 얻어내고 관측오차를 최소화하기 위하여 리아프노프 후보함수를 정하고 미분하면,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma_1} (\theta_f^* - \theta_f)^T (\theta_f^* - \theta_f) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_2} (\theta_g^* - \theta_g)^T (\theta_g^* - \theta_g) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, P^T = P \geq 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T (P\Lambda + \Lambda^T P - \frac{2}{\gamma} PBB^T P) e + e^T P B w \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} (\theta_f^* - \theta_f)^T (\dot{\theta}_f + \gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X})) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2} (\theta_g^* - \theta_g)^T (\dot{\theta}_g + \gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u) \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 식(13)과 같은 적응 규칙을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_f &= -\gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X}) = -\gamma_1 (y - \hat{y}) \xi(\mathcal{X}) \\ \dot{\theta}_g &= -\gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u = -\gamma_2 (y - \hat{y}) \eta(\mathcal{X})u \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)의 적응규칙과 Riccati-like식(7)을 이용하면 식(14)와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T (P\Lambda + \Lambda^T P - \frac{2}{\gamma} PBB^T P) e + e^T P B w \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} B^T P e - \rho w \right)^T \left(\frac{1}{\rho} B^T P e - \rho w \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho^2 w^2 \leq -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{2} \rho^2 w^2 \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 적분하면 $V(T) \geq 0$ 이므로

$$\int_0^T e^T Q e dt \leq V(0) + \rho^2 \int_0^T w^2 dt \quad (15)$$

$V(0) \geq 0, \rho^2 > 0$ 인 상수 이므로 식(15)는 매우 작은 ρ^2 와 제한된 d , 상태변수를 가정하고 $|\theta_f| \leq M_f, |\theta_g| \leq M_g$ 로 변수의 크기를 식(16)의 프로젝션에 의하여 제한시키면 원하는 정도의 H^∞ 추종제어 성능을 만족시킬 수 있다.[4]

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} -\gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X}) \\ \text{if } |\theta_f| < M_f \text{ or } |\theta_f| = M_f, e^T P B \xi(\mathcal{X}) \geq 0 \\ P[-\gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X})] \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u \\ \text{if } |\theta_g| < M_g \text{ or } |\theta_g| = M_g, e^T P B \eta(\mathcal{X})u \geq 0 \\ P[-\gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u] \\ \text{if } |\theta_g| = M_g \text{ and } e^T P B \eta(\mathcal{X})u < 0 \end{cases}$$

$$P[-\gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X})] = -\gamma_1 e^T P B \xi(\mathcal{X}) + \gamma_1 e^T P B \frac{\theta_f \theta_f^T \xi(\mathcal{X})}{|\theta_f|^2}$$

$$P[-\gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u] = -\gamma_2 e^T P B \eta(\mathcal{X})u + \gamma_2 e^T P B \frac{\theta_g \theta_g^T \eta(\mathcal{X})u}{|\theta_g|^2}$$

3.2 외란 관측기를 이용한 강인한 제어기 설계

3.1절에서 설계한 퍼지 적응 관측기를 기반으로 외란 관측기를 설계하고 제어기에 적용하였다. 식(5)의 외란을 가진 비선형 플랜트는 식(17)과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B[\mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) + \Delta f(x) + (\mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g) + \Delta g(x))u + \\ &= AX + B[\mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) + \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g)u + d_i] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - \mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f), \quad \Delta g(x) = g(x) - \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g) \\ d_i &= \Delta f(x) + \Delta g(x)u + d \end{aligned}$$

식(17)의 n행만 계산하면 다음과 같다.

$$\dot{x}^{(n)} = \dot{x}_n = \mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) + \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g)u + d_i \quad (18)$$

모델링 오차와 외란을 모두 고려한 d_i 를 알아내기 위한 외란관측기는 식(19)와 같다.

$$\dot{x}_{do} = \mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f) + \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g)u + d_{do} \quad (19)$$

d_{do} 는 d_i 를 관측하기 위한 입력이고 $\mathcal{F}(\mathcal{X}|\theta_f), \mathcal{G}(\mathcal{X}|\theta_g), u$ 는 3.1절의 관측기에서 얻어낸 결과다. 식(18)에서 식(19)를 빼면 식(20)과 같다.

$$(x_n - x_{do}) = d - d_{do} \quad (20)$$

외란관측기 입력 $d_{do} = k_{do}(\hat{x}_n - x_{do})$ 로 정하면 3.1절에서 $t \rightarrow \infty$ 에 따라 $\hat{x}_n \rightarrow x_n$ 이므로 식(20)은 식(21)과 같이 정리된다.

$$e_{do} + k_{do}e_{do} = d_t \quad (21)$$

$$(e_{do} = \hat{x}_n - x_{do})$$

$k_{do} \gg W \geq \omega$ 인 k_{do} 를 정하면 식(21)은 다음과 같다.

$$\frac{E_{do}(S)}{D_t(S)} = \frac{1}{S + k_{do}} = \sqrt{\frac{k_{do}^2 + \omega^2}{(k_{do}^2 + \omega^2)^2}} \angle \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{k_{do}}\right) \approx \frac{1}{k_{do}} \angle 0 \quad (22)$$

식(22)의 라플라스 역변환에 의하여 총 외란은 식(23)과 같다

$$d_t = k_{do}(\hat{x}_n - x_{do}) = d_{do} \quad (23)$$

식(23)에서 측정된 총외란을 고려하면 y_m 을 추종하게 만드는 제어입력은 식(24)와 같다.

$$u = \frac{-\mathcal{F}(X|\theta_\rho) - K\overline{e}_m + y_m^{(n)} - d_{do}}{\mathcal{G}(X|\theta_g)} \quad (24)$$

$$\overline{e}_m = \begin{bmatrix} y - y_m \\ \dot{y} - \dot{y}_m \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - y_m^{(n-1)} \end{bmatrix}, K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{n-1}]$$

제어입력 식(24)를 제어하고자 하는 비선형 플랜트인 식(18)에 넣으면 식(25)와 같다.

$$e_m^{(n)} + k_{n-1}e_m^{(n-1)} + k_{n-2}e_m^{(n-2)} + \dots + k_1e_m = 0 \quad (25)$$

$$e_m = y - y_m = x - y_m$$

식(25)의 극점이 좌반면에 위치하도록 궤환이득 K 를 정하면 추종성능과 안정성을 만족하는 제어기를 설계할 수 있다.

4. 실험 및 분석

퍼지 적응 제어기를 이용한 강인 제어기 성능을 확인하기 위하여 식(26)의 독립진자 모델을 이용하였다. 상태변수의 관측오차와 외란관측기의 관측오차가 안정하게 수렴함을 확인할 수 있다. 또한 외란관측기가 있을 경우 안정하게 시스템을 제어함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \left(\frac{ml}{m_c + m}\right)x_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{\frac{4}{3}l - \left(\frac{ml}{m_c + m}\right)\cos^2 x_1} + \frac{\cos x_1}{m_c + m} u \end{aligned} \quad (26)$$

$$m_c = 1\text{kg}, m = 0.1\text{kg}, g = 9.8\text{m/s}^2, l = 0.5\text{m},$$

$$L = [4 \ 10]^T, K = [10 \ 15], X(0) = [0.1 \ 0]^T \text{rad}$$

$$\gamma = 0.001, \gamma_1 = 50, \gamma_2 = 1, k_{do} = 50, d = 0.5 \sin t$$

$$\begin{aligned} \mu A_1^1(x_i) &= \mu B_1^1(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2} \\ \mu A_1^2(x_i) &= \mu B_1^2(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2} \\ \mu A_1^3(x_i) &= \mu B_1^3(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2} \\ \mu A_1^4(x_i) &= \mu B_1^4(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2} \\ \mu A_1^5(x_i) &= \mu B_1^5(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2} \end{aligned}$$

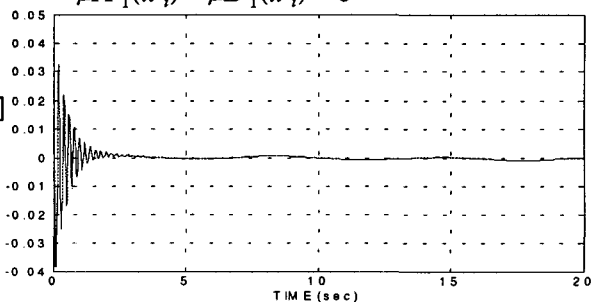


그림1. 상태변수 x_1 의 관측오차

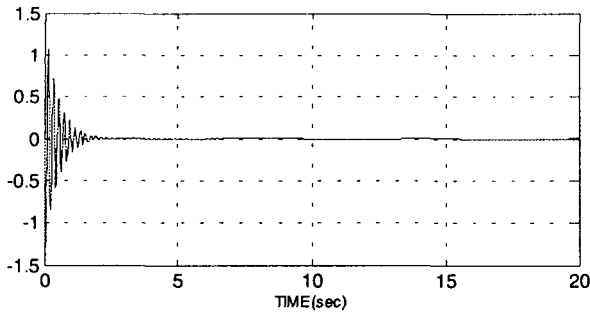


그림2. 상태변수 x_2 의 관측오차

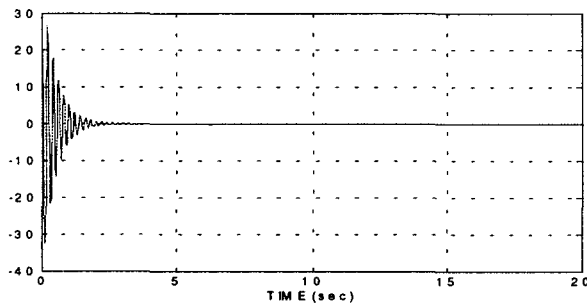


그림3. 외란관측기의 관측오차

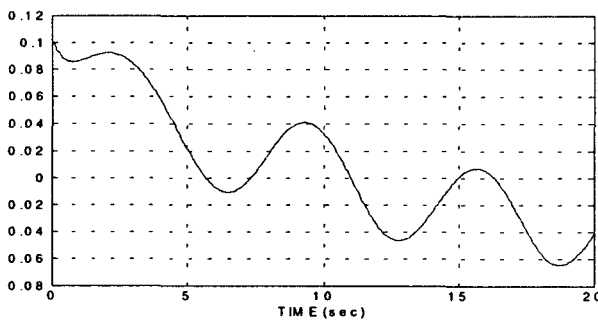


그림4. 외란관측기가 없을 경우 출력 y

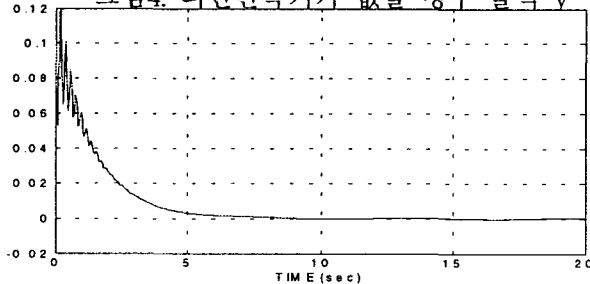


그림5. 외란관측기가 있을 경우 출력 y

5. 결론

본 논문에서는 퍼지 기저함수를 이용하여 불확실한 비선형 시스템을 모델링하고 관측오차를 줄이는 적응규칙을 유도하였다. 또한 외란관측기를 구성하여 모델링 오차 및 외란을 관측하고 제거하는 궤환 선형 제어기를 통하여 시스템의 안정성을 확보하였다. 본 논문에서 제시한 외란 관측기의 경우 상태변수가 측정 가능하고 시스템과 외란의 대역제한 보다 큰 외란관측기

궤환이득을 설정할 경우 기존의 외란 관측기 및 강인제어와 다르게 외란의 크기가 크고, 불확실한 시스템과 모델링 오차가 큰 경우에도 오차와 외란의 합을 관측해 낼 수 있는 장점이 있다. 실험 결과로부터 제시한 관측기의 성능과 외란 관측 성능, 제어기 성능이 우수함을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] L. X. Wang, A Course in Fuzzy Systems and control : Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1997
- [2] J. E. Slotine and W.Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991
- [3] P. A. Ioannou, J.Sun, Robust Adaptive Control, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [4] B. S. Chen, C. H. Lee, Y. C. Chang. "H Tracking design of Uncertain Nonlinear SISO Systems : Adaptive Fuzzy Approach" IEEE Trans, Fuzzy Systems, Vol. 4, No.1, pp.32-43, 1996
- [5] Y. Wang, T. Chai, "Output-Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems Using Adaptive Fuzzy Observer", Proceedings of the American Control Conference, 2005, 2613-2618
- [6] X. Zeng, M. G. Singh, "Approximation Theory of Fuzzy Systems-MIMO case," IEEE Trans. Fuzzy System, Vol.3, pp. 219-235, May 1995
- [7] T. Mita, M. Hirata, K. Murata, and H. Zhang, " H^∞ Control Versus Disturbance Observer Based Control," IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 45, pp. 488-495, June 1998.