

LMI를 이용한 불확실한 퍼지 시스템의 슬라이딩 모드 관측기 설계

Sliding Mode Observer for Uncertain Fuzzy System: An LMI Approach

송민국¹, 주영훈², 박진배¹

¹ 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {s5ngm2n9k, jbpark}@control.yonsei.ac.kr
² 군산대학교 전기정보공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문에서는 비선형 시스템의 슬라이딩 모드 관측기 설계에 대해서 논의한다. 제어 대상인 비선형 시스템을 모델링 하는데 있어서 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델 기법을 이용하였고, 이때 발생할 수 있는 모델 불확실성과 외란에 대해 그것의 최대 최소 범위를 안다고 가정하였다. 제안된 시스템의 LMI (Linear Matrix Inequality)를 기반으로 한 슬라이딩 모드 관측기 설계 방법에서는 관측기와 시스템의 차이를 슬라이딩 표면으로 설정한다. 안정한 슬라이딩 표면을 갖는 슬라이딩 관측기의 존재 가능성을 선형 행렬 부등식의 형태로 표현한다. 슬라이딩 모드 관측기 이득은 LMI 존재 조건의 해를 이용하여 구한다.

Key Words : Fuzzy modeling, sliding model, Non-linear system, Observer, LMI (Linear Matrix Inequality).

1. 서 론

슬라이딩 모드 관측기는 선형관측기와 달리 관측기에 비연속적인 요소를 추가하여 선형 관측기에 비해 시스템 잡음이나 모델링 과정의 오차에 강인하다. 비연속적인 요소는 관측기의 상태 궤적이 안정되게 설계하여야 한다. 대부분의 경우 슬라이딩 표면을 관측기의 출력과 시스템의 출력의 차이로 잡고 오차를 0으로 보내게 된다.

슬라이딩 모드 관측기는 여러 연구자들에 의해 연구되어 왔다[1-6] 특히 Edwards[2]에 의해 제안된 설계 기법은 먼저 상태 변환 행렬을 이용하여 가관측성 표준형 상태 공간 모델로 바꾸고, 적합한 슬라이딩 모드 관측기를 설계한다. Choi[6]에 의해서 상태변환 행렬을 사용하지 않고 시스템에서 바로 관측기를 설계하는 방법이 제안되었다. 이때 설계된 관측기는 비연속적인 요소에 독립적이고 제안된 LMI

(Linear Matrix Inequality) 조건의 해가 존재한다면 관측기가 안정함을 또한 증명하였다.

이에 본 논문에서는 제안된 설계 기법을 이용하여 시스템의 비연속적인 요소에 강인한 슬라이딩 관측기를 설계하고자 한다. 먼저 비선형 시스템을 수학적으로 T-S퍼지 모델[8-10]로 모델링 하는 과정을 설명한다. 모델링 과정에서 발생하는 오차와 시스템 잡음을 시스템의 비연속적인 요소로 표현하고, 비연속적인 요소에 독립적인 슬라이딩 모드 관측기를 설계하기 위해 몇 가지의 가정을 덧붙인다. 다음으로 정의한 수학적 모델에 기반 하여 슬라이딩 모드 관측기를 설계한다. LMI를 이용하여 안정한 슬라이딩 모드 관측기 존재성의 필요 충분 조건을 살펴본다. 임의의 비선형 시스템에 대하여 본 논문이 제안한 이론이 타당한지를 모의 실험한다.

2. Takagi-Sugeno 모델 기반의

퍼지시스템

Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델은 다음과 같은 퍼지 규칙을 사용하여 비선형 시스템을 나타낸다.

$$\text{Rule } i: \text{ IF } x_1 \text{ is } \Gamma_1^i, \dots, \text{ and } x_n \text{ is } \Gamma_n^i, \quad (1) \\ \text{ THEN } \dot{x}_i = A_i x + B_i u \quad (1 \leq i \leq c)$$

여기서 $\Gamma_h^i (h=1, 2, \dots, c)$ 는 i 는 전반부 변수의 퍼지 집합이며, c 는 퍼지 규칙의 개수를 표시한다. $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 입력이다.

비선형 시스템에 대한 T-S퍼지 모델은 아래처럼 유도 될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^c \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + D \xi(t, x, u) \quad (2) \\ y(t) = Cx(t)$$

여기서,

$$w_i(x(t)) = \prod_{h=1}^n \Gamma_h^i(x_h(t)), \mu_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^c w_i(x(t))}, \text{ 그}$$

리고 $\Gamma_h^i(x_h(t))$ 는 i 번째 전반부 변수 $x_h(t)$ 의 퍼지 집합 Γ_i 에 대한 소속등급이다.

가정 1 $A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}$

는 상수 행렬이라고 가정한다.

가정 2 행렬 C 와 D 는 full rank를 가지며, $p \geq q$ 라고 가정한다.

가정 3 함수 $\xi(t, x, u)$ 는 알지 못하지만 다음과 같은 경계 값을 가진다고 가정한다.

$\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + \beta(t, y)$ 여기서 r_1 는 스칼라 값이며, $\beta: R^+ \times R^p \rightarrow R^+$ 인 알려진 함수이다.

이러한 가정들은 Tan[3]이 사용한 가정과 동일하다. 퍼지 플랜트와 동일한 시스템 파라미터를 가지는 관측기를 설계하면 다음과 같은 퍼지모델 기반 관측기를 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^c \mu_i \hat{x}(t) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) - L(\hat{x}(t) - y(t)) + H v \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \quad (3)$$

여기서 $L \in R^{n \times p}$ 인 이득 행렬이고 $H \in R^{n \times p}$ 인 설계 파라미터이며 $\text{rank}(CH) = p$ 를 만족한다. 불연속적인 벡터 v 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mu = -\rho(t, x, u) \|F\| \frac{e_y}{\|e_y\|} \quad (4)$$

여기서 $e_y = \hat{y} - y = C\hat{x} - Cx$ 이고, F 는 나중에 명시한다. 스칼라 함수 $\rho: R^+ \times R^p \times R^m \rightarrow R^+$ 는 $\rho(t, x, u) \geq r_1 \|u\| + \beta(t, y) + \gamma_0$ 이고, γ_0 는 양의 스칼라 값이다. 추정 상태 오차를 $e = \hat{x} - x$ 로 유도하였으므로 오차 dynamics는 다음과 같다.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^c \mu_i(x(t)) (A_i - LC)e(t) + H v - D \xi(t, x, u) \quad (5)$$

$\text{rank}(CH) = p$ 는 유일한 등가 제어를 위한 필요조건이다. 슬라이딩 표면을 $e_y = 0$ 으로 제한한다.

3. LMI를 이용한 슬라이딩 모드

관측기의 존재 조건

정리 1. 오차 운동 방정식은 다음의 조건을 만족하는 행렬 P 가 존재한다면, $\xi(t, x, u)$ 와 무관하게 $e_y = Ce = 0$ 의 스위칭 표면을 안정한 슬라이딩 움직임을 보인다.

$$P > 0, \phi(PA_i + A_i^T P)\phi^T < 0, \phi P D = 0 \quad (6) \\ (i=1, \dots, c)$$

여기서 ϕ 는 행렬 C 의 영공간의 기저를 열벡터로 가지는 어떤 full rank 행렬이다.

증명: 변환 행렬 W 를 다음과 같이 정의한다.

$$W = \begin{bmatrix} \Theta \\ H(H^T H)^{-1} \end{bmatrix}.$$

여기서 Θ 는 $H^T \Theta = 0, \Theta^T \Theta = I$ 을 만족시키는 임의의 full rank 행렬이다. W 를 이용하여 e 벡터를 변환시키면 다음과 같다.

$$v = W e = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T \Theta \\ e^T H(H^T H)^{-1} \end{bmatrix}. \text{ 이를 이용하여}$$

여 다음의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ \text{여기서 } \begin{bmatrix} \Theta^T D \\ H(H^T H)^{-1} D \end{bmatrix} \xi(t, x, u) \quad (8)$$

여기서

$$A_{11} = \Theta^T \left(\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC \right) \Theta,$$

$$A_{12} = \Theta^T \left(\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC \right) H,$$

$$A_{21} = (H^T H)^{-1} H^T \Theta^T \left(\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC \right) \Theta,$$

$$A_{22} = (H^T H)^{-1} H^T \Theta^T \left(\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC \right) H.$$

스위칭 표면을 다음과 같이

$e_y = Ce = Cw^{-1}v = C\theta v_1 + CHv_2 = 0$ 으로 정하면, $\xi(t, x, u)$ 에 독립적인 스위칭 표면이 된다. 운동방정식 (8)에 우리가 정의한 조건 $\theta^T D = 0$ 을 대입하면 다음의 운동방정식(9)가 구해진다.

$$v_1 = [\theta^T (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC) \theta - \theta^T (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC) H (CH)^{-1} C \theta] v_1 \quad (9)$$

Choi[6]의 연구로부터 이 운동방정식(9)가 안정하려면 Riccati 부등식을 만족해야 한다.

$$R (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC) + (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC)^T P - PHH^T P < 0, P > 0, H^T P = GC \quad (10)$$

우리가 가정한 $C\phi^T = 0$ 을 대입하면

$$R (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC) + (\sum_{i=1}^c \mu_i A_i - LC)^T P < 0, \phi P H = 0$$

으로 줄일 수 있다. 따라서 정리 1의 식(6)을 만족하는 행렬 P가 존재한다면 $\xi(t, x, u)$ 와 무관하게 $e_y = Ce = 0$ 의 스위칭 표면을 따라 안정한 슬라이딩 움직임을 보인다.

정리 2. 다음의 LMI (Linear Matrix Inequality)의 조건이 만족되면 정리 1을 만족하는 행렬 P는 존재한다.

$$\begin{aligned} EXE^T + C^T Y C > 0, \quad (12) \\ EXE^T \sum_{i=1}^c A_i + C^T Y C \sum_{i=1}^c A_i - KC + * < 0, \\ X = X^T, Y = Y^T \end{aligned}$$

여기서 *는 전치요소를 나타내고, E는 D의 영공간의 기저를 열벡터로 하는 어떤 행렬이다.

증명: 정리 1의 조건에서 $P = EXE^T + C^T Y C$ 으로 정의하면 정리 2의 세 가지 조건을 모두 만족한다.

만약 정리 2가 만족되면 Edwors[3]의 결과에 정칙행렬 T를 이용하여 행렬 C, D를 다음과 같이 표현한다.

$$C_1 = CT^{-1} = [0, T_1, T_2], D_1 = TD = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2^T \end{bmatrix}$$

여기서 $T_0 = [0, T_1, T_2]$ 직교행렬이고, D_2 는 정칙 행렬이다. 이를 정리 1의 조건식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T^{-T} P T^{-1} &= P_0 \\ &= C_0^T Y_0 C_0 + (I - D_0 (D_0^T D_0)^{-1} D_0^T) X_0 \\ &\quad \times (I - D_0 (D_0^T D_0)^{-1} D_0^T) \end{aligned}$$

이 부등식에 Gahinet[7]의 결과를 이용하면 정리 2의 세 번째 조건에 의해 정리 1이 만족함을 알 수 있다.

보조 정리 1[6] 다음의 선형 행렬 부등식의 해가 존재할 경우 오차 운동방정식은 다음의 조건을 만족하는 행렬 P가 존재한다면, $\xi(t, x, u)$ 와 무관하게 $e_y = Ce = 0$ 의 스위칭 표면을 안정한 슬라이딩 움직임을 보인다. 이때 이득 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H &= (EXE^T + C^T Y C)^{-1} C^T \\ L &= (EXE^T + C^T Y C)^{-1} K, \quad F = D^T C^T Y \end{aligned}$$

4. 시뮬레이션

우리는 다음의 비선형 시스템에 대해 슬라이딩 모드 관측기를 설계할 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1 \sin x_3(t) + (x_1(t) + 1)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 1x_2(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 1x_2(t)x_2(t) + x_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \sin x_3(t) \\ y_1(t) &= (x_1^2(t) + 1)x_4(t) + x_2(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) + x_3(t). \end{aligned}$$

$x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ 는 가관측성을 갖는다고 가정한다. 다음의 퍼지 집합을 이용하여 시스템의 비선형 요소를 선형화 한다.

$$\Gamma_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$\Gamma_1^0(x_1(t)) = 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$\Gamma_1^0(x_3(t)) = \begin{cases} \frac{b \sin(x_3(t)) - \sin bx_3(t)}{x_3(t)(b - \sin b)}, & x_3(t) = 0 \\ 1, & x_3(t) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2^0(x_3(t)) = \begin{cases} \frac{b \sin(x_3(t)) - \sin bx_3(t)}{x_3(t)(b - \sin b)}, & x_3(t) \neq 0 \\ 1, & x_3(t) = 0 \end{cases}$$

퍼지 집합을 이용하여 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 표현한다. 퍼지 규칙은 다음과 같다.

Rule 1 : IF x_1 is Γ_1^1 and x_3 is Γ_2^1 ,
THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$
 $y(t) = C_1 x(t)$

Rule 2 : IF x_1 is Γ_1^1 and x_3 is Γ_2^e ,
 THEN $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$
 $y(t) = C_2x(t)$

Rule 3 : IF x_1 is Γ_1^e and x_3 is Γ_2^1 ,
 THEN $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$
 $y(t) = C_3x(t)$

Rule 4 : IF x_1 is Γ_1^e and x_3 is Γ_2^e ,
 THEN $\dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t)$
 $y(t) = C_4x(t)$

여기서 $x = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 이고,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1+a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\sin b}{b} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin b}{b} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1+a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\sin b}{b} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin b}{b} & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

출력 행렬은 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 다

음과 같이 정의하였다. $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 으로 표현한다.

가정 1, 2, 3과 정리 1, 2 보조정리 1에 의하여 다음과 같은 관측기 이득을 구하였다.

$$L = \begin{bmatrix} 36.5084 & 33.2680 \\ -282.0106 & -59.3010 \\ 115.1701 & 99.1182 \\ 253.0328 & 223.2599 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.0035 & -0.0035 \\ -0.0078 & 0.0275 \\ 0.0111 & -0.0110 \\ 0.0245 & -0.0242 \end{bmatrix}, F = [50.2651 \ 50.7245]$$

모의실험 결과는 그림 1에 보인다. 상기 그림에서 볼 수 있듯이 본 논문에서 제안한 슬라이딩 모드 관측기는 시간이 지남에 따라서 모든 오차 변수가 0에 접근함을 알 수 있다. 따라서 제안된 조건으로 설계된 슬라이딩 모드 관측기

는 안정하다.

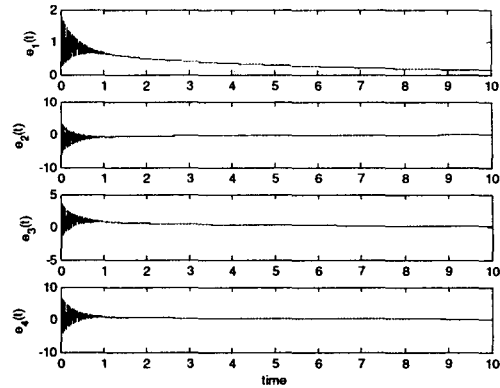


그림 1. 오차 상태 변수의 시간 응답

5. 결론

본 논문에서는 슬라이딩 모드 관측기의 설계 기법을 논의 하였다. 관측기 설계 문제를 제약 조건이 있는 선형 행렬 부등식의 형태로 표현 하였다. 선형 행렬 부등식의 해가 존재할 경우 설계된 슬라이딩 모드 관측기는 안정함을 증명 하였다. 제안된 설계 기법의 효용성을 일반적인 비선형 시스템의 모의실험을 통하여 확인 하였다. 추후 보다 일반적인 T-S 퍼지 시스템의 슬라이딩 모드 관측기 설계를 연구하는 것이 가치 있으리라 판단된다.

참 고 문 헌

- [1] B. L. Walcott, and S. H. Zak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems," IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 32, pp. 166-170, 1987.
- [2] C. Edwards, S. K. Spurgeon, "On the development of discontinuous observers," Int. j. Control, Vol 59, pp. 1211-1229, 1994
- [3] C. P. Tan, and C. Edwards, "An LMI approach for designing sliding mode observers," Int. J. Control, Vol 74, pp. 1559-1568, 2001
- [4] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," IEEE Trans. Automat. Control, Vol 22, pp.212-222,

1997

- [5] H. H. Choi, "Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems," *Automatica*, Vol 38, pp.335-341, 2002
- [6] H. H. Choi, "LMI-based sliding-mode observer design method," *IEE proc.-Control Theory Appl.*, Vol 152, pp. 113-115 , 2005
- [7] P. Gahinet, and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to h^∞ Control," *Int. J Robust Nonlinear Control*, Vol 4, pp.421-448, 1994.
- [8] K. Tanaka, T.Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, Vol 6, pp.250-265, 1998
- [9] T.Ta kagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Tran. Syst.*, Vol SMC-15, pp. 116-132, 1985
- [10] M.ASugeno and G. T.Kang, "Structure identification of fuzzy model," *Fuzzy Sets Syst*, Vol 28, pp. 15-33, 1988