韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 36회. 2006. 5. 163-172

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 36th. May. 2006. 163-172

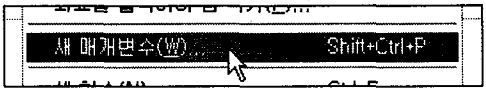
GSP의 대수적 활용

석 귀 용 (김해여자중학교)
전 제 동 (경남과학고등학교)
손 대 원 (진주외국어고등학교)
정 선 영 (통영여자고등학교)

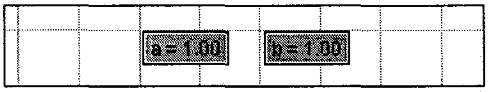
GSP는 중학교에서 평면기하 단원에서 삼각형의 오심 등의 기하단원을 지도할 때 아주 유용하게 사용되는 교구이다. 나아가서 고등학교에서 이차곡선 단원을 지도할 때 대수적인 계산을 이용해서 나타난 측정값들을 이용하면 이차곡선에 접하는 접선을 작도해볼 수 있다. 여기서는 대수적 계산을 통한 몇 가지 그래프를 그려보는 내용을 소개할까 한다.

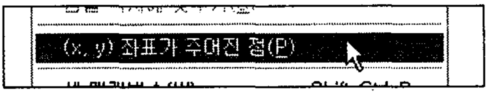
1. 매개변수

GSP3가 GSP4로 업그레이드되면서 매개변수라는 개념을 가져왔다. 매개변수를 이용해서 표현된 그래프나 측정값들은 매개변수의 값이 바뀔 때마다 변하는 것을 확인해볼 수 있다. 매개변수는 [그래프] 메뉴의 [새 매개변수]를 선택하면 나타난다.

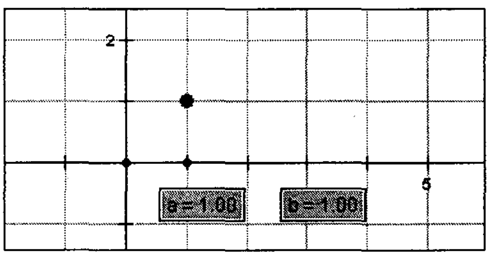


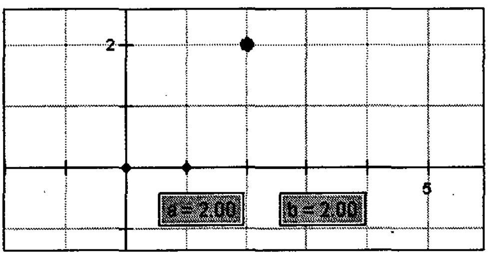
① 매개변수를 2개 만들고 하나를 a, 나머지를 b 라고 두자.





② 매개변수 a 와, 매개변수 b 를 순서대로 선택해서 [그래프] 메뉴의 [(x, y) 좌표가 주어진 점] 을 선택한다." 그러면 좌표평면에 (a, b)의 좌표가 나타난다.



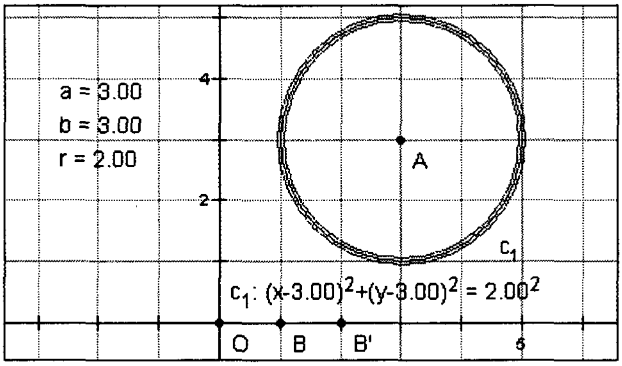


③ 매개변수 a 나, b 를 선택해서 키보드의 ⊞, ⊟ key를 눌러서 변화를 관찰해보자.

※ 위의 내용을 이용하여 수학과 교육과정의 어떤 자료를 만들어 볼 수 있을까?

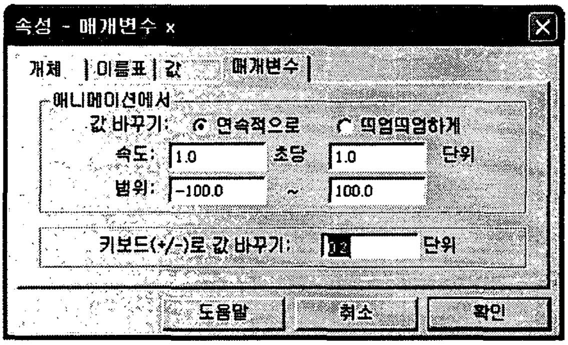
【수행평가 1】

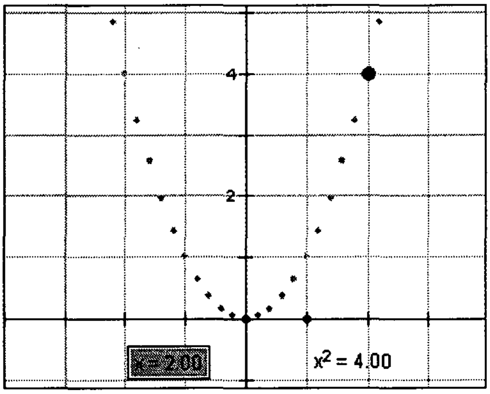
매개변수 a, b, r 을 만들고 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 나타내는 그림을 매개변수를 이용하여 나타내어라.1)



【수행평가 2】

매개변수 x를 만들고 [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 x^2을 계산하여 (x, x^2)의 좌표를 나타내어보자.2)



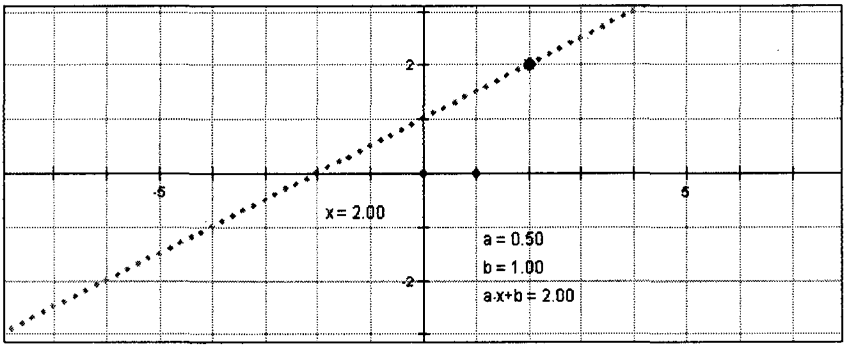


1) 원의 반지름은 선분OB′이고 점B′은 점O를 중심으로 매개변수 r의 배율로 점B를 닮음 변환하여 얻어진 점이다.

2) 매개변수를 선택하고 오른쪽 단축마우스를 클릭하면 "속성 메뉴"가 나타나는데 여기서 매개변수의 "+", "−" key에 대한 변화량을 조절할 수 있다. 기본적으로 매개변수의 변화량은 1로 정해져있으며 변화량을 0.2정도로 수정해서 관찰하면 대강의 $y=x^2$의 그래프를 알 수 있다.

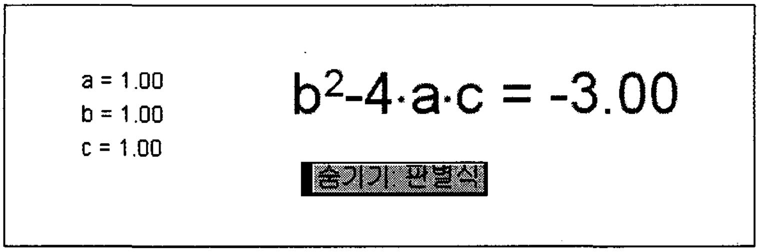
【수행평가3】

매개변수 a, b, x 를 만들고 [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 $ax+b$를 계산하고 $(x, ax+b)$의 좌표로 나타내어보자.



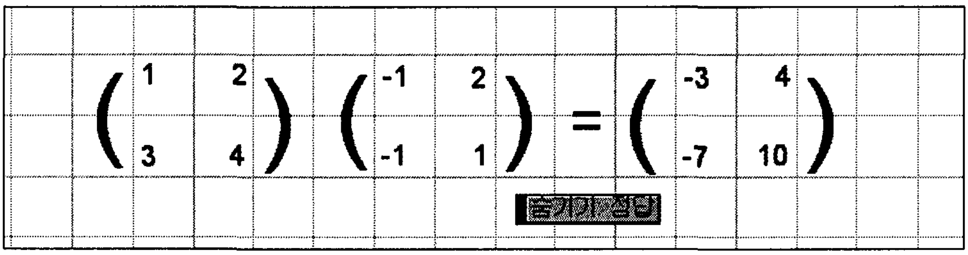
【수행평가4】

매개변수a, b, c를 만들고 [측정] 메뉴의 [계산]을 이용하여 이차함수의 판별식 D를 계산하고 매개변수 a, b, c의 변화에 대한 판별식의 값의 변화도 관찰하여라.



【심화】

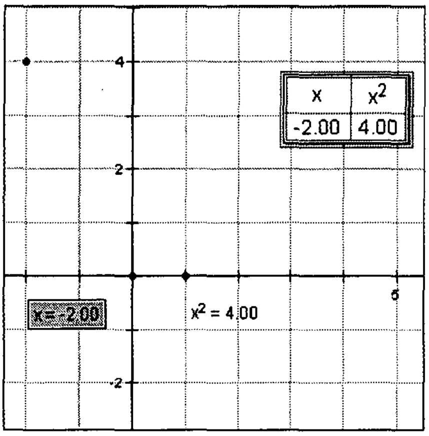
2×2 행렬A의 성분을 매개변수a, b, c, d, 2×2 행렬B의 성분을 매개변수e, f, g, h로 두고 [측정] 메뉴의 [계산]을 이용하여 행렬 A와 행렬B의 곱을 계산하여라.

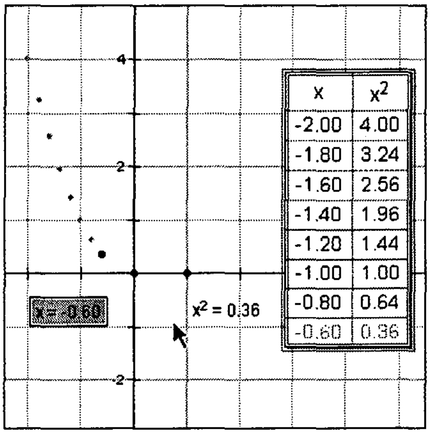


2. 표만들기

GSP는 매개변수와 매개변수들로 계산되어진 측정값들의 순간적인 계산값을 표로 나타내어주는 기능을 제공한다. 또한 표로 나타난 값들을 "직교좌표"와 "극좌표"로 나타내는 기능도 제공한다.

수행평가1 에서 매개변수 x와 계산된 x^2를 선택한 다음, [그래프] 메뉴의 [표 만들기]를 선택하면 x와 x^2을 선택한 순서대로 표가 나타난다. 매개변수 x만 선택해서 ⊕, ⊖ key로 변화시키면 표 안의 매개변수와 계산값만 바뀌어 나타나지만 매개변수 x와 표를 함께 선택해서 ⊕, ⊖ key로 변화시키면 매개변수와 계산값이 표에 누적되어 나타난다. 누적된 표를 선택하여 [그래프] 메뉴에서 [표의 자료로 점 찍기]를 선택하면 표의 데이터 값이 좌표평면에 나타난다.

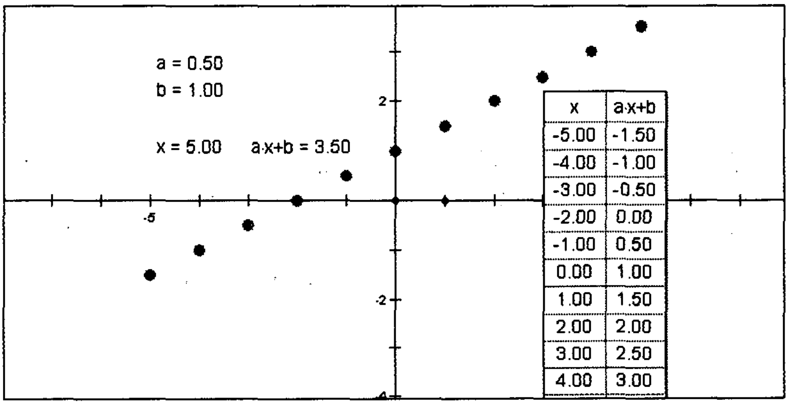




【수행평가】

수행평가2에서 매개변수 x와 계산값 $ax+b$를 이용하여 표에 매개변수 x와 계산값 $ax+b$이 누적되어 나타나도록 만들어서 나타내어보자.

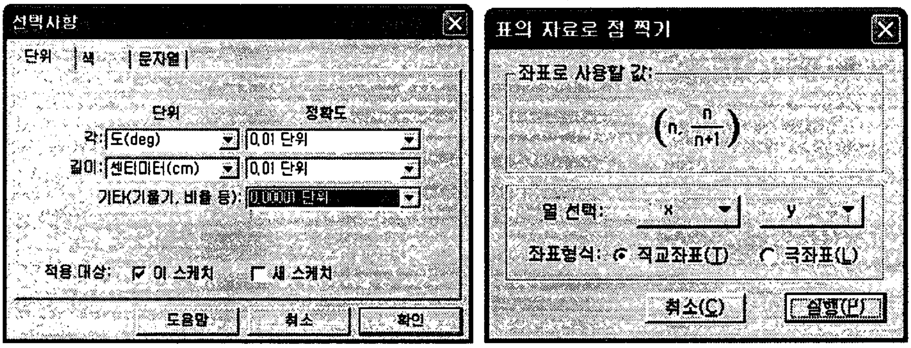
나타내어진 표를 선택하여 [그래프] 메뉴에서 [표의 자료로 점 찍기]를 선택해서 살펴보자.

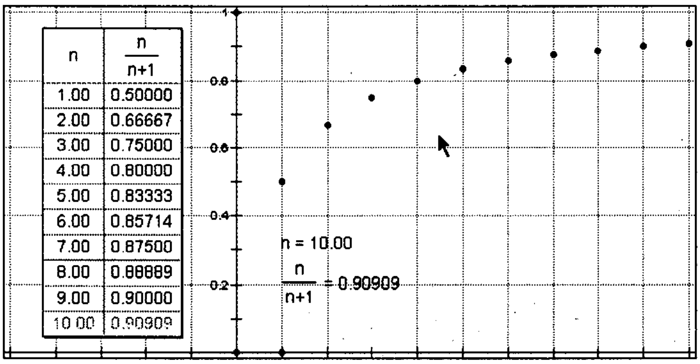


【수행평가】

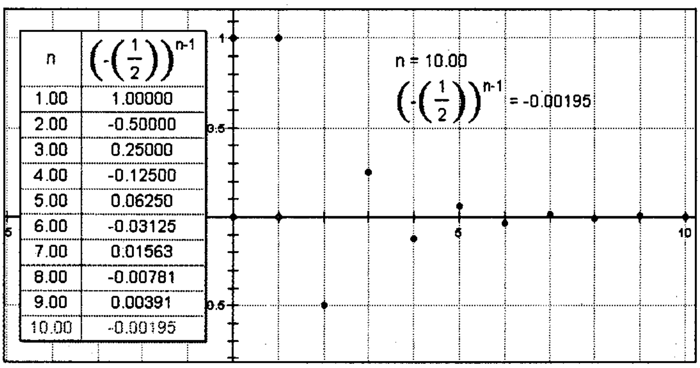
무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라 그 항의 값 a_n이 어떻게 변하는지 살펴보는 자료를 만들어 보자. 수열 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$에 대하여 n의 값에 따라 이들 수열의 항의 값이 변화되는 상태를 10번째 항까지 표로 만들어 "표의 자료로 점 찍기"를 활용하여 나타내어 보자.

수열 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$도 유한 번째 항까지 나타내어보자.





n	n/(n+1)
1.00	0.50000
2.00	0.66667
3.00	0.75000
4.00	0.80000
5.00	0.83333
6.00	0.85714
7.00	0.87500
8.00	0.88889
9.00	0.90000
10.00	0.90909



n	$\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n-1}$
1.00	1.00000
2.00	-0.50000
3.00	0.25000
4.00	-0.12500
5.00	0.06250
6.00	-0.03125
7.00	0.01563
8.00	-0.00781
9.00	0.00391
10.00	-0.00195

3. 매개변수를 이용한 무한 수열의 수렴과 발산

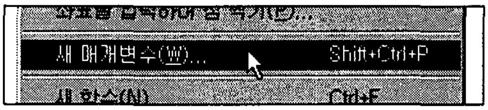
$\{c_n\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\{d_n\}$: $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, 1-\frac{(-1)^n}{n}$을 생각해보자.

위의 수열을 GSP4의 반복기능을 이용하여 좌표평면 위에 나타내어보자.

첫째 항 만들기

① [그래프] 메뉴의 [새 매개변수]를 선택한다.



② 새 매개변수창에서 매개변수의 이름을 "t[1]"에서 "n" 으로 변경하자. 그러면 n = 1.00 이 나타난다. (a_1 첫째 항 만들기)

③ [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 " $\frac{1}{n}$ "을 계산한다. 그러면 $\frac{1}{n} = 1.00$ 이 나타난다. ($a_1 = 1$ 첫째 항의 값 "1" 만들기)

④ n = 1.00 와 $\frac{1}{n} = 1.00$ 을 선택해서 "(x, y) 좌표가 주어진 점"을 선택한다.

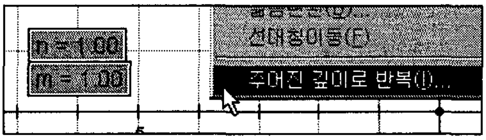
(" $a_1 = 1$의 기하학적 표현)

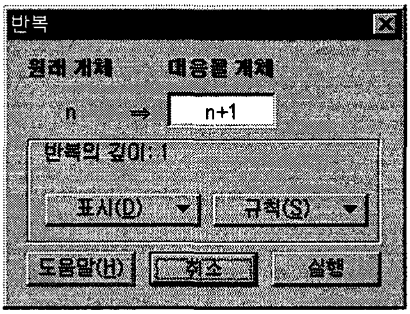
반복을 이용한 둘째 항 만들기

⑤ [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 " $n+1$"을 계산한다. 그러면 n+1 = 2.00 이 나타난다. (a_2 두 번째 항 만들기)

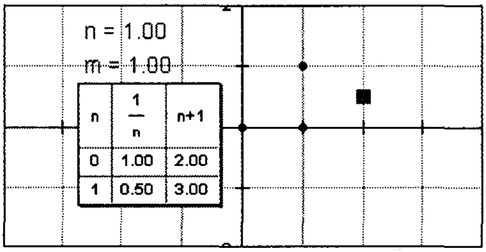
⑥ 새 매개변수창에서 매개변수의 이름을 "t[2]"에서 "m" 으로 변경하자. 그러면 m = 1.00 이 나타난다. (반복의 깊이 만들기)

⑦ n = 1.00 과 m = 1.00을 선택한 후 "Shift key"를 누른 상태에서 [변환] 메뉴의 [주어진 깊이로 반복]을 선택한다.

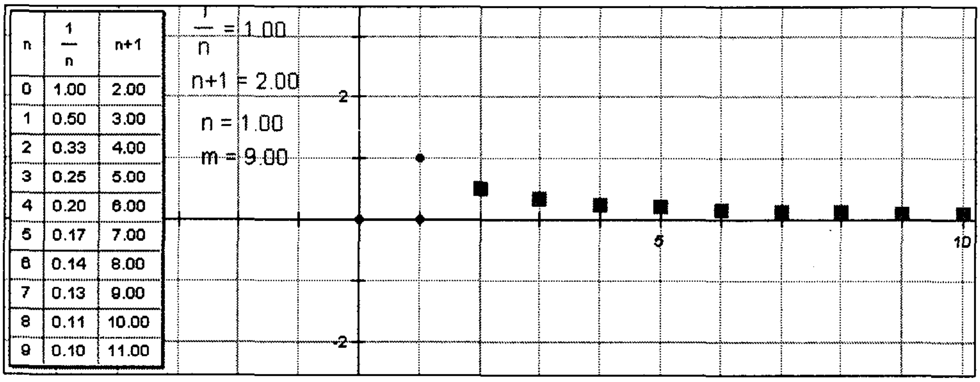




⑧ 반복창이 나타나면 마우스로 n+1 = 2.00 을 클릭한다. (반복을 이용한 다음 항 만들기)

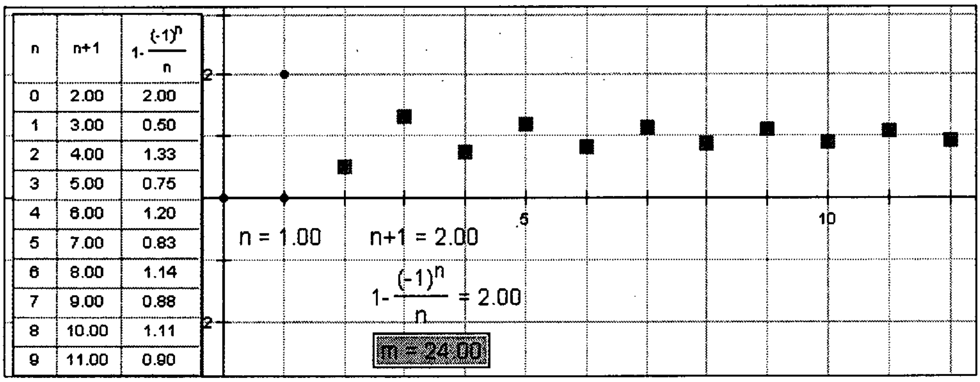


⑨ 여기서 m = 1.00 을 선택해서 ⊕ key와 ⊖ key를 눌러서 반복의 깊이를 변화시키면 수열 $\{c_n\}$의 일반항 $\dfrac{1}{n}$의 값이 0에 한없이 가까워지는 것을 표와 그래프를 통해서 살펴볼 수 있다.



【수행평가】

그림 위의 아이디어로 $\{d_n\}$: $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, 1-\frac{(-1)^n}{n}$을 생각해보자.



n	n+1	$1-\frac{(-1)^n}{n}$
0	2.00	2.00
1	3.00	0.50
2	4.00	1.33
3	5.00	0.75
4	6.00	1.20
5	7.00	0.83
6	8.00	1.14
7	9.00	0.88
8	10.00	1.11
9	11.00	0.90

이것을 활용한다면 매개변수의 깊이의 변화에 의해서 무한 수열이 "1" 에 수렴하는 것을 시각적으로 살펴볼 수 있다.

4. 매개변수를 이용한 무한급수의 수렴과 발산

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

먼저 주어진 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$의 부분합 S_n은

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 2$$

따라서, 이 무한급수는 2 에 수렴한다.

이것을 GSP4 의 반복기능을 이용하여 시각화 시켜보자.

첫째 항까지의 합 만들기

① 먼저 매개변수로 n = 1.00(첫째 항)과 S = 1.00(첫째 항까지의 합)을 만든다.

둘째 항까지의 합 만들기

② 두 번째 항을 만들기 위하여 [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 $\frac{1^n}{2} = 0.50$을 계산합니다.

③ 두 번째 항까지의 합을 만들기 위하여 [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 $S+\frac{1^n}{2} = 1.50$을 계산합니다.

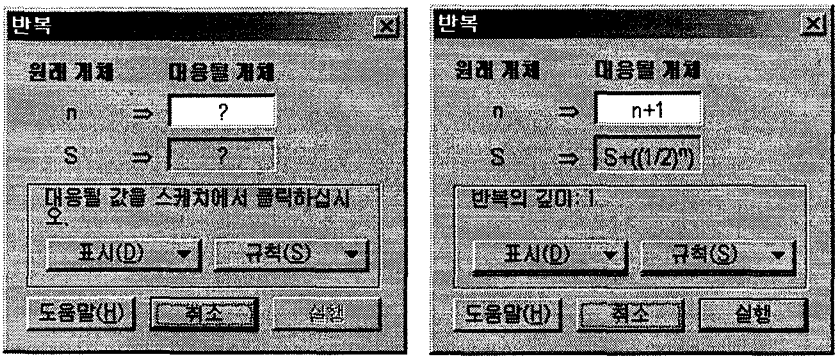
주어진 깊이로의 반복 만들기

④ 반복을 주기 위한 대응될 개체를 [측정] 메뉴의 [계산]을 선택해서 $n+1 = 2.00$을 계산합니다.

⑤ 반복의 깊이에 해당하는 매개변수 $m = 1.00$ 을 만든다.

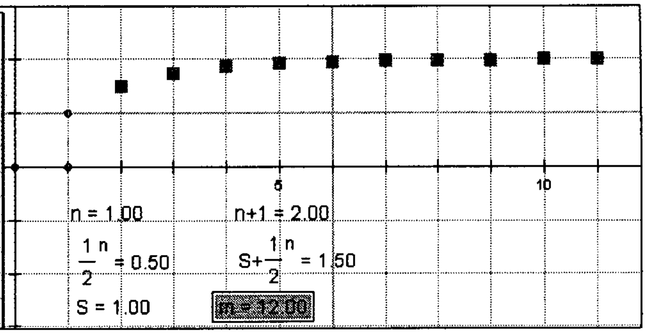
⑥ $n = 1.00$, $S = 1.00$(원래개체)와 $m = 1.00$(반복의 깊이)를 순서대로 선택하고 "Shift key"를 누른 상태에서 [변환] 메뉴의 [주어진 깊이로 반복]을 선택한다. (반복의 깊이에 해당하는 매개변수 $m = 1.00$ 를 맨 나중에 선택해야 한다.)

⑦ 반복창이 나타나면 원래 개체 "n"에 해당하는 대응될 개체 $n+1 = 2.00$ 을 "클릭"하고 원래 개체 "S" 에 해당하는 대응될 개체 $S+\frac{1^n}{2} = 1.50$ 을 "클릭"한다. (반복을 이용한 다음 항 만들기)



⑧ 여기서 $m = 1.00$ 을 선택해서 + key와 − key를 눌러서 반복의 깊이를 변화시키면 수열 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$의 값이 2에 한없이 가까워지는 것을 표와 그래프를 통해서 살펴볼 수 있다.

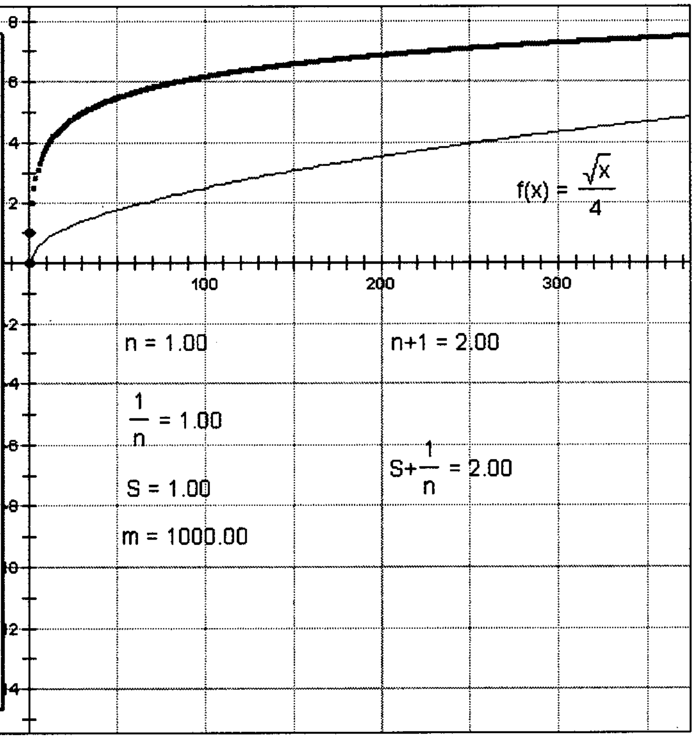
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$	n+1	$S+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$
0	0.50	2.00	1.50
1	0.25	3.00	1.75
2	0.13	4.00	1.88
3	0.06	5.00	1.94
4	0.03	6.00	1.97
5	0.02	7.00	1.98
6	0.01	8.00	1.99
7	0.00	9.00	2.00
8	0.00	10.00	2.00
9	0.00	11.00	2.00



【수행평가】

그림 위의 아이디어로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 을 GSP4의 반복기능을 이용하여 무한급수의 수렴, 발산을 생각해보자.

n	$\frac{1}{n}$	n+1	$S+\frac{1}{n}$
0	1.00	2.00	2.00
1	0.50	3.00	2.50
2	0.33	4.00	2.83
3	0.25	5.00	3.08
4	0.20	6.00	3.28
5	0.17	7.00	3.45
6	0.14	8.00	3.59
7	0.13	9.00	3.72
8	0.11	10.00	3.83
9	0.10	11.00	3.93
10	0.09	12.00	4.02
11	0.08	13.00	4.10
12	0.08	14.00	4.18
13	0.07	15.00	4.25
14	0.07	16.00	4.32
15	0.06	17.00	4.38
16	0.06	18.00	4.44
17	0.06	19.00	4.50
18	0.05	20.00	4.55
...	...	...	...
1000	0.00	1002.00	8.49



잘 알려진 대수적 증명 $S_{2^n} > 1+\frac{n}{2}$과 함께 " $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$"의 유한 번째 항까지의 합을 $y=\frac{\sqrt{x}}{4}$와 시각적으로 비교하여보자.