韓國數學敎育學會
<全國數學敎育研究大會 프로시딩>
제 36회. 2006. 5. 101-111

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 36th. May. 2006. 101-111

재량활동을 통한 수학도구제작

유 기 종 (안법고등학교)

Ⅰ. 서 론

제6차 교육과정과 달라진 제7차 교육과정의 변화 중 하나가 재량활동 시간이 도입되었는데 이 재량활동은 제7차 교육과정이 지향하고자 하는 하나의 수단으로 여겨진다.

고등학교의 재량활동은 10단계에서 이루어지고 있으며 '교과 재량활동'과 '창의적 재량활동'으로 나뉜다. '교과 재량활동'은 교과내용을 심화·보충하는 형태이지만 교과 성적에 반영이 되지 않기 때문에 각 학교의 여건상 일반 수업시간의 연장으로 활용하거나 혹은 수학재량활동시간에 수학적 경험을 쌓을 수 있는 수학적 소재가 별로 없기 때문에 각 학교에서 수학재량활동시간이 원래의 취지에 맞지 않게 운영되고 있는 이유이다.

우리는 '유클리드 작도'[1]를 바탕으로 수학도구[2]를 학생들이 직접 만들어 보고 작도 또는 제작 과정에 숨어있는 수학 내용을 문제로 제시하고 해결하는 수학재량활동을 소개하고자한다.

이런 수학재량활동은 '작도'하는 과정에서 수와 도형을 관계를 알고, 수학적으로 사고하는 능력을 향상시키고, 수학도구의 구조를 파악하고, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기를 수 있다.

이런 활동을 통해 만든 수학도구를 전시하여 더 많은 학생들에게 흥미와 관심을 갖게 하고 좋은 작품을 만든 학생들에게 자신감을 주는 계기가 될 것이다.

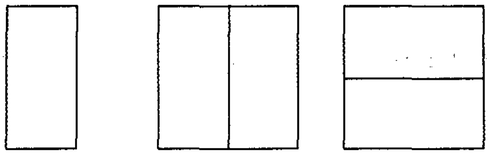
Ⅱ. 본 론

학생들에게 수학적 호기심과 수학적 힘을 갖도록 하는 것이 교사의 중요한 일 중 하나인데 이런 저런 이유로 수학이라는 교과가 많은 다른 학문의 기저에 있지만 그 역할을 제대로 하지 못하고 있는 듯하다.

어느 대학교 미술교육학과 과제물로 제시된 문제를 보자.

변의 길이가 1×2인 직사각형 6개를 사용하여 높이는 2가 되도록 직사각형을 놓는 서로 다른 가지 수를 구하여라. 아래 그림은 직사각형 1개일 때는 1가지, 2개일 때는 2가지인 것을 보여주고 있다.

1) 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 유클리드 기하학에서 다루는 모든 도형을 그리는 것을 말한다.
2) 수학에 대한 흥미와 관심을 가질 수 있는 구체적 조작물을 말한다.



왜? 미술교육학과 과제물로 이 문제를 제시했을까? 사고훈련이 필요했거나 문제해결능력을 평가하기 위해서일 것이다. 그러나, 이 문제를 해결 위해 종이로 직사각형을 만들어서 문제를 해결하려고 시도한 학생들은 많지 않을 것이다.

중·고등학생이 다루는 도형이나 숫자의 나열은 규칙성과 일정한 패턴이 있는 것만 다루도록 되어 있기 때문에 직접 손으로 만지고 눈으로 보는 것이 어떤 규칙성과 패턴을 발견하는 좋은 수단이라 된다.

수학도구를 제작할 때, 단순히 제작만 하는 것이 아니라 수학도구의 구조를 알기 위해 제작과정에 숨어있는 수학 내용을 교사가 재가공하여 문제를 만들어 발문할 때 학생들은 더욱 더 지적 호기심을 갖게 된다.

다음은 재량활동을 이용하여 만든 수학도구 몇 가지를 소개하고자 한다.

1. 종이접기를 이용한 시어핀스키 피라미드 만들기

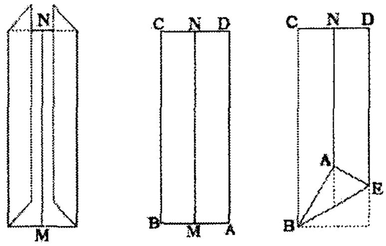
'시어핀스키 피라미드'는 '시어핀스키 삼각형'을 공간으로 확장한 것으로 고등학교 수 I (무한급수)에서 다룰 수 있는 내용이지만 특별한 지식이 없더라도 다룰 수 있고 이해할 수 있으며 보는 것만으로 지적호기심을 자극하는 아주 좋은 소재이다.

여기서 만들려는 시어핀스키 피라미드는 정사면체의 전개도가 없는 $A4$종이 한 장으로 정사면체를 만들 수 있는 장점이 있다.

[1·2단계] $A4$종이[3] 한 장을 준비하여 짧은 변을 4등분하여 안쪽으로 접는다.

[3단계] 꼭지점 A를 $\overline{MN}$ 위에 놓이도록 접는 후 $\overline{AE}$를 접는선 으로 하여 꼭지점 B가 $\overline{DE}$에 놓이도록 접는다.

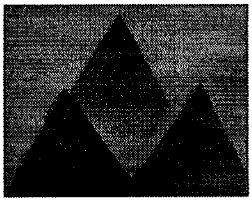
같은 방법으로 3번을 더 접은 후 AB, CD 부분을 끼워 정사면체를 만든 후 테이프를 이용하여 보완한다.



[1단계] [2단계] [3단계]

3) 가로, 세로의 비가 $1:\sqrt{2}$인 A시리즈, B시리즈의 종이는 효율적으로 제작하기 위한 비(比)임을 알게 한다.

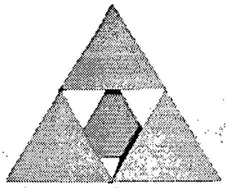
<그림 1>은 단계에 따라 만든 정사면체이다. 그리고, 이것을 모서리의 길이가 1인 정사면체 기본단위라 하자.

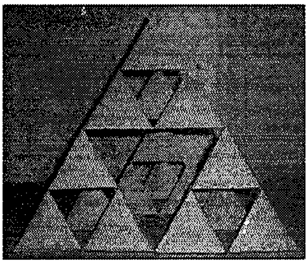

<그림 1>

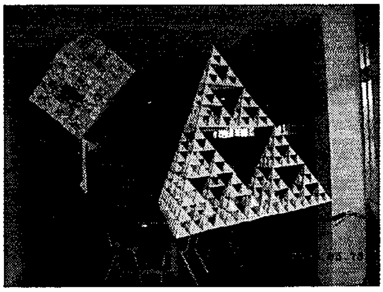
질문1-1) [3단계]에서 $\angle CBE = 60°$임을 보여라.

정사면체 기본단위 4개를 이용하여 <그림 2>와 같이 모서리의 길이가 2인 시어핀스키 피라미드를 만들고 <그림 2>와 같은 시어핀스키 피라미드 4개를 이용하여 <그림 3>과 같이 모서리의 길이가 4인 시어핀스키 피라미드를 만든다.

<그림 4>는 완성된 시어핀스키 피라미드를 학교 축제 때 현관에 전시한 사진이다.


<그림 2>


<그림 3>


<그림 4>

질문1-2) 모서리의 길이가 1인 정사면체로 만든 시어핀스키 피라미드 내부의 비어있는 부분의 부피 를 구하여라.

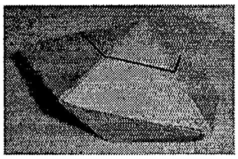
질문1-3) 모서리의 길이가 16인 시어핀스키 피라미드를 만들기 위한 정사면체의 개수를 구하여라.

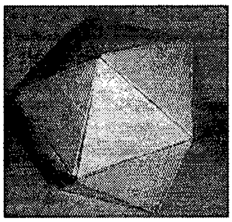
정20면체를 제대로 그리는 학생들이 별로 없다. 그 이유는 정20면체를 본 적은 있으나 사고영역에 형상화 되어 있지 않기 때문이다.

이제, 정사면체 기본단위 20개를 면끼리 이어 붙여 정이십면체를 만들고 몇 가지 문제를 해결해 보자.

<그림5>는 정사면체 기본단위 5개를 이어붙인 것[4]이고 <그림 6>는 정20면체의 완성된 모습이다.

질문1-4) 정 4면체의 각 모서리의 중점을 연결하여 절단하면 남는 입체는 몇 면체인가?


<그림 5>


<그림 6>

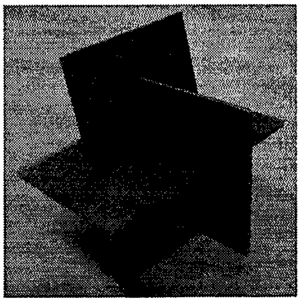
4) 윗 면의 실선은 종이접기를 하여 정사면체를 만들 때 생기는 것으로 모서리 길이의 절반과 같다. 이것을 잘 활용하면 절단면(切斷面)으로 만들어진 준다면체를 연구할 수 있다.

질문1-5) 정20면체의 각 모서리의 중점을 연결하여 절단하면 절단면이 만드는 입체를 생각하여 보자. 또, 정6면체, 정8면체, 정12면체를 같은 방법으로 할 때 생기는 입체를 생각하여 보자.

질문1-6) 정다각형의 모서리를 3등분하여 꼭지점에 가까운 점을 연결하여 절단할 때 생기는 입체를 생각하여 보자.

2. *xyz*-크로스 퍼즐(*xyz*-Cross Puzzle)5)

xyz-크로스 퍼즐([그림7])은 공간퍼즐의 일종으로 3개의 조각으로 이루어져 있다. 직사각형 혹은 직육면체의 중앙에 적당한 홈을 뚫어 기본단위라 하고 3개의 기본단위가 공간좌표를 연상시키는 x, y, z 축을 만든다.



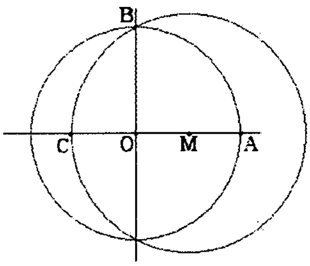
<그림 7>

그런데, 이 퍼즐의 기본단위를 가로, 세로의 비가 $2:1+\sqrt{5}$인 황금비율로 하면 3개의 직사각형 기본단위의 꼭지점은 정20면체의 12개의 꼭지점이 된다.

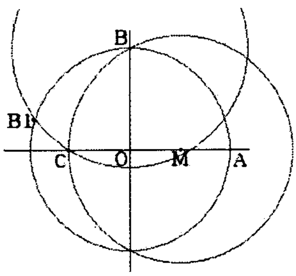
xyz-크로스 퍼즐을 작도하여 전에 정오각형의 작도 방법에 대하여 알아보자.

[1단계] 중심이 O이고 반지름이 $\overline{OA}$인 원을 그린 후 $\overline{OA}$의 수직이등분선의 작도하여 중점 M을 찾는다. 또, M을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{MB}$인 원을 그리고, 지름과 만나는 점을 C라 한다.

[2단계] B을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{BC}$인 원을 그리고 중심이 O인 원과 만나는 점을 B_1이라 한다.



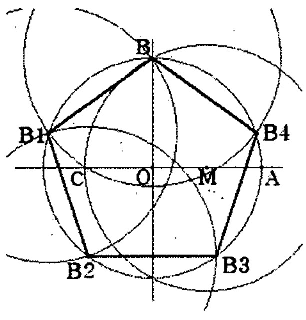
[1단계]



[2단계]

5) Cross Puzzle이란 가로, 세로 빈칸을 채우는 단어 맞추는 퍼즐로 널이 알려져 있어 여기서는 *xyz*-Cross Puzzle이라 부르기로 하겠다.

[3단계] B_1을 중심으로 하고 반지[3단계]름이 $\overline{B_1B}$인 원을 그리고 중심이 O인 원과 만나는 점을 B_2이라 한다. 같은 방법으로 원 O 위에 나머지 세 점 B_2, B_3, B_4를 찾은 후 다섯 개의 점 B, B_1, B_2, B_3, B_4을 연결하면 정오각형의 작도가 완성이 된다.

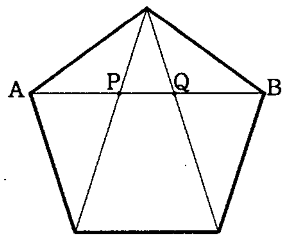


[3단계]

질문2-1) [1단계]에서 $\overline{OA}=2$일 때 $\overline{BM}$과 $\overline{BC}$의 길이를 각각 구하여라.

질문2-2) [3단계]에서 작도한 오각형이 정오각형임을 증명하여라.

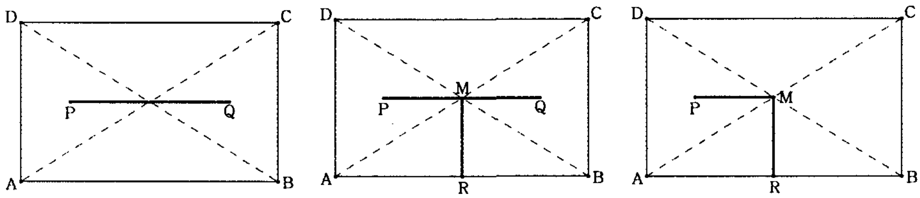
질문2-3) <그림 8>에서 정오각형의 대각선의 교점을 P, Q라 할 때, $\overline{AP}:\overline{PQ}$를 구하여라.



<그림 8>

질문2-4) 가로, 세로의 비가 $\overline{AP}:\overline{PQ}$인 직사각형을 작도하여라.

가로, 세로의 비가 $1+\sqrt{5}:2$인 황금직사각형(Golden Rectangle) 세 개를 두꺼운 종이 위에 작도한다.

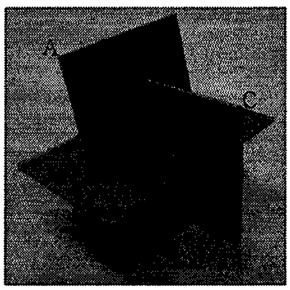


<그림 9>

<그림 9>과 같이 황금직사각형(Golden Rectangle)의 대각선의 교점 M에 대하여 $\overline{PQ}=\overline{AD}$, $\overline{MP}=\overline{MQ}=\overline{MR}$이 되도록 자른 후 *xyz*-크로스 퍼즐(*xyz*-Cross Puzzle)의 '직사각형 기본단위' 만들고 <그림 10>과 같이 퍼즐을 완성한다.

질문2-5) <그림 10>에서 $\triangle ABC$는 정삼각형임을 보이고 각 꼭지점을 실로 연결하여 생기는 입체는 무엇인지 생각하여 보자.

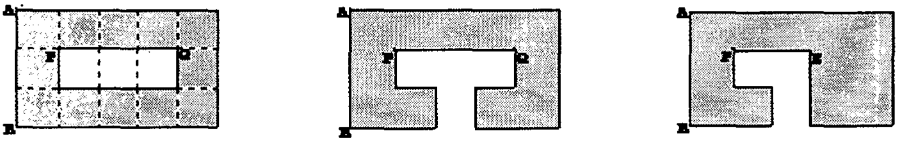
질문2-6) <그림 10>에서 *xyz*-크로스 퍼즐의 교점 M과 꼭지점 A, B, C을 실로 연결하여 생기는 입체는 무엇인지 생각하여 보자.



<그림 10>

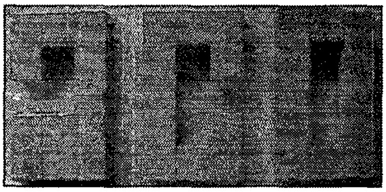
다음은 스티로폴 막대를 이용하여 xyz-크로스 퍼즐(xyz-Cross Puzzle)을 만들어보자.

적당한 크기의 스티로폴 막대를 잘라[6] 윗면의 모양이 <그림 11>과 같은 세 가지의 xyz-크로스 퍼즐(xyz-Cross Puzzle) 기본단위를 만든다.

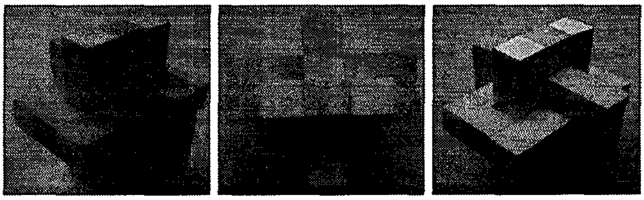


<그림 11>

[1단계] 스티로폴 막대 $1\times1\times1$ 크기 5개, $1\times1\times2$ 크기 1개, $1\times1\times5$ 크기 6개 만든다.
<그림 11>에서 선분 AB의 길이는 스티로폴 막대 3개를 붙여 놓은 것과 같다.
[2단계] 스티로폴 막대를 <그림 12>와 같은 모양으로 접착제를 이용하여 붙인 후 이 3개를 xyz-크로스 퍼즐(xyz-Cross Puzzle)의 기본단위라 하자.
<그림 13>은 3개의 기본단위를 이용하여 퍼즐을 완성한 것이다.



<그림 12>



<그림 13>

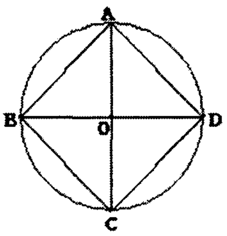
3. 데빌퍼즐(Devil Puzzle)

19세기 말에 독일에서 처음으로 만든 앙카 퍼즐(puzzle)의 일종 KOBOLD이다. 독일어 "KOBOLD"는 작은 마귀, 요정 혹은 개구쟁이 정도이지만 실루엣 퍼즐(silhouette puzzle)의 안에서는 가장 어려운 것이어서 악마(devil)란 이름을 붙였다. 우리나라에서는 데빌퍼즐(devil puzzle)로 알려져있다.

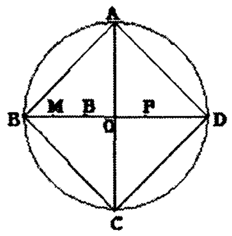
[1단계] 중심이 O인 원을 그리고 원의 중심을 지나는 서로 수직인 두 직선이 원과 만나 생기는 정사각형 ABCD를 작도한다.[7]
[2단계] 원의 지름 $\overline{BD}$를 3등분하여 차례로 E, F라 하고 $\overline{BE}$의 중점을 M이라 한다.

6) 스티로폴 막대를 칼로 톱질하듯 빠른 속도로 왕복하면서 자르면 매끄럽다.
7) 데빌 퍼즐의 작도는 두꺼운 종이 두 장를 붙여서 만드는 것이 좋지만 시간이 많이 걸릴 경우 우드락으로 만들어도 좋다.

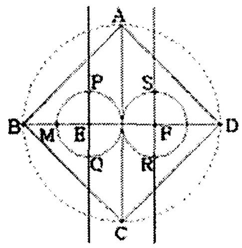
[3단계] 중심이 E, F이고 반지름이 $\overline{ME}$인 두 원을 그리고 원의 중심을 지나는 수직선이 두 원과 만나는 네 점 P, Q, R, S을 표시한다.



[1단계]



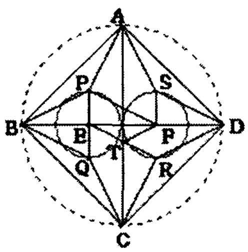
[2단계]



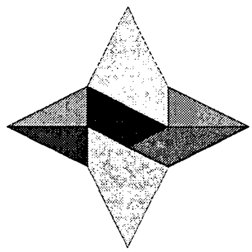
[3단계]

[4단계] 점 A, P, B, Q, C, R, D, S, A를 차례대로 연결한다.

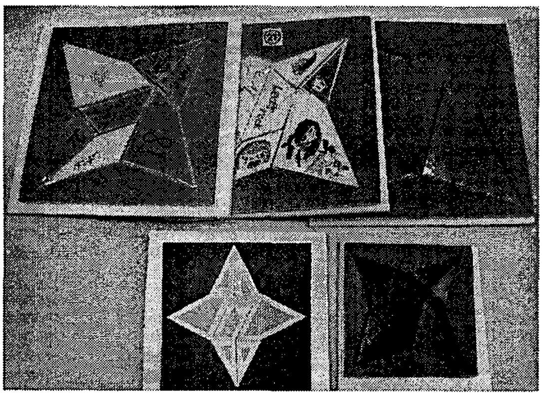
[5단계] $\overline{PF}$, $\overline{PE}$, $\overline{BE}$, $\overline{EQ}$, $\overline{ER}$, $\overline{SF}$, $\overline{DF}$를 각각 연결하고 $\overline{ER}$과 $\overline{AC}$의 교점 T와 점 F를 연결하면 데빌 퍼즐의 7개 기본단위를 완성한 것이다.



[4단계]


[5단계]

<그림 14>은 학생들이 만든 작품으로 완성한 퍼즐에 색깔을 입히거나 그림을 넣어 꾸몄다.


<그림 14>

질문3-1) 어떤 선분을 2등분하는 방법에 대하여 설명하여라.

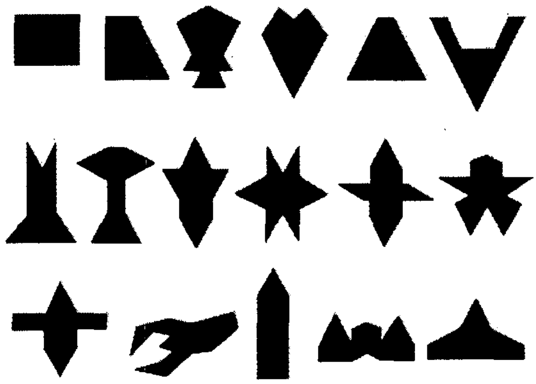
질문3-2) 어떤 선분을 3등분하는 방법에 대하여 설명하여라.

질문3-3) 삼각형 BEP의 각 변의 길이의 비를 구하여라.

질문3-4) 사각형 PETF는 등변사다리꼴인가? 아닌가? 그 이유를 설명하여라.

질문3-5) $\overline{PE}=1$일 때 $\overline{PF}$, $\overline{ET}$, $\overline{TF}$의 길이를 각각 구하여라.

질문3-6) <그림 15>의 실루엣(silhouette)를 완성하여라.



<그림 15>

4. The-F Puzzle

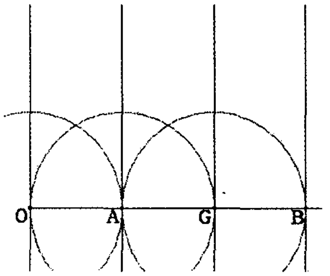
이 퍼즐은 글자퍼즐로 합동인 도형 3쌍을 기본단위로 하여 여러 가지 모양을 만들 수 있는 난이도가 높은 퍼즐이다.

[1단계] 반지름 $\overline{OA}=3\,\mathrm{cm}$인 원을 그리고 원의 중심을 지나는 직선을 그린 후 원과 만나는 점을 중심으로 하는 원을 그린다.8) 또, 원의 중심 또는 원과 직선의 교점을 지나고 $\overline{OB}$에 수직인 직선 4개를 작도한다.

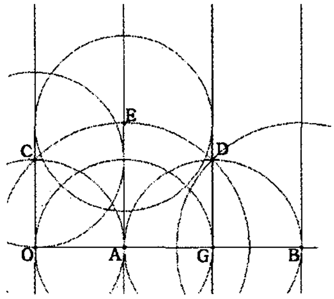
[2단계] 중심이 A, B이고 반지름이 $\overline{AC}$인 원이 중심 A를 지나는 수직선과 교점을 E이라 한다. 또, 중심이 C, E이고 반지름이 $\overline{OC}$인 원을 그린다.

[3단계] 반지름이 $\overline{EF}$이고 중심이 각각 E, D, G, H인 원 4개를 그린다.

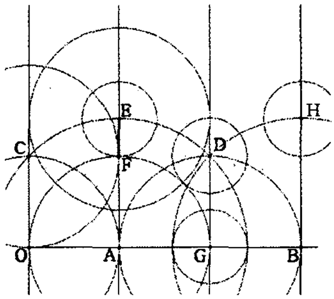
8) 이것은 임의의 선분을 3등분하는 것과 같다.



[1단계]



[2단계]

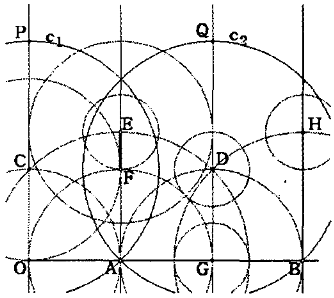


[3단계]

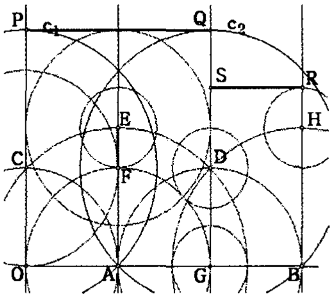
[4단계] 중심이 C, D이고 반지름이 $\overline{CA}$인 원 c_1, c_2를 그리고 $\overline{OC}$, $\overline{GD}$의 연장선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

[5단계] 중심이 H이고 반지름이 $\overline{EF}$인 원과 만나는 교점 R에서 $\overline{GD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 S라 하고 $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$를 연결한다.

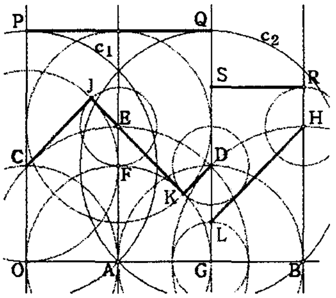
[6단계] 중심이 E, 반지름이 $\overline{EF}$인 원과 중심이 C, 반지름이 $\overline{CO}$인 원의 교점을 J라 하고 중심이 E, 반지름이 $\overline{CO}$인 원과 중심이 D, 반지름이 $\overline{EF}$인 원의 교점을 K라 한다. 또, 중심이 G, 반지름이 $\overline{EF}$인 원과 선분 GD의 교점을 L이라 한다.



[4단계]



[5단계]



[6단계]

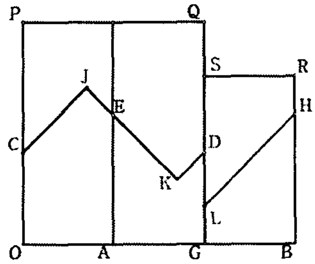
[7단계] <그림 16>과 같이 외곽선과 절단선 $\overline{CJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KD}$, $\overline{LH}$를 연결하고 <그림 17>과 같이 적당한 색깔을 칠한 후 자른 후 사용하면 된다.

이와 같이 'The-F 퍼즐'은 모두 여섯 조각으로 이루어져 있다.

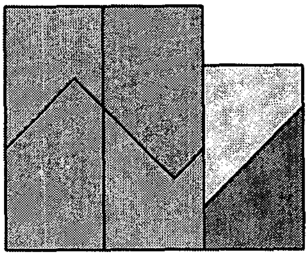
질문4-1) <그림 16>에서 $\overline{OC}:\overline{CP}$의 비를 구하여라.

질문4-2) <그림 16>에서 $\angle CJE$와 $\angle OCJ$를 각각 구하여라.

질문4-3) <그림 16>에서 $\overline{BH}$, $\overline{LH}$를 구하여라.



<그림 16>

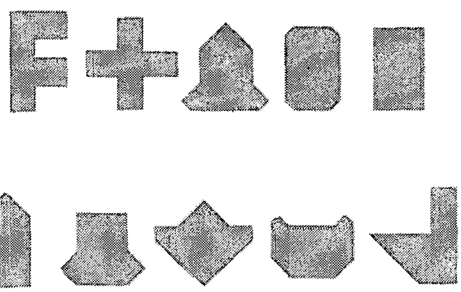


<그림 17>

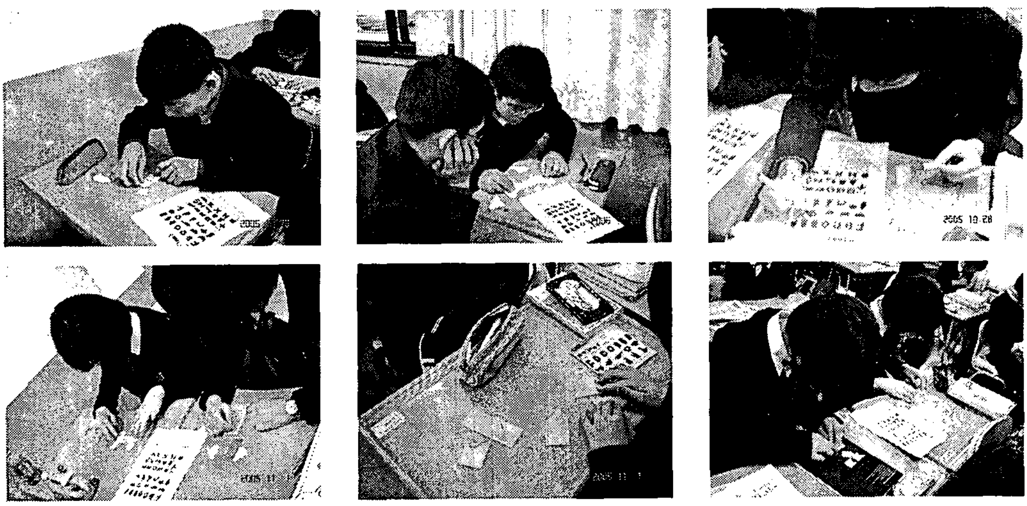
질문4-4) 'The-F 퍼즐'의 여섯 조각에서 서로 다른 변의 길이는 몇 가지인가?

질문4-5) 여섯 조각으로 <그림 18>의 실루엣(silhouette)를 완성하여라.

<그림 19>은 'The-F Puzzle'을 만든 후 기본 단위를 이용해 실루엣(silhouette)를 맞추고 있는 학생들의 교실활동 장면이다.



<그림 18>



<그림 18>

Ⅲ. 결 론

학생들과 하나의 수학도구를 만드는 시간은 대략 1시간정도 소요되는 것이 좋으며 개인적인 차를 고려하여 부족한 것은 방과 후 시간을 사용하는 것이 좋다. 특히, 데빌 퍼즐(Devil Puzzle)의 경우 직사각형 모양을 맞추는데 초보자들은 대략 1시간정도 걸리기 때문에 학생들이 실루엣(silhouette)퍼즐을 맞추는 시간을 2시간 가량 제공하여 많은 사고 훈련을 할 수 있도록 해야 한다. 그러한 훈련을 통해 학생은 집중력과 인내력을 향상시킬 수 있으며 교사는 학생들의 학습태도를 관찰할 수 있는 좋은 기회가 될 것이다.

또, 시어핀스키 피라미드의 경우 학생 개개인이 만든 하나의 정사면체가 모여 거대한 피라미드를 만들기 때문에 학생들은 협력학습을 경험하게 된다.

학교 교육에서 수학을 배우고 다시 사용할 수 있도록 학생들은 수학적 힘을 키우고 그것을 실생활에 적용할 수 있는 태도를 훈련할 필요가 있다. 그것은 교사의 행동에서 우선 비롯되어야 자연스럽게 학생들이 본받을 것이고 더 많은 학생들이 수학할 수 있는 경험을 미처 제공하지 못하는 것이 아닌가 생각한다.

교사의 생각, 행동에 따라 학생들에게 미치는 영향은 달라지기 때문에 교사의 수학하는 모습은 학생들에게 수학하는 기회를 제공하게 되고 그런 기회가 있어야 학생 스스로 자신을 계발하고 수학적 힘을 기르고 수학적 판단력을 함양하게 될 것이다.

모든 사물에 처음부터 흥미를 갖게 되는 것은 아니다. 우선 재미가 있어야하고 그 재미를 통해 수학적 내용에 대하여 관심 갖게 되고 문제를 해결하기 위한 수단을 익히는 과정을 겪어야 할 것이다. 교과시간엔 이런 활동을 하기에는 현실적으로 어려움이 많다. 그러기에 더욱 재량활동을 적극 활용하여 학생들에게 수학하기[9]를 통해 수학 이야기를 해줘야 할 것이다.

교사의 수학적 힘을 발휘하여 학생들에게 다양한 수학적 경험을 제공하는 것은 교사의 몫이라 생각한다.

참 고 문 헌

박윤범 · 박혜숙 외 3인 (2001), 중학교 수학 7-나, 서울: 대한교과서주식회사

최봉대 · 권길헌 외 5인 (1997), 수학Ⅲ, 서울: 대한교과서주식회사

http://www.mathink.org

http://www.mathfuture.com

http://user.chollian.net/~badang25/

---

9) 생각하기, 만들기, 문제풀기 등 수학과 관련된 활동을 말한다.