

탐구 지향적 토론식 수업의 실제

권 오 남 (서울대학교)

I. 서론

전통적으로 미분방정식은 교수가 몇몇 특정한 유형의 미분방정식의 해석적 해법을 제시한 뒤 학생은 제시된 동일 유형의 연습문제를 반복적으로 연습하는 방식의 수업을 통해 지도되어 왔다. 미분방정식의 응용에 관련된 문제는 생략되거나 극히 제한적으로 다루어져왔다. 미분방정식에 주요 개념과 관련된 정리는 명제만 제시되고 증명의 난이도로 인해 대체로 생략되는 경우가 많다. 이와 같은 지도방법은 자연현상을 모델링하기 위한 언어로서 발명된 미분방정식의 수학적 의미를 반영하지 못하고 있으며, 학생들의 문제해결적 사고 발달에 기여하지 못한다는 비판을 받아왔다. 이러한 맥락에서 본 연구는 1980년대 중반 Artigue와 Gautheron에 의해 제창된 미분방정식 교육개혁이 제시하는 교수학적 관점을 비판적으로 공유하면서 대학 수학교실에서 미분방정식을 보다 의미있게 지도할 수 있는 탐구지향적 수학 교수-학습 모델을 개발하는 것을 목적으로 하는 수업개발 연구의 일환으로 이루어졌다.

II. 개발 강좌의 내용과 특성

2.1 개발 강좌의 내용

미분방정식(微分方程式, differential equation)은 미지의 함수와 그 도함수간의 관계를 나타내는 방정식이다. 미분방정식에 대한 연구는 미적분학과 동시에 이루어졌으며, 특히 뉴턴이 외부의 힘과 그 힘을 받는 물체의 운동 간의 관계를 설정한 제 2운동 법칙을 만들면서 시작되었다. 오늘날에는 물리학뿐만 아니라, 화학·생물학·공학·경제학·경영학 등에 이르기까지 여러 분야에 널리 쓰이고 있으므로 미분방정식은 수학, 과학, 공학 등의 여러 분야에서 필수적이며 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

이 교과는 주어진 현상을 미분방정식(변화율방정식)으로 나타내는 방법, 해를 구하는 여러가지 방법, 그리고 구한 해의 해석에 초점을 두고 있다. 특히 미분방정식이 함수의 변화율과 함수와의 관계를 나타내고 있다는 학생들의 이해에 바탕을 두고 변화율방정식이라는 표현을 사용하였다. 미분방정식의 해를 구하는 방법은 그래프적(graphical), 수치적(numerical), 해석적(analytical) 방법을 포함하며, 1, 2차 미분방정식, 선형연립 미분방정식 등을 공부한다.

2.2 개발 강좌의 목표

일반적으로 미분방정식의 목표는 다양한 미분방정식들에 대한 다양한 해법을 이용하여 해를 구하는 것이다. 하지만 미분방정식은 역사적 배경에서 볼 때, 자연현상을 설명하기 위해 출현한 것으로, 단지 해법을 익혀서 해를 구하는 것만이 목표가 아니라 그 해를 해석함으로써 여러 자연현상에 적용하는 것이 목표라 할 수 있다. 따라서 다양한 미분방정식 해법을 목표로 학습하는 것은 미분방정식의 일부만을 학습하는 것이다. 이에 본 연구의 교과 목표는 다음과 같이 크게 두 가지로 나타낼 수 있다.

첫째, 학생들이 미분방정식의 기본 개념을 개념적으로 심도 깊게 이해하고 미분방정식을 해석하는 방법을 개발한다. 이 교과에서는 미분방정식의 개념을 반영하면서 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 실생활과 관련된 맥락 문제(contextual problem)가 연구팀에 의해 구성되어 학생들에게 제시되었다. 학생들은 이러한 문제를 이해하고 해결하면서 미분방정식의 핵심 개념들을 스스로 발견하고 자연스럽게 받아들일 수 있으며, 이러한 이해를 바탕으로 미분방정식과 그 해를 문제상황과 관련하여 해석할 수 있다.

둘째, 학생 각 개인에게 의미있는 해의 발견을 통하여 수학적 문제해결력을 기르고, 소그룹의 의사소통을 통하여 수학적 사고를 발달시킨다. 이것은 문제해결을 위한 수학적 토의, 자신의 수학적 사고를 설명하기, 다른 학생들의 수학적 사고를 이해하기, 그리고 수학적 정당화의 방법을 개발하기 등을 포함한다. 이러한 과정을 통하여 길러진 문제해결력과 수학적 개념에 대한 심도 깊은 이해를 바탕으로 학생들은 미분방정식의 해를 구하는 것에서 그치지 않고 미분방정식을 다른 학문이나 실생활에 관련시켜 생각할 수 있다.

2.3 적용한 교수법

본 미분방정식 수업에 적용한 교수법의 유형은 토의법으로 볼 수 있다. 일반적으로 토의법은 공동 학습의 한 형식으로써 학습집단을 일정한 조직으로 고정시키지 않고, 다양한 집단을 구성하여 여러 가지 학습자원을 매개로 토론을 전개하는 사회화된 학습형태이다.

토의학습에서는 학생들의 자유로운 토론을 통한 하나의 통합된 결론을 기대한다. 사실에 대해서 이론적으로 근거있는 내용을 다른 구성원들과 동등한 처지에서 발언하고, 그 내용을 서로 비판, 보충, 검토하여 서로의 의견 대립을 지양함으로써, 통합된 결론을 이끌어 내기 위하여 각자가 문제해결에 협력하려는 자세를 가져야 한다. 따라서 토의학습에서는 구성된 각자가 상호간에 대등한 입장에서 자기 의견을 발표하는 동시에 다른 사람의 의견을 경청할 수 있는 태도를 가지고 있어야 한다(배천웅, 이준욱, 최원형, 1996).

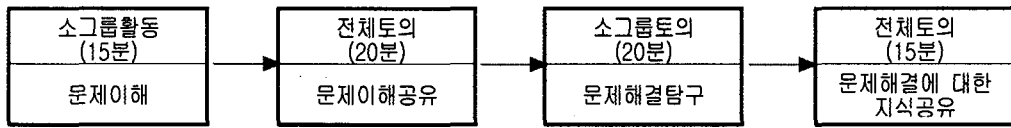
본 수업에서 이러한 형태의 교수방법은 학생들로 하여금 수학적 개념에 대한 사고를 공유하고, 서로 일치하지 않는 부분에 대해서는 질문과 토론 그리고 반박의 과정을 통하여 수학적 개념에 대한 정당화할 수 있도록 도우며, 교수자는 다양한 발문을 통하여 학생들의 사고의 유연성과 독창성을 자극하여 새로운 개념을 학습할 수 있도록 돕는 역할을 한다.

본 수업에서 토의의 자료로 제공된 활동지는 Realistic Mathematics Education(RME)의 주요 원리인 '안내된 재발명'의 원리에 근거하여 개발된 것이며, 이는 탐구가 가능한 맥락 문제들로 구성되어

있고, 다음은 이러한 형태의 토의학습이 이루어진 구체적인 과정과 개발된 활동지의 주요 원리인 안내된 재발명의 원리를 기술하였다.

2.3.1 탐구지향 토의학습

미분방정식의 수업방법은 3-5인의 그룹으로 이루어진 탐구학습과 토의학습으로 이루어진다. 개발된 활동지를 탐구하기 위한 수업 활동은 대체로 다음과 같은 과정으로 도식화할 수 있다. 활동지의 난이도에 따라 다음의 사이클을 한 차시 안에 2-3회까지 반복할 수 있다.



<그림 2.3-1> 미분방정식 교실 활동 과정

먼저 그 날 탐구할 활동지를 배포하면 학생들은 약 15분간에 걸친 소그룹활동을 통해 문제의 의미를 파악한 뒤, 이어 약 20분간 전체토의를 통해 문제의 의미를 공유한다. 문제의 의미가 공유된 후 학생들은 문제해결방법을 탐구하기 위해 다시 대략 20분간 소그룹토의에 들어가며, 소그룹토의 후 약 15분간의 전체토의에서 문제해결에 대한 지식을 공유한다. 학생들이 소그룹활동을 하는 동안 담당교수는 교실을 순회하며 학생들의 소그룹토의를 촉진한다. 전체토의에 대한 아이디어를 도출하고, 이러한 정보 하에 전체토의 과정에서 학생들의 사고를 안내하는 발문을 통해 학생들 스스로 수학적 개념을 재발명할 기회를 제공한다.

2.3.2 교수계열(instructional sequence)의 원리: 안내된 재발명

RME 이론은 네덜란드의 수학교육학자인 Freudenthal의 이론을 지지하는 사람들이 수십 년간 연구해온 수학교육의 한 사조로 ‘인간 활동으로서의 수학’이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 안내된 재발명, 점진적인 수산화, 수준 이론, 교수학적 현상학을 그 기본 원리로 삼고 있다(정영옥, 2000).

본 수업개발연구에 핵심적인 RME 이론의 교수학적 아이디어는 ‘점진적 수산화’를 통한 ‘안내된 재발명’이며 이 교수학적 원리는 맥락 문제의 활용과 사회적 상호작용에 기초한 ‘발생적 모델’을 통해 구현되었다. ‘수산화’란 비수학적 대상을 수학적 것으로, 또는 수학적으로 덜 발달된 대상을 보다 현저하게 수학적인 것으로 변환시키는 과정을 의미한다(Freudenthal, 1993). Treffers(1991)는 ‘점진적 수산화’를 ‘수평적 수산화’와 ‘수직적 수산화’로 세분하여 설명하고 있다. 수평적 수산화란 실제적인 문제상황에 내재한 수학적 관계를 추상화하여 유용한 수학적 도구와 연결함으로써 해결가능한 문제로 변환하는 과정이다. 수평적 수축화가 경험적 세계에서 기호적 세계로의 전이라면, 수직적 수축화는 기호적 세계에서 진행되는 수학적 수준의 비약이다. 점진적 수축화는 의미있는 수학적 개념의 구성에 있어 구체적 맥락속에서의 활동이 중심이 된다. 즉, 의미있는 수학 교수-학습은 학생들에게 경험적으로 그리고 수학적으로 실제적인 맥락 문제의 탐구를 통해 비형식적이고 구체적인 문제해결전략을 구성하는 것에서 출발해야함을 의미한다(Gravemeijer & Doormann, 1999).

또한 RME 교수설계이론의 핵심은 Freudenthal(1993)이 언급했듯이 수학은 “인간의 활동(human activity)”이라는 것이다. RME에서 중요한 것은 학습자가 한 단계의 수준에서 보다 높은 단계의 수준의 새로운 이해를 할 수 있도록 과제 순서를 조직하고 배열하는 것이다. 즉, 적절한 안내된 재발명의 과정을 거쳐 기호, 알고리즘, 그리고 정의를 더 잘 이해하게 되면서 수학적 과정에 도달하게 하는 것이다(Rasmussen & King, 2000). 따라서 본 교실에서는 교수에 의해 사전에 고안된 맥락 문제를 수록한 활동지가 학생들에게 제공되었고, 수학적 상호작용의 기반이 되었다. 또한 학생들의 탐구 활동은 단순히 주어진 문제의 답을 찾는 것에 그치지 않고 문제상황과 해법이 함축하고 있는 수학적 원리를 규명하는 것까지 확장되었다(권오남, 김영신, 2002).

교실에서의 발생적 모델은 사회적 상호작용에 기초한다. 본 교실에서는 일련의 미분방정식 해법이 제시되고, 분석적 방법을 포함한 다양한 수학적 방법의 적용을 통해 학생들의 미분방정식에 대한 개념적 이해를 지향하는 수업으로 구성되었다. 또한, 지도하고자 하는 미분방정식 개념을 반영하는 맥락 문제가 연구팀에 의해 구성되어 학생들에게 제시되고, 학생들은 소그룹토의와 전체집단 토의를 통해 문제를 해결하였다. 본 수업에서 교수는 학생들 자신의 수학적 활동과 토의를 통해 지도하고자 하는 수학적 아이디어가 재발견될 수 있도록 배려하는 역할을 담당했다. 교수는 소그룹토의 시간에 학생들 사이를 오가며 ‘수학적 토의’가 발전하도록 돕고, 그러한 상호작용 과정을 통하여 소그룹토의 이후의 전체토의에서 소그룹토의 결과인 수학적 의미를 공유하는 과정에 참여하는 것을 촉진하는 역할을 했다. 이러한 사회적 상호작용을 통하여 문제상황과 해법에 함축되어 있는 수학적 의미를 탐구하고 수학적 토의를 통해 학생 개개인의 수학적 의미를 조정하고, 공유된 수학적 의미를 확립해 나가는 것을 목표로 하였다.

III. 개발강좌의 실제

3.1 강의 구성

3.1.1 강의 설계

<표 3.1-1> 차시별 교수학적 과정 - 활동지를 중심으로

| 차시 | 날짜 | 소요 시간 | worksheet 제목 | 주요학습내용 |
|----|--------------|-------|-----------------------------|--|
| 1 | 09/02 (화) | 75분 | 01. 먹이사슬 | <ul style="list-style-type: none"> 강의소개 실생활 맥락 문제를 통한 연립미분방정식의 질적인 접근 |
| 2 | 09/04 (목) | 75분 | 02. 물고기 수의 그래프 | <ul style="list-style-type: none"> 일계자율미분방정식에서 해 함수그래프의 예측 미분방정식의 모델링 초기조건에 따른 근사해 그래프 |
| 3 | 09/16 (화) | 30분 | | (컴퓨터실 수업) |
| | | 45분 | 03-1. Tangent vector Fields | <ul style="list-style-type: none"> Java Applet을 통하여 일계 자율 미분방정식의 기술 가장 관찰 |

| 차시 | 날짜 | 소요 시간 | worksheet 제목 | 주요학습내용 |
|----|--------------|-------|--|---|
| 4 | 09/18 (목) | 25분 | 03-2. Tangent Vector Fields를 이용한 물고기 수의 예측 | (컴퓨터실 수업) · Java Applet을 통하여 일계 자율 미분방정식의 그래프 관찰 및 탐구 |
| | | 50분 | | |
| 5 | 09/23 (화) | 75분 | 04-1. 재원이와 다른이의 방법을 비교하기 | 일계 자율 미분방정식에서 · 근사해와 정확한 해의 비교 · 변수분리법을 통한 해석적 접근 |
| 6 | 09/27 (토) | 150분 | 04-2. $\frac{dP}{dt} = 0.3P(1 - \frac{P}{12.5})$ 를 이용한 사슴수의 예측 | 복잡한 일계 자율 미분방정식의 · 질적 접근과 해석적 접근 · 다양한 시간 단위에 대한 근사해의 그래프 · 해 그래프의 관찰과 평형해의 분류 |
| 7 | 09/30 (화) | 75분 | 04-3. 곤충수의 예측 -일반화 | · 일계 자율 미분방정식에서 오일러 방법에 의한 근사해법의 알고리즘 |
| | | 35분 | | |
| 8 | 10/07 (화) | 90분 | 05-1. Preposed Paths of Descent | (컴퓨터실 수업) · Java Applet을 통하여 하강하는 비행기 높이를 예측하기 위한 해의 탐구 |
| 9 | 10/09 (목) | 75분 | 05-2. 유일성정리(The Uniqueness Theorem) | · 일계 미분방정식에서 해의 존재성과 유일성정리 |
| 10 | 10/14 (화) | 60분 | 06. 점박이 올빼미 | · 초기조건에 따른 해의 장기적 예측 |
| | | 20분 | 07-1. fish.com 경영안 | · 매개변수에 따른 해함수의 탐구 · 위상선(flow line)과 분기도 (bifurcation diagram) |
| 11 | 10/21 (화) | 50분 | 07-2. 매개변수가 해 집합에 주는 영향 | · 매개변수를 포함한 일계 자율 미분방정식의 해함수와 분기도 |
| | | 30분 | 08. Salty Tank | · 일계 선형 미분방정식의 모델링과 이에 대한 해석적 접근 |
| | 10/23 (목) | 180분 | 중간고사 | |
| 12 | 11/04 (화) | 65분 | 08. Salty Tank | |
| | | 40분 | | |
| 13 | 11/06 (목) | 55분 | 09. Cooling Coffee | · 구체적인 자료로부터 일계 자율 미분방정식의 모델링 |
| | | 30분 | Warming up | · 연립미분방정식에 대한 간단한 맥락 문제 탐구 |
| 14 | 11/11 (화) | 30분 | | |
| | | 120분 | 10-1. Spring-Mass investigation | · 용수철 운동의 위치-속도 그래프의 예측 · 선형연립 미분방정식의 모델링 |
| 15 | 11/20 (목) | 10분 | | |
| | | 100분 | 10-2. A Swaying Skyscraper | · 비선형연립 미분방정식의 해에 대한 질적 접근 |

| 차시 | 날짜 | 소요 시간 | worksheet 제목 | 주요학습내용 |
|----|--------------|----------|--|--|
| 16 | 11/25 (화) | 120분 | 10-3. Further Spring-Mass Investigation | (컴퓨터실 수업) · Java Applet을 통한 선형연립미분방정식의 위상도의 관찰 · 위상평면에서의 직선해의 발견과 직선해의 기울기에 대한 대수적인 해법 |
| 17 | 11/27 (목) | 20분 | | |
| 18 | 12/02 (화) | 60분 | 11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -2x - 3v \end{cases}$ 의 직선해 (Straightline-Solution) | 선형연립 미분방정식에서 · 직선해에 대한 질적 접근 및 해석적 접근 · 직선해를 이용하여 초기조건이 주어진 경우의 해함수 구하기 |
| | | 50분 | | |
| 19 | 12/04 (목) | 70분 | 12. 선형연립변화율방정식의 해 | 선형연립 미분방정식에서 · 직선해의 존재 유무와 그 중요성 · 일반해에 대한 해석적 접근 · 위상평면 위에서의 해의 움직임과 해함수에 대한 질적 접근 |
| | | 50분 | 13. Spiraling solution | · 직선해가 존재하지 않는 경우의 선형연립 미분방정식의 일반해에 대한 해석적 접근 및 질적 접근 |
| 20 | 12/09 (화) | 30분 | 14-1. Adding solution always result in another solution? | · 연립 미분방정식에서 두 해의 일차 결합이 해인 경우에 대한 탐구 |
| | | 60분 | 15-1. 선형연립변화율방정식의 평형해 | · 선형연립 미분방정식의 평형해의 존재와 분류 |
| | | | 15-2. 선형연립변화율방정식의 평형해와 행렬 | · 선형연립 미분방정식에서 평형해의 존재와 행렬의 관계 소개 |
| 21 | 12/11 (목) | 35분 | 15-3. λ 를 먼저 구하는 방법 | 선형연립미분방정식에서 · 고유값을 먼저 구하는 방법의 소개 · 고유값을 먼저 구하는 방법에 대한 질적 접근 및 해석적 접근의 탐구 |
| | | 80분 | 16. Summarizing Your Results | · 선형연립 미분방정식에서 고유값에 따른 위상도와 일반해에 대한 요약 |
| | | | 14-2. 흔들리는 초고층 빌딩의 재음미 | · 비선형연립 미분방정식의 선형화 |
| | 12/16 (화) | | 기말고사 | |

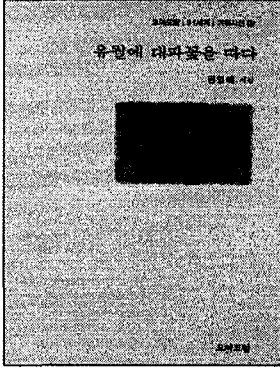
3.1.2 교수 학습자원

활동지(Worksheet)

이 수업은 소그룹토의와 전체토의가 매우 중요한 역할을 한다. 따라서 수업시간에 적극적이고 능동적인 태도(발표, 질문, 토의 등)로 임하는 것이 중요하다. 이를 위해 활동지를 개발해 사용하였으며, 교재를 참고자료로만 사용되었다. 활동지는 토의를 통해 개념을 발견하고 문제해결력을 기른다는 목표에 맞도록 매시간 제작되었으며, 제작시에는 교수그룹이 모두 참여하여 학생들의 사고과정을 예측하여 각 문항을 세부적으로 조정하였다. 활동지에는 물고기의 수, 커피의 온도에 관한 문제 등과

같은 실생활 문제 뿐만 아니라 용수철의 진동과 같은 물리적인 문제도 포함되었다. 다만 매차시 새로운 상황이 제시되는 것이 아니라 지난 차시 혹은 지난 주제와 동떨어지지 않도록 흐름을 유지했다. 또한 각 활동지는 한 문항으로 이루어진 것이 아니라 안내된 재발명의 원리에 따라 학생들의 사고를 점진적으로 유도할 수 있도록 단계별로 여러 문제로 이루어졌다. 다음 활동지는 1차시에 주어진 미분방정식의 해를 구하는 방법을 가르치기 보다는 학생들이 변화율의 질적 의미에 대해 생각할 기회를 주기 위한 활동지이다.

| | | |
|-----------------|--|----|
| 01. 먹이사슬 | | 학번 |
| | | 이름 |



권영해 「유월에 대파꽃을 따다」

즐거운 먹이 사슬

흰수염고래는 한입에
수십만 마리의 크릴새우를 먹어치운다
수많은 새우가 한 마리의 고래를 즐겁게 한다

아프리카 사바나에는
한 마리의 얼룩말을 두고
표범과 재칼과 대머리독수리들이 달라붙어
식사를 즐긴다
말 한 마리가 여러 입을 살린다

주위를 둘러보면
세상은 하나의 정글
우리는 누군가의 적이며
모두의 친구이다

<http://poemalbatross.com.ne.kr/jeulgeon%20meogi.htm>

※ 재원은 고등학교 때 담임선생님이셨던 권영해선생님의 홈페이지에서 선생님이 지으신 위의 시를 읽고, 다음과 같은 두 연립변화율방정식(system of rate of change equations)을 생각하였다.

연립변화율방정식 A

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 20xy \\ \frac{dy}{dt} = -5y + \frac{xy}{20} \end{cases}$$

연립변화율방정식 B

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.3x - \frac{xy}{100} \\ \frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \frac{y}{17}\right) + 25xy \end{cases}$$

위의 식에서 x 와 y 는 각각 시간 t 에 대한 먹이사슬의 두 종(포식자와 피식자)의 수를 의미한다. A, B의 두 연립변화율방정식 중 하나는 흰수염고래와 크릴새우의 관계에서와 같이 포식자가 피식자 보다 큰 동물인 경우이고, 다른 하나는 대머리독수리와 얼룩말의 관계에서와 같이 피식자가 포식자 보다 큰 동물인 경우를 나타낸다. 이 때, 여러 마리의 포식자가 한 마리의 피식자를 먹는 경우에는 한 마리의 피식자가 포식자 수를 증가시키는데 막대한 영향을 미칠 수 있는 것이다. 각각의 상황을 나타내는 연립 변화율방정식이 무엇인지 생각해 보고, 그 이유를 다양한 방법으로 설명해 보자.

<그림 3.1-1> 활동지의 예

쪽지(Reflection Journal)

쪽지는 그 날 학습한 내용의 중요한 개념, 발표나 토의를 통하여 알게 된 것, 질문사항 등을 정리하여 제출하도록 한 것이다. 쪽지는 학생들에게는 그 날의 수업에 대한 복습 및 반성의 시간을 제공하고, 교수그룹에게는 학생들의 수업에의 이해도를 측정할 수 있는 수단이 되었다. 다음 그림은 학생들에게 배부된 쪽지의 윗부분이다. 아래쪽은 여백으로 남겨두어 학생들이 직접 작성토록 했다.

| | | | | | | | |
|--|---|----|--|----|--|----|--|
| <p>Reflective Journal</p> <p>2003년 월 일 (요일) </p> | <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px;">학과</td><td style="width: 80%;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">학번</td><td></td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">이름</td><td></td></tr> </table> | 학과 | | 학번 | | 이름 | |
| 학과 | | | | | | | |
| 학번 | | | | | | | |
| 이름 | | | | | | | |
| <p>★ 오늘 학습한 내용 중에서 중요하다고 생각되는 개념은 무엇인가요?</p> <p>★ 오늘 수업시간에 이루어진 발표나 토의를 통하여 알게 된 것은 무엇인가요?</p> <p>★ 오늘 학습한 내용 중에서 질문이 있나요?</p> <p>★ 가급적 볼펜을 사용하며, 연필을 사용할 때에는 진하게 쓰도록 합니다.</p> | | | | | | | |

<그림 3.1-2> 쪽지의 예

E-Journal

E-Journal의 목적은 수학적 사고에 대한 깊은 이해와 수학을 알고 행하는 것의 의미가 결여된 학생들에게 좀 더 생각할 수 있는 기회를 주기 위한 것으로 불규칙적으로 한 학기동안 5번 요구되었다. 학생들에게 제시된 주제는 다음과 같다.

<표 3.1-2> 학생들에게 제시된 E-Journal 문제

| 횟수 | 문제 |
|----|---|
| 1 | <p>In class, three different meanings of $\frac{dx}{dt}$ were suggested:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. The rate of change of a quantity x. 2. The growth of a quantity x. 3. How x changes with time. <p>In your opinion, are these the same thing? Are they different? Why?</p> |
| 2 | <p>Explain what the phrase "mathematical model" means to you, what previous experiences you have had with mathematical models, and how the mathematical use of the word model is similar to and/or different from the everyday use of the word model (e.g. fashion model, model airplane, model student, etc.)</p> |
| 3 | <p>When you solve an equation like $x^2 - 3 = 1$, you come up with two numbers $x = 2$ and $x = -2$. What does it mean to solve a rate of change equation?</p> |
| 4 | <p>Suppose we had two differential equations, $\frac{dy}{dt} = t y^4$ and $\frac{dy}{dt} = t^4 y^4$. If we compared the solutions to the two equations with the same positive initial condition ($y(0) = k > 0$), which solution would grow faster? Why?</p> |
| 5 | <p>Come up with a salty tank scenario that matches the differential equation, $\frac{dS}{dt} = 3 - \frac{S}{30}$.</p> |

E-Journal의 주제는 수학 문제가 아니라 수업시간에서 나타난 중요한 아이디어에 대한 학생들의 아이디어를 쓰는 것으로 자신의 생각을 논리적으로 서술하도록 하였다. E-Journal은 홈페이지의 E-Journal 게시판에 글을 올리도록 하여 자신의 생각을 다른 학생에게 알리고 자신도 다른 학생들의 생각을 알 수 있도록 하여 이해의 깊이를 더할 수 있도록 하였다.

포트폴리오(Course Portfolio)

포트폴리오는 학습내용에 대한 이해 과정을 기록하는 것이며, 중간시험과 기말시험 시 2회 제출하도록 하였다. 포트폴리오의 내용은 쪽지, 활동지 학습 내용, 숙제, E-Journal 등의 모든 것을 대상으로 하되, 학생 자신에게 의미 있는 내용을 선택하고 용어해설과 개념망을 반드시 포함하도록 하였다. 용어해설은 미분방정식(변화율방정식)의 중요한 용어로 생각되는 단어나 구절을 선택하여 그에 대한 짧은 설명을 자신의 말로 풀어서 정리하면 된다. 포트폴리오를 통해 수업내용을 자신이 재구성하여 체계적으로 정리함으로써 자신의 지식이 되도록 하고 중간고사와 기말고사 대비에 도움을 주도록 하였다.

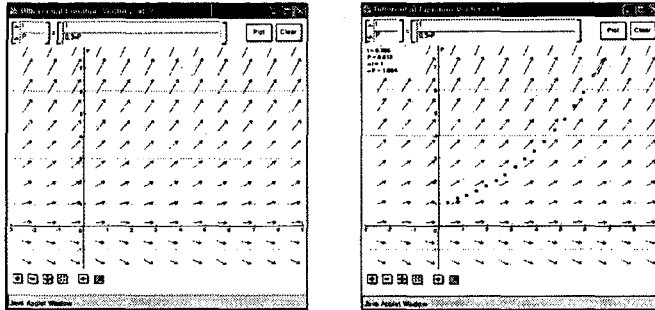
팀프로젝트(team project)

프로젝트는 학습내용에 대한 전반적인 성취도를 평가하기 위한 것으로 기말에 제출하도록 하였다. 프로젝트의 주제는 미분방정식의 응용(실생활에서의 문제 등)과 관련 있도록 팀구성원들이 협의하여 선정하고, 팀구성원은 2~4명으로 자유롭게 구성하도록 했다. 다만 학생들이 동등한 수준으로 프로젝트에 참가하도록 하기 위하여 프로젝트 보고서의 처음에 각 구성원이 한 일을 반드시 기록하고, 학습내용을 직접 적용한 해 본 후의 학생들의 생각을 알기위해 마지막엔 각자의 후기를 포함하여야 하도록 하였다. 학생들이 제출한 프로젝트는 응용수학을 비롯해서 물리문제, 날씨문제, 의료문제 등 다양한 문제를 포함했다.

3.2 강의보조매체

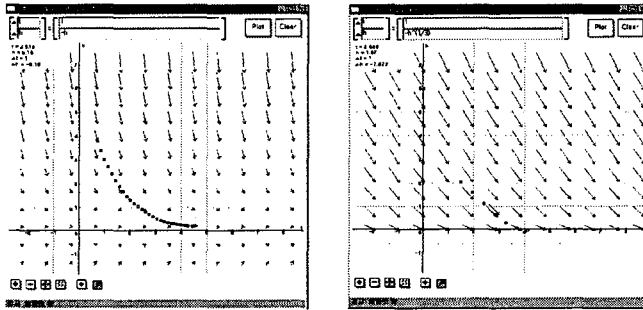
자바 애플릿(java applet)

미분방정식의 개념을 학습하기 위해 크게 3차시 가량을 컴퓨터실에서 수업을 하였고 주요 내용은 다음과 같다. 먼저 주어진 미분방정식을 자바 애플릿을 통해 그려보는 시간을 가졌다. 미분방정식의 기울기장을 관찰하고 그래프의 개형을 대략적으로 알 수 있을 뿐 아니라 Δt 와 ΔP 가 어떻게 변하는지 구체적으로 파악할 수 있는 시간이었다. 또한 과거의 현상이나 미래의 현상에 대해 예측하는 시간을 가졌다.



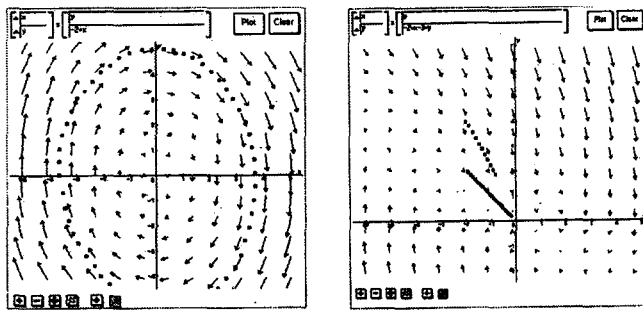
<그림 3.2-1> 자바 애플릿 화면

다음 차시에는 자바 애플릿을 통하여 하강하는 비행기 높이를 예측하기 위한 해를 탐구하는 시간을 가졌다. 이는 미분방정식의 중요한 정리중하나인 유일성정리(uniqueness theorem)를 학생들 스스로 발견하게 하기 위한 도구이자 정리에 대한 이해를 돕기 위한 매체로 활용되었다.



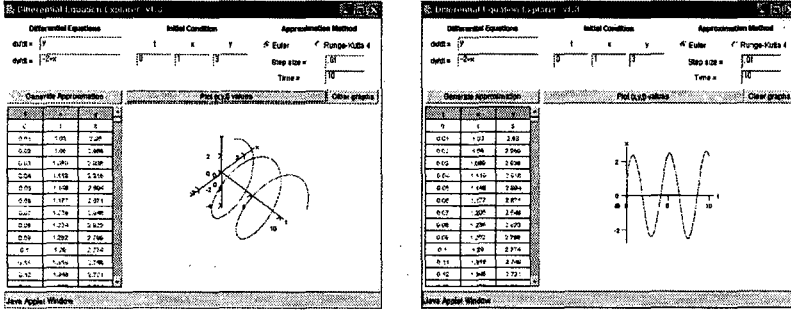
<그림 3.2-2> 유일성정리에 대한 자바 애플릿 화면

마지막 차시에는 자바 애플릿을 통해 선형연립미분방정식의 위상도의 관찰하고 위상평면에서의 직선해의 발견과 직선해의 기울기에 대한 대수적인 해법에 대해 논의하는 시간이 되었다.



<그림 3.2-3> 직선해 발견을 위한 자바 애플릿 화면

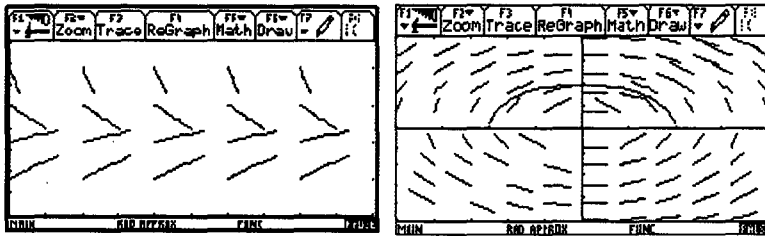
또 다른 자바 애플릿을 제공하여 3차원 그래프를 그려보고 마우스를 사용해서 그래프를 돌리면서 2차원 그래프와의 관계를 함께 관찰할 수 있도록 하였다.



<그림 3.2-4> 3차원 그래프를 그린 자바 애플릿 화면

그래픽 계산기

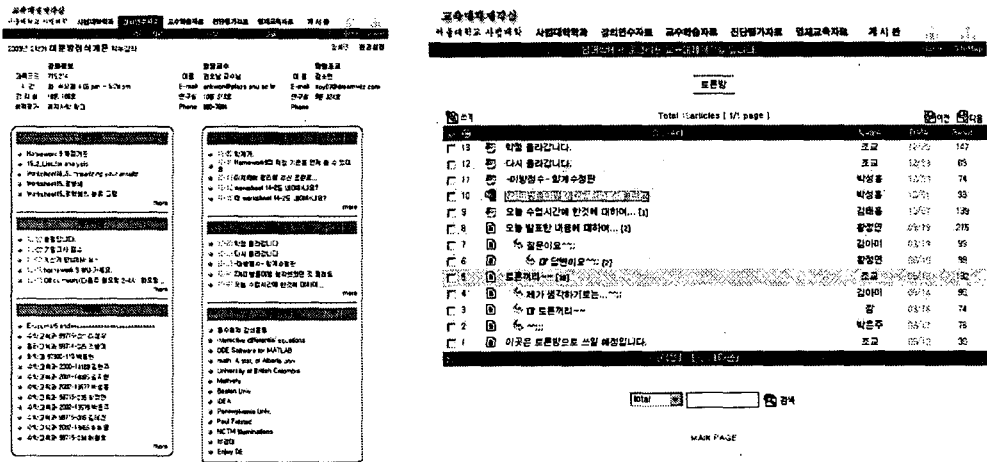
교실 환경이 컴퓨터실을 항상 사용할 수 있지 않았기 때문에 학생들이 언제든지 기율기장을 관찰할 수 있도록 그래픽 계산기를 이용하기도 했다. 그래픽 계산기는 컴퓨터를 이용할 수 있는 환경에서 뿐만 아니라 학생들이 모여서 토론할 수 있는 곳에서는 언제든지 활용할 수 있도록 모든 학생에게 한 학기동안 나누어 주었다.



<그림 3.2-5> 그래픽 계산기의 활용의 예

게시판의 활용

미분방정식은 수업 외에 의사소통 수단으로 인터넷 게시판을 활용하였다. 인터넷 게시판에는 공지사항을 포함하여, 복습과 수업 외 토의를 위한 활동지 게시, 과제물 제출, 학생들의 의사소통을 위한 자유게시판과 토론방, 그리고 동기유발 및 학습보조를 위한 관련사이트를 포함하였다. 인터넷 게시판은 학생들과 교수그룹 사이의 끊임없는 의사소통의 장이 되었으며, 적극적인 학습 참여를 위한 발판이 되었다.



<그림 3.2-6> 인터넷 게시판 활용의 예

참 고 문 헌

권오남 · 김영신 (2002). 미분방정식 교수-학습에서의 RME접근. *수학교육포럼*, 1, 111-133.

배천용 · 이준옥 · 최원형 (1996). *교수방법의 탐구*. 대전: 한남대학교출판부.

정영옥 (2000). 수학교육 연구 동향-네덜란드의 현실적 수학교육, *대한수학교육학회지 학교수학* 2(1), pp.283-310.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on teaching mechanics: Didactical phenomenology of the concepts of force, *Educational Studies in Mathematics* 5, pp.70-87.

Gravemeijer, K. & Doormann, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39, pp.111-129.

Rasmussen, C. & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 31(2), pp.161-172.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a Mathematics program for primary education. In L. Streefland(Ed.), *Realistic Mathematics Education in primary school* pp.21-57, Utrecht: Cap Press.