고유벡터 법을 이용한 최적 의사결정에 관한 연구

On the Opimal Decision Making using the Eigenvector Methods

정 순 석*

Chung, Soon-Suk

Abstract

Multi-criteria decision making is deducing the relative importance in the criterion of decision making and each alternative which is able to making a variety of choices measures the preferred degree in the series of low-raking criterions. Moreover, this is possible by synthesizing them systematically. In general, a fundamental problem decision maker solve for multi-criteria decision making is evaluating a set of activities which are considered as the target logically, and this kind of work is evaluated and synthesized by various criterions of the value which a chain of activities usually hold in common. In this paper, we are the eigenvector methods in weights calculating. For the purpose of making optimal decision, the data of five different car models are used. For computing, we used Visual Numerica Version 1.0 software package.

Keyword : Multi-criteria decision making, Eigenvector methods

* 忠州大學校 産業經營工學課 敎授

1. 서론

최근 정치 환경에서 여러 가지 교훈을 얻었다. 즉, 명확히 정의된 목표를 갖는다는 것, 이는 성공적인 국정운영의 핵심임이 입증되어 있다. 일관성을 유지하는 것 또한 중요한 요소이다. 사람들이 상이한 견해에 대한 설득 및 지원능력은 여전히 훌륭한 CEO가 갖추어야 할 두 가지 주요 속성으로 간주된다. 이는 그들의 관점을 명확히 하는데 도움을 준다. 많은 사람들이 복잡한 문제에 대하여 무언의, 이치에 맞지 않은, 그리고 직관적 사고에 의한 CEO의 의사결정에 신뢰를 부여하기란 쉽지 않다. CEO가 갖고 있는 내부의 결정 메커니즘이 어떤 것이든지 간에 명확하게 이해 될 수 있어야 한다. 언어와 사고의 법칙이 오래 전에 공식적으로 조직화되어야 했던 것처럼 이제는 훌륭한 의사결정을 내릴 수 있도록 사고과정을 조직화 할 필요가 있다.

어떤 영역에서든, 우리가 추구하는 목표를 설정하고 이를 달성하는 데에는 수많은 요소가 영향을 미칠 만큼 현재 우리가 살고 있는 정치, 경제, 사회 및 기술적 환경은 매우 복잡하다. 이러한 환경 속에서 명확한 목표를 설정하고 성취하기 위한 “판단”의 일관성을 유지하기는 쉬운 일이 아니다. 따라서 접근 방법은 문제에 대처하기 위한 새로운 방법이나 논리가 요구되고 있다. 이러한 접근 방법은 지식인만의 전유물이 되어서는 안되며, 우리의 지혜와 감각으로 누구나 쉽게 받아들여 질 수 있는 방법이 요구되고 있다[3, 5 ,7].

사람들은 상황이 동일해도 얼마든지 다른 느낌을 가질 수 있으며, 그 느낌 또한 토론, 새로운 증거, 그리고 다른 사람과의 접촉을 통하여 변화될 수 있다. 대개의 결과는 여러 가지 의견을 절충해 놓은 것과 같다. 확실히 의사결정이 이루어질 때, 개인적 선호와 설득이 명확하고 확실한 논리를 압도하는 것은 사실이다. 실제의 의사결정과정이 이와 같다는 점은 여러 연구자들이 수행한 최근 연구에 의하여 증명되어 왔다[2 4, 8, 10, 11, 12, 19].

따라서 접근 방법은 문제에 대처하기 위한 새로운 방법이나 논리가 요구되고 있다. 이러한 접근 방법들에서 다 기준 의사결정 중 다 요소 의사결정에 대하여 연구를 하였다[2, 13, 14, 15, 16]. 본 논문에서는 각 요소의 상대적 중요성을 고려하여 각 요소의 가중치 계산방법 중 고유벡터 방법[5, 7, 11, 15, 18]을 사용하여 선행연구[1]의 데이터를 사용하여 최적 의사결정 하였다. 가중치 계산의 소프트웨어로는 Visual Numerica Version 1.0을 사용하였다.

2. 가중치 계산 방법

고유벡터법은 Hwang 과 Yoon[12]이 제시하였다.

쌍대 비교행렬로부터 요소의중요도를 계산하는 방법 중 가장 보편적인 방법이다. n 개의 요소를 쌍대 비교함으로써 얻어지는 쌍대 비교 행렬을 n×n행렬이 되며, 이 행렬을 $A = (a_{ij})$라 하자. 쌍대 비교행렬 A는 다음과 같은 특성을 지닌다.

$$\begin{aligned} a_{ji} &= 1/a_{ij} \qquad i,j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ a_{ii} &= 1 \qquad\quad\ \ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{aligned} \tag{1}$$

즉, 행렬A는 상반행렬(reciprocal matrix)이다.

쌍대 비교 과정에서 모든 판단이 완전히 정확하고 일치성이 유지된다고 가정하자. 예를 들어서, n 개의 서로 다른 물체의 무게를 $w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n$이라고 하고 이 들간의 무게의 비율로 쌍대 비교행렬을 구성한다고 하자. 이 경우에는 A에서 모든 i, j, k에 대해서 $a_{ij} = a_{ij}\, a_{jk}$가 성립할 것이다. 앞에서 가정한 대로 모든 쌍대 비교치가 객관적인 측정치의 비율로 완전히 일치성이 유지되고 있으므로 다음이 성립한다.

$$a_{ij} = w_i / w_j \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2}$$

따라서

$$a_{ij}\, a_{jk} = (w_i / w_j) \cdot (w_j / w_k) = w_i / w_k = a_{ik}$$

이다. 또한, 모든 i, j에 대하여

$$a_{ji} = w_j / w_i = \frac{1}{w_i / w_j} = \frac{1}{a_{ij}}$$

또한, 완전한 일치성이 보장되는 경우에는 다음 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$AW = nW \tag{3}$$

식(3)를 n개의 등식으로 표현하면

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n w_i \quad , \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

완전한 일치성이 보장되는 경우이므로 식(2)을 식(3)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j} w_j = n w_i \quad , \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

이 된다. 따라서 일치성이 보장되는 이상적인 경우에는 식(1)이 성립함을 알 수 있으며, 이식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & & & \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

행렬 이론으로부터 식(3)에서 n은 행렬 A의 고유값이며, 중요도 벡터 W는 이에 대응하는 고유벡터임을 알 수 있다.

지금까지는 쌍대 비교행렬이 완전히 일치성을 만족하고 있다는 가정하에 전개되었다. 앞에서 가정했듯이 객관적인 측정치를 가지고 쌍대 비교행렬이 구성되는 경우에는 일치성을 보장할 수 있다. 그러나 일반적으로 다요소 의사결정 문제에서는 정성적인 요소들을 포함하고 있으며, 이로 인하여 쌍대 비교치는 주관적인 평가에 의존하게 된다. 따라서 대부분의 경우에 불 일치성을 내포하고 있다. 이와같은 불일치성을 내포하고 있는 경우에 쌍대 비교행렬의 최대 고유값을 고유벡터를 이용함으로써 요소의 중요도를 근사적으로 구할 수 있음을 설명하자.

주관적으로 요소들을 쌍대 비교하는 경우 식(2)에서 a_{ij}는 원래의 w_i/w_j와 편차를 갖게 된다. 따라서 식(3)은 성립되지 않는다. 그러나 행렬이론으로 부터의 중요한 두 가지 사실이 이 문제에 대한 해결책을 제시한다.

첫째, n×n 행렬 A와 n차원 벡터 X에 대하여, λ_1, λ_2, …, λ_n 이 AX=λX를 만족하는 해이고, 즉, λ_1, λ_2, …, λ_n이 행렬 A의 고유값들이고, 모든 i 에 대하여 $a_{ii}=1$이면 고유값들의 합은 n이다. 즉, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = n$이다. 불 일치성이 존재하더라도 모든 쌍대 비교행렬의 대각원소(diagonal element)는 1이므로, 쌍대 비교행렬의 고유값들의 합은 항상 n이다.

둘째, 상반행렬(reciprocal matrix)의 원소 a_{ij}가 약간 씩 변하는 경우에 고유값 역시 약간씩 변한다는 사실이다. 즉, 쌍대 비교행렬의 원소들이 일치성을 만족하는 값들로부터 약간씩 벗어나 있는 경우에 고유값 역시 일체성을 만족하는 원래 행렬의 고유값 근처에 있을 것이다.

이상의 결과를 종합하면, 불 일치성이 존재하더라도 쌍대 비교행렬 A의 최대고유값은 n에 가까울 것이고, 나머지 $(n-1)$개의 고유값은 0에 가까울 것이다. 따라서 쌍대 비교행렬의 최대 고유값 ($\lambda_{\max}$)을 찾고, $\lambda_{\max}$에 해당되는 고유벡터를 찾으면, 이것을 중요도에 대한 근사치로 사용 할 수 있다. 즉,

$$AW = \lambda_{\max} W$$

위에서 행렬 A의 $\lambda_{\max}$에 대한 고유벡터를 요소의 중요도 벡터 W로 사용할 수 있음을 설명하였다. 더불어, 쌍대 비교 행렬의 일치성의 정도를 나타내는 척도를 유도할 수 있다. 식(3)을 만족하는, 즉 일치성을 만족하는 행렬A로부터 a_{ij}의 약 간의 변화는 $\lambda_{\max}$의 n 으로부터의 약간의 변화를 가져온다. 따라서 $\lambda_{\max}$와 n의 편차는 쌍대 비교치 a_{ij}가 원래의 비교치 w_i/w_j 로부터 얼마나 벗어나 있는가를 시사해 준다. 다시 말해서, $\lambda_{\max}$와 n의 편차로부터 쌍대 비교행렬의 일치성의 정도를 알 수 있게 된다. 따라서 일치성 지수(consistency index : CI)를 다음과 같이 정의한다.

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

Saaty[5, 6]에서는 두 가지 방법으로 쌍대 비교행렬의 일치성 여부를 판단하도록 권하고 있다. 첫째, CI가 0.1이하이면 받아들일 만하다고 제안하고 있고, 둘째, Oak Ridge 연구실에서 제시한 임의지수(random index : RI)를 이용한다. RI는 행렬 차수별로 100개씩의 상반행렬을 임의로 발생시켜 차수별로 CI를 평균한 것이다.

<표> 차수 별 임의 지수(RI)

차수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48

<표>에서 행렬 차수별로 RI를 보여주고 있다. 아울러서 CI와 해당되는 차수의 RI의 비율을 일치성 비율(consistency ratio : CR)로 정의하고, CR = CI/RI, CR이 0.1 이하이면 받아들일만하다고 권장하고 있다. 예를 들면, 의사결정문제에 대해서 양의 쌍대 비교 행렬이 아래와 같다고 하자[1].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.25 & 1.63 & 1.63 & 5.17 \\ 0.81 & 1 & 1.32 & 1.32 & 4.17 \\ 0.61 & 0.76 & 1 & 1 & 3.17 \\ 0.61 & 0.76 & 1 & 1 & 3.17 \\ 0.19 & 0.24 & 0.32 & 0.32 & 1 \end{pmatrix}$$

이 문제에 대해서 아래와 같이 고유치 λ를 계산하여 최대 고유치 λ_{max}를 구한다.

$$det(A - \lambda I) = 0$$

윗 식으로부터 가장 큰 $\lambda_{max} = 5.00385882 \doteqdot 5$ 를 얻을 수 있다. 따라서

$$\begin{pmatrix} -4 & 1.25 & 1.63 & 1.63 & 5.17 \\ 0.81 & -4 & 1.32 & 1.32 & 4.17 \\ 0.61 & 0.76 & -4 & 1 & 3.17 \\ 0.61 & 0.76 & 1 & -4 & 3.17 \\ 0.19 & 0.24 & 0.32 & 0.32 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

위 식과 $\sum_{i=1}^{5} w_i = 1$로 이루어진 연립방정식을 풀면

$$w^T = (0.3102,\ 0.2504,\ 0.1897,\ 0.1897,\ 0.0600)$$

을 얻는다.

또한 이 데이터에 대해서 일치성을 계산하면 아래와 같다.

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = \frac{5.00385882 - 5}{4} = 0.000964$$

그러므로, $CI \leq 0.1$ 이므로 이 데이터는 받아들 일만 하다. $n=5$일 때, $RI=1.12$이고 CI을 계산하면 다음과 같다.

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.000964}{1.12} = 0.000861$$

그러므로, $CR \leq 0.1$이기 때문에 이 데이터는 일관성이 있다고 판단한다. 결국, 각 대안의 가중 평균은 다음과 같다.

$$A_1 = 0.2422$$
$$A_2 = 0.1974$$
$$A_3 = 0.2020$$
$$A_4 = 0.1771$$
$$A_5 = 0.1813$$

따라서 대안 A_1이 선택된다.

3. 결론

가중치를 계산하는 좋은 방법을 찾기란 매우 어렵다. 그 이유는 의사결정문제가 가지고 있는 환경의 차이로 인해 적절한 의사결정모형을 선택하기 어렵기 때문이다.

본 논문에서는 여러 가중치 계산방법 중에서도 의사결정 이론에서 요구하는 최소한의 타당성을 가지고 있는 다 요소 의사결정방법 중 고유벡터 법을 사용을 하여 국내 모자동차 회사의 5가지의 모델을 최적의사결정 하였다.

이 논문은 선행연구의 계속적 연구로서 쌍대 비교행렬을]에서 사용된 것을 계속 사용하였다[1]. 연구결과로서 5가지의 모델 중 첫째모델이 두 방법 똑같이 최적의 의사결정으로 나왔다[1]. 여기서는 가중치 방법의 실질적 타당성과 이론적 타당성만을 다루었지만, 가중치 구하는 절차가 너무 복잡하고 까다로워서 지나치게 많은 시간과 비용이 든다면 바람직한 방법이라 할 수 없다.

4. 참고문헌

1. 정순석,(2004), "엔트로피방법에 의한 다 요소 의사결정에 관한 연구" 안전경영과학회지 제6권 2호, pp. 177-1861.
2. 이강인, (1996), "선호 종속으로 허용하는 다 속성 의사결정문제의 대화형 접근방법의 개발", 동국대학교 대학원 산업공학과, 박사학위 논문.
3. Ashton, R. H.,(1980), Sensitivity of Multiattribute Decision Models to Alternative Specifications of Weighting Parameters, Journal of Business Research, Vol.8, No.3, pp. 341-359.
4. Bana e Costa, C. A., (Eds) (1990), Readings in Multiple Criteria Decision Aid, Springer-Verlag, New York.
5. Barron, F. H., and Barrett, B. E.,(1996), Decision Quality Using Ranked Attribute Weights, Management Science, Vol. 42, No.11, pp. 1515-1523
6. Ball, D. E., Keeney, R. L., and Raiffa, H., (1977), Confliction Objective in Decisions, John Wiley & Sons.
7. Borcherding, K., Eppel. T., and Von Winterfeldt, D.,(1991), Comparison of

Weighting Judgements in Multiattribute Utility Measurement. Management Science, Vol. 37, No.12, pp. 1603-1619.

8. Canada, J. R., and Sullivan, W. G., (1989), Economic and Multiattribute Evaluation of Advanced Manufacturing Systems. Prentice Hall, N. J.
9. Cogger, K. O., and Yu. P. L., (1985), Eigenweight Vectors and Least-Dis tance Approximation for Revealed Preference in Pairwise Weight Ratios, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 46, No. 4, pp.483-491.
10. Goicoechea, A., Hansen, D. R., and Duckstein, L., (1982), Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications, John Wiley& Sons.
11. Hobbs, B. F., (1982), A Comparison of Weighting Methods in Power Plant Siting, Decision Sciences, Vol. 11, No.4, pp. 725-737.
12. Hwang, C. L., and Yoon, K., (1981), Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications : A state-of-The-Art Survey, New York : Springer-Verlag.
13. Olson, D. L., (1996), Decision Aids for Selection Problems, New York : Springer-Verlag.
14. Saaty, T. L., (1977), A scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 15, No. 3, pp. 234-281.
15. Schoemaker, P. J. H., and Waid, C. C., (1982), An Experimental Comparison of Different Approaches to Determining Weights in Additive Utility Models, Management Science, Vol. 28, No. 2, pp. 182-196.
16. Soofi, E. S., (1990), Generalized Entropy-based Weight for Multiattribute Models, Operations Research, 32(2), pp. 362-363.
17. Steuer, R. E., (1986), Multiple Criteria Optimization : Theory, Computa tion, and Application, John Wiley & Sons.
18. Weber, M., and Borcherding, K., (1993), Behavioral Influences on Weight Judgements in Multi Attribute Decision Making, European Journal of Operational Research, 67. pp. 1-12.
19. Zeleny, M., (1982), Multiple Criteria Decision Making, New York:McGrow-Hill.