

비보존력을 받는 Beck 기둥의 전단변형효과에 관한 매개변수적 고찰

A Parametric Study on the Shear-deformation Effect for Beck's Column under Follower Force

이준석* · 김남일** · 김문영***

Lee, Jun-Seok · Kim, Nam-Il · Kim, Moon-Young

ABSTRACT

For a shear-deformable beam-column element subjected to non-conservative forces, equations of motion and a finite element formulation are presented applying extended Hamilton's principle. The influence of non-conservative force's direction parameter, internal and external damping forces, and shear deformation and rotary inertia effects on divergence and flutter loads of Beck's columns are intensively investigated based on element stiffness, damping and mass matrixes derived for the non-conservative system.

Keywords : non-conservative force, damping force, shear deformation, divergence, flutter

1. 서론

비보존력(follower force)을 받는 외팔기둥의 안정성 문제(Beck, 1952)에 대해 제기한 이후 수많은 논문들이 이러한 비보존력을 받는 구조물의 안정성 문제에 관해서 연구하였다. Bolotin(Bolotin, 1961)과 Leipholz(Leipholz, 1980)등은 이에 대해 정적 및 동적 안정성에 관한 많은 논문을 발표하였다. 이후 Barsoum(,1971)은 유한요소법을 이용하여 중동력을 받는 전단효과가 무시된 박벽보의 동적안정성 해석법을 제시한 바 있으며, 또한 Chen과 Ku(Chen et al., 1991)는 분접(partially tangential)하는 비보존력을 받는 Timoshenko 보의 안정성에 관해서 조사하였고, Irie 등(Irie et al., 1980), Lee와 Yang(Lee et al., 1993,1994), Takahashi와 Yoshioka(Takahashi et al., 1996), Takahashi(Takahashi, 1999)은 전달행렬법(transfer matrix method)를 이용하여 전단변형이 고려된 보의 안정성해석을 수행하였다. 이러한 논문에서 언급하고 있는 내용은 중동력의 회전경향(sub-tangentiality)에 따른 정적 불안정 상태(divergence) 및 동적 불안정 상태(flutter) 효과에 대한 언급으로써 정적 및 동적 불안정거동을 조사하였다. 특히 비보존력계의 정적좌굴 및 동적 불안정 상태에 대한 비보존력의 방향파라미터에 대한 임계하중의 영향, 내적 및 외적 감쇠하중, Winkler 및 Pasternak지반의 영향을 각각 조사(김문영 등, 2004)하였지만 전단변형 및 회전관성효과는 고려하지 않았다. 이에 본 연구에서는 비보존력계의 동적 불안정거동에 대한 전단변형 및 회전관성효과 그리고 감쇠하중효과를 조사하고자 한다. 이를 위해서 비보존력 및 감쇠력을 받는 보-기둥부재에 대한 지배방정식을 Hamilton

* 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정 E-mail: junsok73@skku.edu

** 성균관대학교 건설환경연구소 연구교수 E-mail: kni8501@dreamwiz.com

*** 정희원 · 성균관대학교 건설환경시스템공학과 교수 E-mail: kmye@skku.edu

의 원리를 이용하여 유도한다. 이때 비보존력의 방향파라미터에 대한 임계하중의 영향, 그리고 내적 및 외적 감쇠하중의 영향을 나타내는 파라미터들이 포함된다. 모든 변수 및 파라미터는 무차원화 시키고, 유한요소 정식화 과정을 거쳐 무차원화 된 운동방정식을 제시한다. 비대칭 시스템행렬에 대한 고유치해법을 적용하여 기존의 논문들의 결과와 비교하여 본 수치해법의 타당성을 입증하고 또한, 각각의 매개변수들이 비보존력계의 정적좌굴 및 동적좌굴 거동에 미치는 영향을 조사한다.

2. 전단변형 및 감쇠효과를 고려한 비보존력계의 운동방정식

일반적으로 집중 비보존력(circulatory concentrated force, P)과 재단력(f_2, m^b, f_2, m^b)을 받는 보-기둥요소 운동에너지, 전단변형을 고려한 탄성변형에너지와 축방향력의 포텐셜을 포함하는 포텐셜에너지, 그리고 비보존력이 행한 일들을 포함하는 비보존력계의 Hamilton 원리는 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta(T - V) + \delta W_{NC} \} dt = 0 \tag{1}$$

여기서, T 와 V 는 각각 부재의 운동에너지, 포텐셜에너지 그리고 W_{NC} 는 비보존력이 행한일, δ 는 에너지의 변분을 나타낸다. P 가 축방향으로 $x = \eta$ 위치에 작용하는 경우에 그림 1(a)와 같이 처짐이 발생함에 따라 작용방향이 $\alpha v'(\eta)$ 만큼 회전하는 것으로 가정하면, P 의 수평 및 수직성분은 각각 P 와 $\alpha v'(\eta)P$ 로 표시된다. 여기서 α 는 작용점의 변위에 따라 작용 방향이 바뀌는 방향변화를 조절하는 파라미터이다. 결과적으로 이를 고려한 시스템의 에너지는 다음과 같이 표시된다.

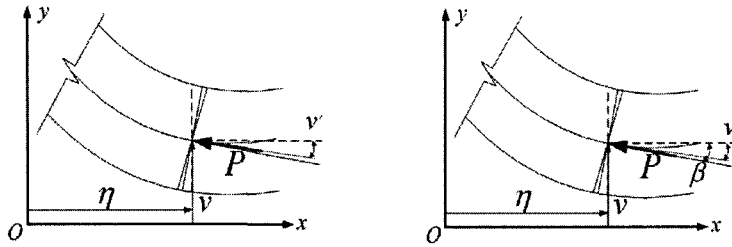
$$2T = \int_0^{l_0} (\rho A \dot{v}^2 + \rho I \dot{\beta}^2) dx \tag{2a}$$

$$2V = \int_0^{l_0} [EI \beta'^2 + GA_s (v' - \beta)^2 + F(x) (v')^2] dx - 2W_{ext} \tag{2b}$$

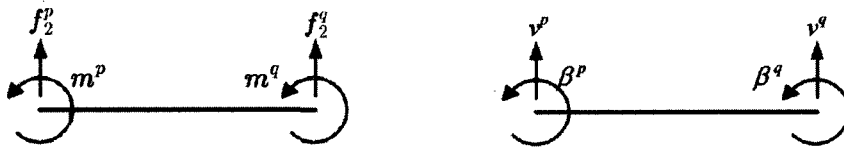
$$\delta W_{ext} = F_2^b \delta v^b + M^b \delta \omega^b + F_2^a \delta v^a + M^a \delta \omega^a \tag{2c}$$

$$\delta W_{NC} = - \int_0^{l_0} \{ \gamma_1 \dot{v} + \gamma_2 \dot{v}'' + \alpha P v' \delta(x - \eta) \} \delta v dx \tag{2d}$$

여기서 $\rho, A, I, \gamma_1, \gamma_2, F(x), A_s, E, G$ 는 각각 요소의 밀도, 보의 단면적, 단면 2차모멘트, 외적감쇠계수, 내적감쇠계수, 요소 내 x 지점에서의 축력, 유효전단단면적, 그리고 탄성 및 전단탄성계수이다. $U_e^T = \langle v^b, \theta^b, v^a, \theta^a \rangle$ 는 절점변위 벡터이고, $f_e^T = \langle f_2^b, m^b, f_2^a, m^a \rangle$ 는 절점력 벡터를 표시하며(그림 2 참조), (\cdot) 는 $\partial/\partial x$, $(\dot{\cdot})$ 는 $\partial/\partial t$ 를 각각 나타낸다. 또한 $F(x)$ 와 $\delta(x - \eta)$ 는 각각 축방향력과 Dirac-delta 함수를 나타낸다.



(a) 비보존력의 방향변화가 v 에 의존적인 경우 (b) 비보존력의 방향변화가 β 에 의존적인 경우
 그림 1 집중 비보존력을 받는 보-기동요소



(a) 절점력 벡터 (b) 절점변위 벡터

그림 2 보-기동요소의 절점력 및 절점변위 벡터

이제 식 (1)의 변분을 취하면 다음과 같이 운동방정식과 경계조건을 얻는다.

$$GA_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha P \frac{\partial v}{\partial x} \delta(x-\eta) - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3a)$$

$$EA_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \beta \right) + EI \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \text{경계조건 : } \delta v^p = 0 \text{ 또는 } -GA_s (v'(0) - \beta(0)) - F(0) v'(0) &= -f_2^p \\ \delta \omega^p = 0 \text{ 또는 } -EI \beta(0) &= -m^p \\ \delta v^q = 0 \text{ 또는 } -GA_s (v'(l) - \beta(l)) - F(l) v'(l) &= f_2^q \\ \delta \beta^q = 0 \text{ 또는 } -EI \beta(l) &= m^q \end{aligned} \quad (4)$$

비보존력계의 해석결과를 표시하는 수단으로 모든 변수 및 상수를 무차원화 시킨다. 이를 위해서 $v^* = v/l$, $\beta^* = \beta$, $x^* = x/l$ 로 두어 무차원화 시키고, 다시 식 3(a)와 3(b)를 EI/L 와 EI/L^2 로 각각 나누어주면 다음과 같다.

$$(5a)$$

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \beta^* \right) + \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial x^{*2}} - \lambda^2 \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad (5b)$$

여기서, 전단계수 파라미터 $S = \frac{EI}{GA_s l^2}$ 이며, 무차원상수의 정의는 다음과 같다.

$$F^* = \frac{F}{EI/l^2}; \quad g^* = \frac{g}{EI/l^3}; \quad \gamma_1^* = \frac{\gamma_1 l^2}{\sqrt{EI m}} \quad (6a-c)$$

$$\gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{l^2 \sqrt{EI m}}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{I/A}}{l}; \quad t^* = \frac{\sqrt{EI/m}}{l} t \quad (6d-f)$$

$v^* = D(x^*)e^{A^*}$, $\beta^* = B(x^*)e^{A^*}$ 로 가정하면 식 (5)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

(7a)

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial D}{\partial x^*} - B \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^{*2}} - \lambda^2 \Lambda^2 B = 0 \quad (7b)$$

여기서, Λ 는 무차원화 된 진동수이며 원진동수 ω 와 다음의 관계를 갖는다.

$$\Lambda^2 = \frac{m \omega^2}{EI/l^4} \quad (8)$$

또한, 식 (2)를 무차원화 된 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$2T^* = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial t^*} \right)^2 \right\} dx^* \quad (9a)$$

$$2V^* = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \beta^* \right)^2 + F^*(x^*) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} dx^* - 2W_{ext}^* \quad (9b)$$

$$\delta W_{NC}^* = - \int_0^1 \left\{ \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \alpha P^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \delta(x^* - \eta^*) \right\} \delta v^* dx^* \quad (9c)$$

한편, 그림 1(b)에서 보는 것처럼 $x = \eta$ 위치에서 작용하는 집중 비보존력 P 가 처점이 발생함에 따라 작용방향이 $\alpha \beta(\eta)$ 만큼 회전하는 것으로 가정할 수 있다. 이 경우 P 의 수평 및 수직성분은 각각 P 와 $\alpha \beta(\eta)P$ 로 표시된다. 따라서 이를 고려하면 무차원화된 운동방정식(5b)와 비보존력이 행한 일에 대한 식(9c)는 각각 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \beta^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(F^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - \alpha P \beta^* \delta(x^* - \eta^*) - \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} - \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) - \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad (10a)$$

$$\delta W_{NC}^* = - \int_0^1 \left\{ \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \alpha P \beta^* \hat{\alpha} (x^* - \eta^*) \right\} \delta v^* dx^* \quad (10b)$$

3. 수치 예제

본 절에서는 앞서 제시한 비보존력을 받는 평면띠대요소에 대한 동적좌굴효과를 살펴보기 위해서 Hermitian 다항식을 형상함수로 채택하여 유한요소 정식화 과정을 거치고 이에 대한 전단변형효과 및 내적 및 외적감쇠계수의 영향을 살펴본다. 표 1은 복소원진동수 Λ 와 첫 번째 동적좌굴하중에 대한 α 의 영향을 전단변형효과가 있을 경우와 없을 경우에 대해 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 전단계수 $S=0.0001$ 에 대하여 전단변형효과가 없을 경우 보다 동적좌굴하중이 줄어든 것을 알 수 있다. 이러한 결과에 대해서 Newmark의 시간응답분석을 통하여 구체적으로 살펴보기로 한다.

표 1. Tangency 계수의 영향에 의한 구조물의 임계하중 및 진동수의 관계($K^{NC} = K^{NC1}$)

α	$S=0.0$		$S=0.0001$	
	F_{Λ}^*	Λ	F_{Λ}^*	Λ
0.5	16.054	$7.055 \pm 0.0951i$	16.017	$7.045 \pm 0.0472i$
0.6	16.260	$8.335 \pm 0.0525i$	16.222	$8.321 \pm 0.0392i$
0.7	16.789	$9.238 \pm 0.0740i$	16.748	$9.2233 \pm 0.0458i$
0.8	17.591	$9.947 \pm 0.0758i$	17.546	$9.930 \pm 0.0538i$
0.9	18.670	$10.530 \pm 0.0534i$	18.620	$10.511 \pm 0.0695i$
1.0	20.053	$11.016 \pm 0.0560i$	19.994	$10.995 \pm 0.0467i$

시간응답분석을 위해서 본 절에서 취급하는 모든 예제들의 초기조건은 정지 상태이며, 횡방향의 미소한 초기하중은 축방향력의 1/1000의 크기로 자유단에 0.001동안 작용시켰으며, 수치적분 시간간격은 0.001을 적용하였다. 그림 3은 α 와 미소한 전단변형효과인 $S=0.0001$ 에 대한 외팔기둥의 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위를 분석하기 위해 $\lambda=0.0$ 일 때의 시간응답 결과이다. 그림으로부터 알 수 있듯이 표 1에서 보여주는 임계하중 F_{Λ}^* 을 초과하는 미소한 하중에서 구조물의 진폭이 상당한 값으로 변한다는 것을 확인 할 수 있으며, $S=0.0001$ 일 경우의 진폭이 더 작음을 확인 가능하다.

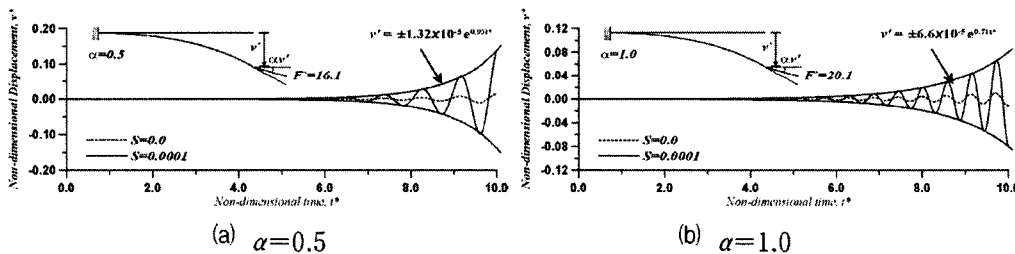


그림 3 α 의 영향에 의한 외팔기둥의 동적응답($K^{NC} = K^{NC1}$)

일반적으로 미소한 내적감쇠효과에 의해서 보의 동적좌굴하중이 크게 감소하는 것으로 알려져 있다. 그림

4는 이러한 경향에 대해 보여주고 있는데, 무차원화된 시간 t^* 를 1000까지 증가시켜도 구조물의 진폭이 크게 증가하지 않음을 알 수 있다 따라서 구조물은 weakly unstable함을 알 수 있다. 한편 전단변형효과($S=0.01$)가 고려되었을 경우 시간이 지남에 따라 조금 더 큰 진폭변화 양상을 보인다.

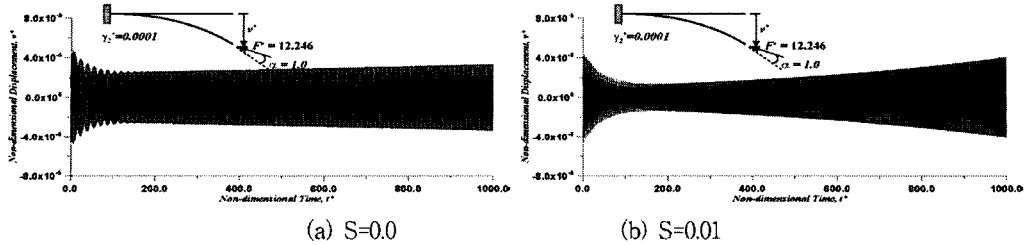


그림 4 미소한 내적감쇠계수에서의 외팔기둥의 동적응답 ($\alpha=1.0, \gamma_1^*=0.0, K^{NC}=K^{NC1}$)

미소한 내적감쇠효과에서도 충분한 크기의 하중은 외팔보 끝단의 폭발적인 변위증폭을 일으킨다. 이에 $F^*=20.1$ 에서 전단변형효과와 내적감쇠계수에 의한 시간응답을 분석하여 그림 5에 나타냈다. 그림으로부터 알 수 있듯이 내적감쇠효과가 작은 구조물에서는 구조물의 진폭에 전단변형효과가 미치는 영향이 크지만, 내적감쇠효과가 증가할수록 전단변형효과의 영향이 줄어든다는 것을 알 수 있다.

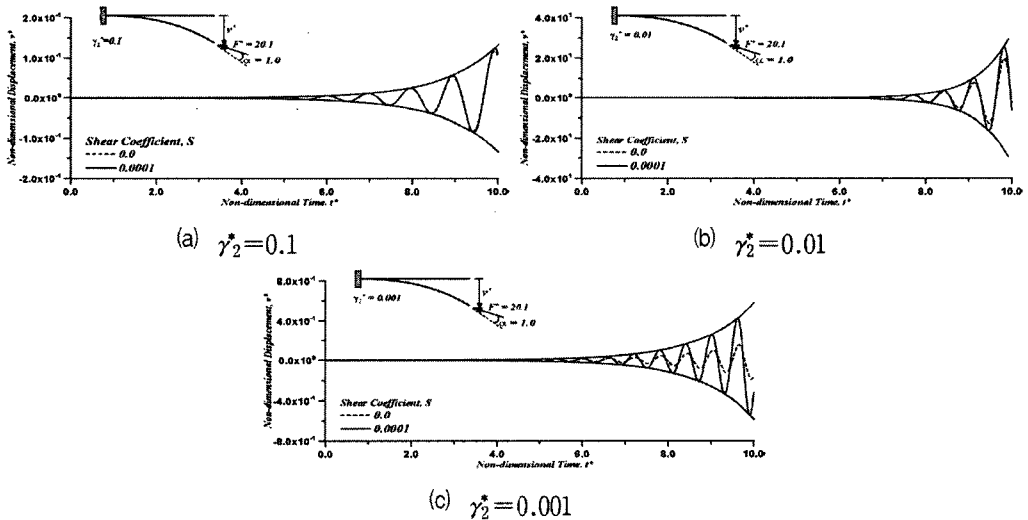


그림 5 내적감쇠계수의 변화에 따른 외팔기둥의 동적응답 ($\alpha=1.0, \gamma_1^*=0.0, K^{NC}=K^{NC1}$)

그림 6은 외적감쇠하중의 영향에 대한 Beck 기둥의 시간에 대한 끝단의 변위를 도시한 것이다. 그림 6(a)는 $\gamma_1=0.1$, 그림 6(b)는 $\gamma_1^*=1.0$ 인 경우로써 각각 $t^*=10.0$ 일 때 외팔보 끝단의 변위 v^* 가 2.0×10^5 와 3.0×10^3 을 나타내며, 이는 외적감쇠계수의 값이 커짐에 따라 진폭이 작아지고 구조물의 안정성을 증가시키는 것을 보여준다. 또한, 내적감쇠효과가 클수록 전단변형효과에 의해 구조물의 진폭이 작아지는데 반해 그

림 6(a-b)는 외적감쇠계수가 전단변형효과에 영향을 상대적으로 적게 미치고 있음을 보여주고 있다.

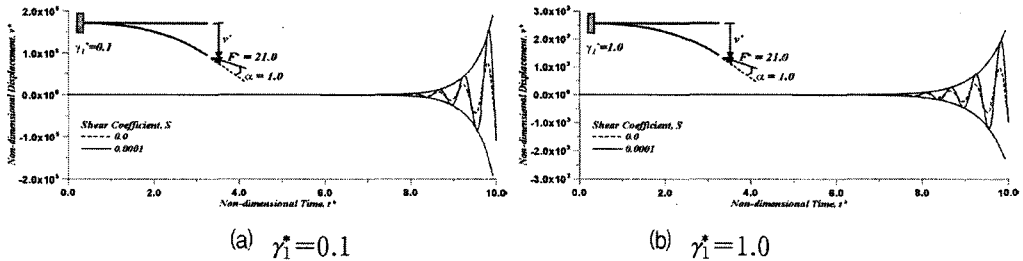


그림 6 동적좌굴하중에 대한 외적 감쇠하중의 영향($\alpha=1.0$, $\gamma_2^*=0.0$, $K^{NC}=K^{NC1}$)

4. 결론

전단변형 및 회전관성 효과를 고려하는 비보존력을 받는 외팔기둥의 대표적인 예인 Beck의 기둥에 대한 동적 안정성을 분석하기 위해서 전단이 고려된 Hermitian 다항식을 형상함수로 선택하여 Hamilton의 원리로부터 보의 운동방정식을 유도하고 전단변형이 고려된 경우의 무차원화 된 파라미터를 지배방정식으로부터 유도하였다. 또한 Newmark 방법을 이용하여 시간에 따른 Beck의 기둥 끝단의 증폭변화를 파악하였으며, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 전단변형을 고려할 경우 비보존력의 방향 변화를 단면회전각 β 및 처짐각 ψ 두 가지로 생각 할 수 있으나, 이의 차이는 제 1 좌굴하중값이 구조물의 지배적인 파라미터로 생각될 때 미소한 것으로 판명되며, 시간응답해석결과 S값이 클수록 동일한 하중 하에서 구조물의 동적좌굴 이후의 진동 경향은 더욱 커지는 것을 알 수 있다.
- 2) 미소한 내적감쇠효과에 의해 구조물의 동적좌굴하중은 감소하며 내적감쇠효과가 커질수록 동적좌굴하중은 다시 커지나 외적감쇠하중에 의해서 동적좌굴의 경계값을 변화시킨다. 또한 전단변형효과가 고려되었을 경우 제 1 동적좌굴 하중값에는 변화가 크게 관찰되지 않으나 시간응답에 의한 구조물의 진동양상에는 S=0.0001의 미소한 값에도 눈에 띄는 차이가 있음을 확인할 수 있다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 김문영, 이준석, 민병철 (2004) 유한요소기법을 이용한 비보존력이 작용하는 보-기둥 구조의 다양한 제변수 변화에 따른 동적 안정성 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 제 17권, 제 4호, pp.351-363.
- Barsoum, R.S. (1971) Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3, pp.63-87.

- Beck, M.** (1952) die Knicklast des eiseting eingespannten, tangential gedruckten Stabes, *ZAMP*, 4, pp.225-28.
- Bolotin, V.V.** (1961) Nonconservative problems of the theory of elastic stability, Moscow, *English translation published by Pergamon Press*, New York.
- Chen, L.W. and Ku, D.M.** (1991) Stability analysis of a Timoshenko beam subjected to distributed follower forces using finite elements, *Computers and Structures* 41, pp.813-819.
- Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I.** (1980) Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration* 70, pp.503-512.
- Lee, S. Y. and Yang, C. C.** (1993) Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration* 162, pp.177-184.
- Lee, S. Y. and Yang, C. C.** (1994) Non-conservative instability of non-uniform beams resting on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration* 169, pp.433-444.
- Leipholtz, H.H.E.** (1980) Stability of elastic systems, *Universities press*, Belfast, pp.312-388.
- Takahashi, I.** (1999) Vibration and stability of a non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force, *Computers and Structures* 71, pp.1585-591.
- Takahashi, I. and Yoshioka, T.** (1996) Vibration and stability of a non-uniform double-beam subjected to follower forces, *Computers and Structures* 59, pp.1033-1038.