

상대적으로 작은 기초를 갖는 급수탑의 안정성

Stability of Water Tower with a Relatively Small Footing

오 상 진* · 진 태 기**

Oh, Sang-Jin · Jin, Tae-Ki

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to investigate the stability of water tower with a relatively small footing. The water tower is modeled that the column carrying a container is supported by a rotational spring at the base and is of constant cross-section, with a weight per unit length of column axis. The column model is based on the Bernoulli-Euler beam theory. The Runge-Kutta method and Determinant Search method are used to perform the integration of the governing differential equation and to determine the critical values(critical own weight and critical buckling load), respectively. The critical buckling loads are calculated over a range of system parameters: the rotational stiffness parameter, the dimensionless radius of container and the own weight parameter of the column. The relation between the rotational stiffness parameter and the critical own weight parameter of the column is analyzed.

Keywords: water tower, critical buckling load, critical own weight.

1. 서 론

집단거주지역 및 공단지역 등에서 생활용수 및 소방용수를 공급하기 위한 시설로서 water tower가 이용되고 있다(사진 1). 그림 1에 나타낸 바와 같이 water tower는 상부의 저장탱크, 하부의 tower구조(기둥) 및 기초부분으로 구성된다. 여기서 저장탱크의 크기는 공급수량에 따라 결정되며, tower높이는 요구되는 수압을 고려하여 결정하게 된다. 그리고 기초의 크기는 지반특성에 따라 결정된다. 이러한 water tower의 설계시 검토되어야만 하는 역학적 특성 중의 하나는 좌굴특성이다. Water tower 상부의 저장탱크에는 많은 양의 물이 저장되기 때문에 하부의 tower구조는 상부탱크구조, 저장된 물 및 자중에 대한 충분한 내하능력을 보유해야만 하며, 이러한 내하능력은 앞에서 언급한 요소 외에도 기초부분의 평가에 의해 큰 영향을 받게 된다. 지반특성에 따라 결정되는 기초의 크기가 충분히 큰 경우에는 이 부분을 고정지점으로 처리할 수 있지만, 일정크기보다 작은 경우에는 어느 정도 회전능력을 갖는 지점으로 처리해야만 한다.

이러한 연구배경으로 본 연구에서는 상부에 구형 저장탱크를 갖는 water tower의 정적 안정성을 파악하고자 한다. 이를 위해 water tower를 저장탱크의 무게 및 자중이 작용하는 연약지점을 갖는 기둥문제에 모형화

* 정희원 · 남도대학 토목환경과 부교수 E-mail: sjoh@namdo.ac.kr

** (주)대동남

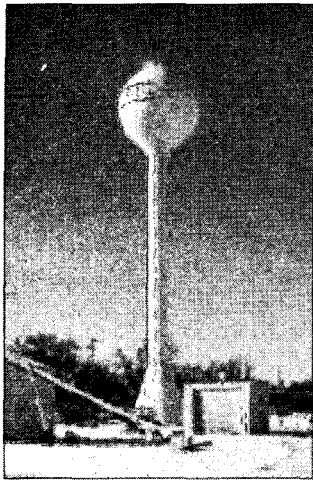


사진 1 Water tower 예

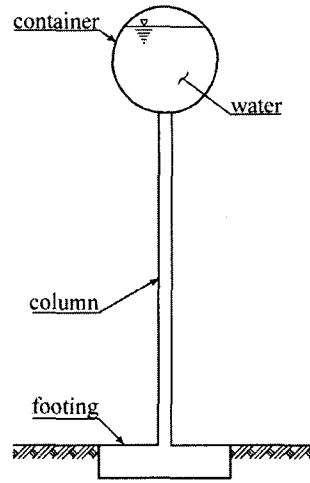


그림 1 Water tower 해석 모형

하여 대상구조의 좌굴에 대한 지배 미분방정식을 해석함으로써 임계좌굴하중 및 임계자중을 산출하고자 한다. 타문헌 결과와의 비교를 통해 본 연구결과가 검증되면, 여러 가지 제변수에 따른 해석결과를 제시하고자 한다.

2. 해석모형

그림 2(a), (b)는 water tower의 기초크기에 따른 2가지의 가능한 해석모형을 나타낸 것이다. 지반특성에 따라 결정되는 기초크기가 충분히 큰 경우에는 tower의 하단을 그림 2(a)에 보인 바와 같이 고정지점으로 처리할 수 있다. 그러나 기초크기가 상대적으로 작은 경우에는 그림 2(b)에 나타낸 바와 같이 회전스프링을 갖는 회전지점으로 보는 것이 타당하다. 이 그림들에서 P_s 와 P_w 는 각각 저장탱크 및 저장된 물의 무게, R 은 저장탱크의 반경, Q 는 tower구조의 단위길이당 중량이며, EI 와 l 은 각각 휨강성 및 지간길이(높이)이다. 그리고 그림 2(b)에서 S 는 회전강성이다.

그림 2(c)는 water tower의 좌굴형을 나타낸 것으로 v 와 y 는 각각 부재축상 임의점 x 및 z 위치에서 횡방향변위이며, θ 와 δ 는 각각 상단 즉 $x=0$ 에서의 단면회전각과 횡방향변위이다. 그림 2(c)에 보인 좌굴형상에서 휨-곡률관계는 식 (1)과 같다(Timoshenko 등, 1961).

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_x \tag{1}$$

부재축상 임의점 x 에서의 휨모멘트는 식 (2)와 같다.

$$M_x = -P(\delta - v) - \int_0^x Q(y - v) dz - PR\theta \tag{2}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 x 에 대하여 두 번 미분하면 다음 식과 같다.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -P \frac{d^2 v}{dx^2} - Qx \frac{d^2 v}{dx^2} - Q \frac{dv}{dx} \tag{3}$$

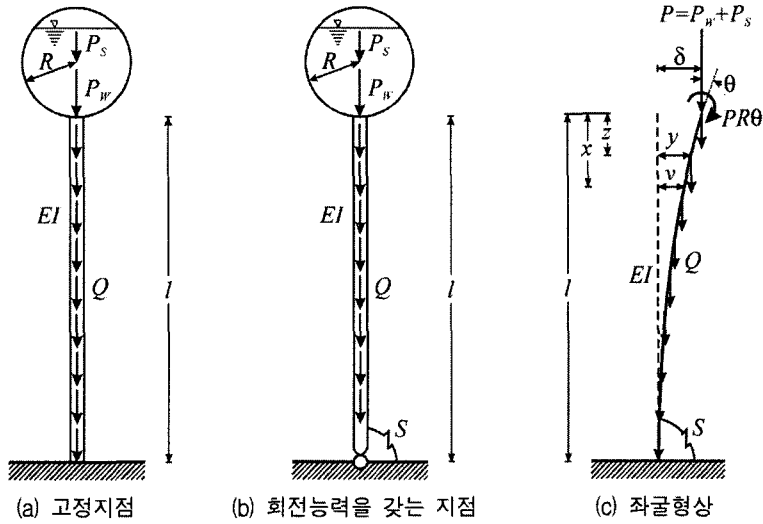


그림 2 기초크기에 따른 2가지 가능한 해석모형 및 좌굴형상

식 (3)을 무차원 형태로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{v}{l}, \quad p = \frac{Pl^2}{EI}, \quad a = \frac{Ql^3}{EI} \tag{4-7}$$

식 (3)을 무차원 형태로 다시 쓰면 식 (8)과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -p \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - a \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - a \frac{d\eta}{d\xi} \tag{8}$$

이상에서 식 (8)은 그림 2에 나타난 water tower의 좌굴을 지배하는 무차원 미분방정식이다.

부재상단 ($x=0$)에서는 휨모멘트 $M = -EI d^2 v / dx^2 = PR dv / dx$ 이고, 전단력 $V = EI d^3 v / dx^3 = -P dv / dx$ 이므로 부재상단 ($\xi=0$)에서 무차원 경계조건식은 식 (9) 및 식 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + pr \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + p \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi=0 \text{에서} \tag{9,10}$$

식 (9)에서 r 은 저장탱크의 반경 R 을 지간길이 l 로 정규화한 것이다.

기초크기가 상대적으로 작아 그림 2(b)에 나타난 바와 같이 회전능력을 갖는 지점으로 모형화하는 경우에는 변위 $v=0$, 휨모멘트 $M = -EI d^2 v / dx^2 = S dv / dx$ 이므로 무차원 경계조건식은 식 (11) 및 (12)와 같다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + s \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi=1 \text{에서} \tag{11,12}$$

식 (12)에서 s 는 무차원화한 회전강성계수로서 그 내용은 식 (15)와 같다.

$$s = \frac{Sl}{EI} \tag{13}$$

이상에서 식 (9)~(12)를 이용하여 식 (8)을 해석하면 그림 2(b)의 구조에 대한 좌굴하중 및 임계자중을 결정할 수 있으며, $s=\infty$ 인 경우에는 그림 2(a)의 구조에 대한 좌굴하중 및 임계자중을 결정할 수 있다.

3. 수치해석 에 및 고찰

3.1 해석방법 및 결과검증

본 연구에서는 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석방법으로 식 (8)의 지배 미분 방정식을 해석하여 좌굴하중 및 임계자중을 산출하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 대상구조의 좌굴하중 및 임계자중은 행렬값 탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하여 구하였다(Al-Khafaji 등, 1986; Oh 등, 1999).

표 1은 본 연구결과를 검증하기 위하여 ($q=1, r=0, s=10^6$), ($q=4.935, r=0, s=10^6$)인 경우 문헌(Timoshenko 등, 1961; Kerr, 1988)의 엄밀해와 비교한 것이다. 여기서 $s=10^6$ 은 water tower하단에서 단면 회전을 허용하지 않는 경우 즉 고정지점과 같은 조건임을 의미한다. 이 표에서 본 연구결과와 문헌들의 결과는 잘 일치함을 알 수 있어 본 연구결과를 검증할 수 있다. 표 2는 본 연구에서 산출한 무차원 임계자중을 검증하기 위하여 ($p=0, r=0, s=10$), ($p=0, r=0, s=10^6$)인 경우 문헌(Timoshenko 등, 1961; Kerr, 1988)의 엄밀해와 비교한 것이다. 이 표에서 본 연구결과와 문헌들의 결과는 잘 일치함을 알 수 있어 본 연구결과를 검증할 수 있다.

표 1 무차원 좌굴하중 비교

제변수	무차원 좌굴하중, p_{cr}		
	본연구	Timoshenko 등	Kerr
$q=1, r=0, s=10^6$	2.17	-	2.17
$q=4.935, r=0, s=10^6$	0.95	0.96	-

표 2 무차원 임계자중 비교

제변수	무차원 임계자중, q_{cr}		
	본연구	Timoshenko 등	Kerr
$p=0, r=0, s=10$	5.92	-	5.91
$p=0, r=0, s=10^6$	7.84	7.84	7.84

3.2 자중 및 저장탱크의 반경에 따른 좌굴하중

그림 3~5는 회전강성계수 s 가 각각 10, 100 및 10^6 인 경우 자중 q 및 저장탱크의 반경 r 에 따른 무차원 좌굴하중 p_{cr} 의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 저장탱크의 반경 r 이 증가하는 경우 좌굴하중은 감소함을 알 수 있다(반경 r 이 증가한다는 것이 저장탱크의 중량이 증가함을 의미하는 것은 아님.). 그리고 자중 q 가 증가하는 경우 무차원 좌굴하중은 감소함을 알 수 있으며, 자중 q 가 작을수록 저장탱크의 반경 r 의 증가에 따른 무차원 좌굴하중의 감소율이 큼을 알 수 있다. 또한 이 그림들에서 나머지 조건이 동일한 경우 회전강성계수 s 가 클수록 무차원 좌굴하중이 크며, s 가 클수록 저장탱크의 반경 r 의 증가에 따른 무차원 좌굴하중의 감소율이 큼을 알 수 있다.

3.3 회전강성계수에 따른 임계자중

그림 6은 $p=0$ 즉 저장탱크가 없는 경우 회전강성계수 s 에 따른 무차원 임계자중 q_{cr} 을 나타낸 것으로 회전강성계수 s 가 증가하는 경우 무차원 임계자중은 증가함을 알 수 있다. 이 그림의 일정구간(0~30정도)에서 회전강성계수 s 가 증가함에 따라 무차원 임계자중은 크게 증가함을 알 수 있다. 그러나 회전강성계수 s 가 일정값 이상이 되면 그 증가율이 감소하여 점선으로 표시(□표)된 일정한 값으로 수렴해 감을 알 수 있다. 여기서 점선으로 표시된 값 7.8373은 저장탱크의 하단에서 회전강성계수 $s=10^6$ 인 경우에 대하여 계산된 결과이다. 따라서 이 값으로의 수렴은 회전강성계수 s 가 증가하여 $s=\infty$ 로 되는 경우 즉 고정지점으로 변환됨을 의미한다.

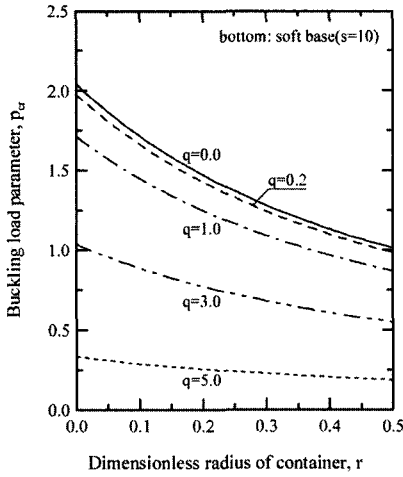


그림 3 $s=10$ 인 경우 자중 및 저장탱크의 반경에 따른 좌굴하중

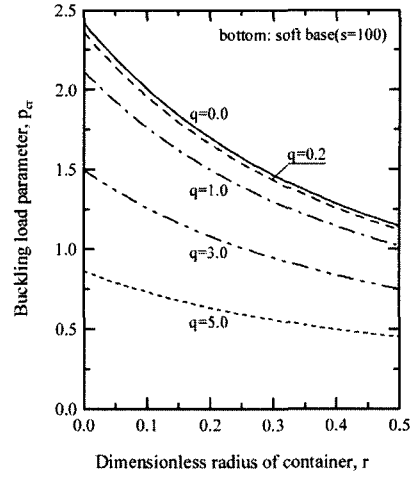


그림 4 $s=100$ 인 경우 자중 및 저장탱크의 반경에 따른 좌굴하중

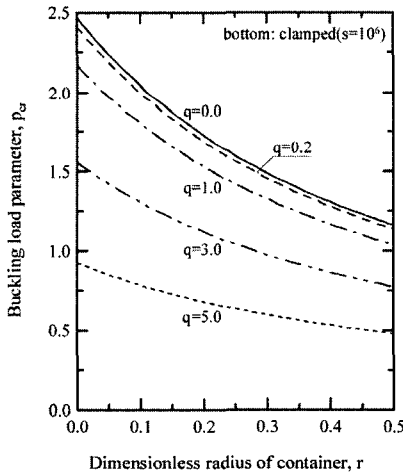


그림 5 $s=10^6$ 인 경우 자중 및 저장탱크의 반경에 따른 좌굴하중

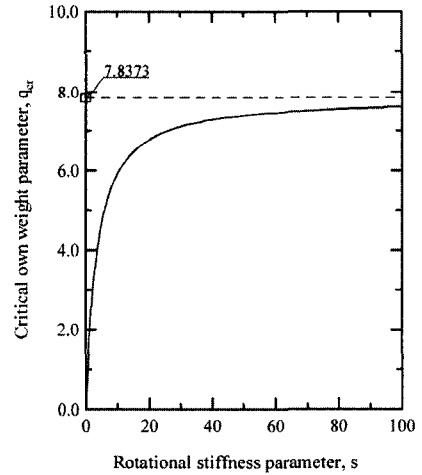


그림 6 s 에 따른 무차원 임계자중 ($p=0$)

3.4 자중 및 회전강성계수에 따른 좌굴하중

그림 7과 그림 8은 저장탱크의 반경 r 이 각각 0.05와 0.10인 경우 자중 q 및 회전강성계수 s 에 따른 무차원 좌굴하중 p_{cr} 의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 저장탱크의 반경 r 이 작을수록 좌굴하중 p_{cr} 이 큼을 알 수 있다. 또한 회전강성계수 s 가 증가하는 경우 무차원 좌굴하중은 증가하여 $s=10^6$ 인 경우에 대하여 계산된 결과(각각의 그림에 수록된 값들)로 수렴함을 알 수 있다. 그림 7과 그림 8에서 각각의 q 에 대응하는 무차원 좌굴하중 곡선이 횡축과 만나는 지점을 발견할 수 있는데, 이는 대응되는 q 값이 이 곳에서의 회전강성계수 s 에 대응되는 임계자중임을 의미한다. 따라서 회전강성계수 s 가 이 곳에서의 값보다 작은 경우에는 하중이 작용하지 않는 경우에도 자중에 의해서만 좌굴이 발생하게 된다.

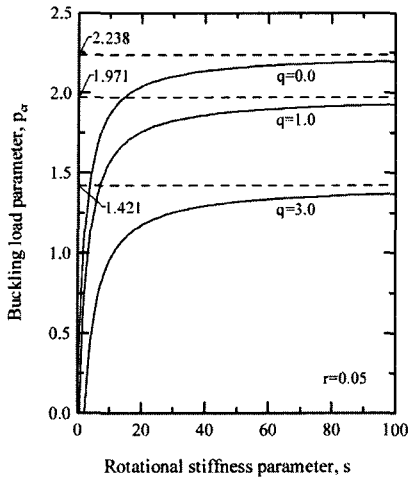


그림 7 q 및 s 에 따른 무차원 좌굴하중($r=0.05$)

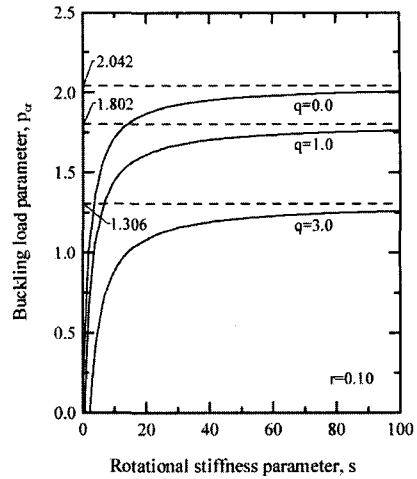


그림 8 q 및 s 에 따른 무차원 좌굴하중($r=0.10$)

한편 이 그림들에서 각각의 q 에 대응하는 무차원 좌굴하중 곡선이 횡축($p_{cr}=0$)과 만나는 지점은 저장탱크의 반경 r 에 관계없이 일정함을 알 수 있다.

4. 요약 및 결론

이 논문은 water tower의 안정성에 관한 연구로서 대상구조의 지배 미분방정식을 수치해석하여 좌굴하중 및 임계자중을 산출하였다. 본 연구결과를 문헌의 엄밀해와 비교하여 연구결과와 타당성을 보였으며, 본 연구를 통하여 얻어진 결과는 다음과 같다.

- 1) 저장탱크의 반경이 클수록 좌굴하중이 작다.
- 2) 자중이 클수록 좌굴하중이 작다.
- 3) 자중이 작을수록 저장탱크의 반경 증가에 따른 좌굴하중 감소율이 크다.
- 4) 회전강성계수가 클수록 저장탱크의 반경 증가에 따른 좌굴하중 감소율이 크다.
- 5) 회전강성계수가 증가하는 경우 좌굴하중 및 임계자중은 증가하여 water tower의 하단을 고정지점으로 해석한 좌굴하중 및 임계자중으로 수렴한다.

참고문헌

Al-Khafaji A.W., Tooley, J.R.(1986) *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston.

Kerr, A.D.(1988) Stability of a Water Tower. *Ingenieur-Archiv*, 58, pp.428-436.

Oh, S.J, Lee, B.K., Lee, I.W.(1999) Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation. *Journal of Sound and Vibration*, 219(1), pp.23-33.

Timoshenko, S.P., Gere, J.M.(1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill.