

변단면 Beck 기둥의 동적안정 해석

Dynamic Stability Analysis of Tapered Beck Columns

이 병 구* · 이 태 은** · 강 희 종*** · 김 권 식****

Lee, Byoung-Koo · Lee, Tae-Eun · Kang, Hee-Jong · Kim, Gwon-Sik

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the stability of tapered columns with clamped one end and carrying a tip mass of rotatory inertia with translational elastic support at the other end. The linearly tapered columns with the solid rectangular cross-section is adopted as the column taper. The differential equation governing free vibrations of such Beck columns is derived using the Bernoulli-Euler beam theory. Both the divergence and flutter critical loads are calculated from the load-frequency curves which are obtained by solving the differential equation. The critical loads are presented as functions of various non-dimensional system parameters: the taper type, the subtangential parameter, mass ratio and spring stiffness.

Keywords : tapered Beck column, divergence critical load, flutter critical load, subtangential follower force

1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본적인 구조요소로 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정성 문제에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로서 모형화하였으며, 기둥에 작용하는 축하중은 그림 1(a)와 같은 보존력 또는 그림 1(b), (c)와 같은 비보존력을 고려하였다(Bokaian, 1988; 류봉조 등, 1999).

최근 제어이론의 정립과 기술개발로 자동제어가 이루어지는 구조물이 많이 축조되고 있으며, 이러한 구조계는 비보존력을 형성하고 있어 Beck 기둥과 같이 비보존력을 받는 구조물의 안정성 문제는 현대 공학에서 매우 중요하게 다루어지고 있다(Sugiyama *et al.*, 1999).

1952년에 Beck(1952)이 그림 1(c)에 보인 접선종하중(tangential follower force)을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중을 처음으로 구한 이후에 비보존력인 종하중을 받는 기둥의 진동 및 안정특성에 관한 많은 연구가 이루어졌다.

보존력이 작용하는 구조물은 반드시 발산임계하중(divergence critical load)을 갖는 것은 잘 알려진 사실이다. 비보존력이 작용하는 구조물은 기하적 형상, 경계조건 및 비보존력의 특성에 따라서 발산임계하중 또는 동요임계하중을 갖는다. 이와 같은 비보존력을 받는 구조물의 안정성 해석은 정적 개념에 의해서는 해석할 수 없고 관성효과가 고려된 동적 개념에 의한 해석이 수행되어야 한다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr

** 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수

*** 정회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

이 논문은 비보존력인 정사중하중이 작용하는 변단면 Beck 기둥의 고유진동수와 임계하중에 관한 연구이다. 이러한 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 관계를 이용하여 발산 및 동요임계하중을 산출하였으며, 기둥의 제변수 변화에 따른 임계하중의 영향을 고찰하고 이를 그림에 나타내었다.

2. 기둥의 변단면

변단면 형태는 구조물의 특성에 따라 여러 가지의 형태를 가질 수 있다. 이 연구에서 기둥의 변단면은 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하였다. 선형 변단면의 형태는 구조물의 정·동적 및 안정해석에서 자주 이용되고 있으며 그림 2와 같이 폭 변단면, 깊이 변단면 및 정방형 변단면의 3 가지 형태가 있다.

그림 2에서 l 은 기둥길이이고, x 축은 기둥의 종방향 좌표이며 이와 수직한 d 축은 변단면의 변화제원을 나타낸다. 따라서 그림 2(a)의 폭 변단면은 d 축과 휨 축인 z 이 일치하고 변위 w 축은 d, z 축에 수직한다. 그림 2(b), (c)에 높이 및 정방형 변단면이 기술되어 있다. 기둥하단($x=0$)에서 $d=d_a$ 이고 기둥상단($x=l$)에서 $d=d_b$ 이다. 변화제원 d 는 직선적으로 변화하는 선형이므로 기둥축의 임의점 x 에서 d 는 식 (1)과 같이 표시되며, 식 (1)에서 β 는 식 (2)와 같이 정의되는 단면비로 무차원 양이다.

$$d = d_a(\beta - 1)x/l + d_a, \quad \beta = d_b/d_a \tag{1, 2}$$

식 (1)과 같은 변화제원을 갖는 선형 변단면의 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 는 다음과 같이 표현된다 (Kupta, 1985).

$$A = A_a[1 + (\beta - 1)x/l]^m, \quad I = I_a[1 + (\beta - 1)x/l]^n \tag{3, 4}$$

위에서 A_a, I_a 는 고정지점($x=0$)에서 기둥의 단면적과 단면2차모멘트를 나타내고, (m, n) 은 변단면의 기하적 특성을 나타내는 단면형상계수이며 이 값은 단면형상별로 다음과 같다(Kupta, 1985).

$$\text{폭 변단면 : } m = 1, n = 1 \tag{5a}$$

$$\text{깊이 변단면 : } m = 1, n = 3 \tag{5b}$$

$$\text{정방형 변단면 : } m = 2, n = 4 \tag{5c}$$

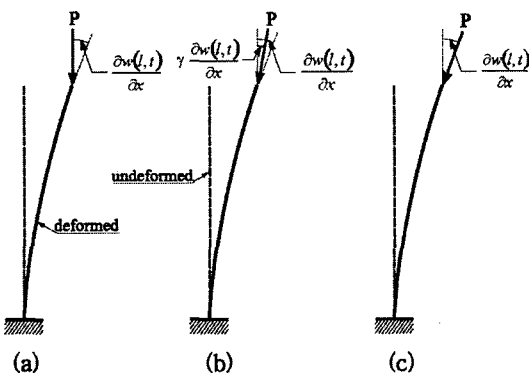


그림 1. 보존력과 비보존력이 작용하는 기둥

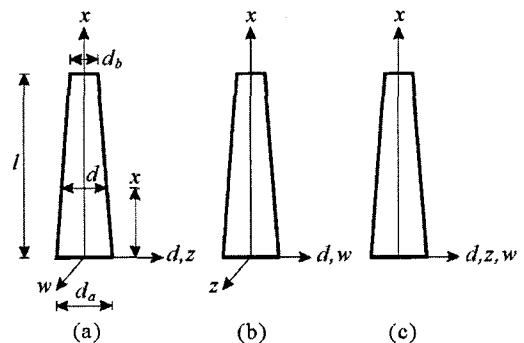


그림 2. 선형 변단면: (a) 폭 변단면 (b) 깊이 변단면 및 (c) 정방형 변단면

3. 수학적 모형

그림 3에서 점선은 길이가 l 이고, 자유단이 스프링으로 지지되어 있는 변단면 Beck 기둥을 나타내며, 실선은 자유단에 경사종하중 P 가 작용하고 있는 진동형의 예를 나타낸다.

이 그림에서 A 와 I 는 2.1절에서 정의한 바와 같이 기둥축 x 에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타내며, A_a 와 I_a 는 기둥하단($x=0$)에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타낸다. M 은 질량관성모멘트가 J 인 집중질량의 크기이며, K 는 자유단 스프링의 스프링 상수이다. α 는 자유단의 단면회전각으로 기둥의 해석결과로부터 얻어지는 값이며 입력변수는 아니다. γ 는 하중 P 의 경사 정도를 나타내는 경사변수(sub-tangential parameter)이다. 또한 $w(x,t)$ 는 횡방향 진동변위이고 t 는 시간이다.

Bernoulli-Euler보 이론에 의한 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식 (6)과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

여기서 E 와 ρ 는 기둥 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면, 횡방향의 동적 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수(r/s), i 는 모드 번호이다.

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l, \quad p = Pl^2/(EI_a), \quad k = Kl^3/(EI_a), \quad C_i = \omega_i^2 \sqrt{\rho A_a/(EI_a)} \quad (8-12)$$

여기서 식 (8), (9)의 (ξ, η) 는 직교좌표계 (x, w_x) 를 기둥길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이며, p 는 무차원 하중, k 는 무차원 스프링 강성, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (6)에 식 (3), (4), (7)을 대입하고, 식 (8)~(12)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 식 (13)과 같이 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

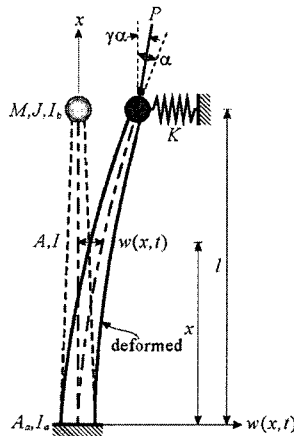


그림 3. 기둥의 진동형 및 제 변수

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = -\frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} - \left\{ \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} + \frac{p}{[1+(\beta-1)\xi]^n} \right\} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n}\eta \quad (13)$$

기둥하단($x=0$)은 고정지점이므로 자유진동의 진폭은 $w_x=0$ 이고 단면회전각은 $dw_x/dx=0$ 이 된다. 여기에 식 (8), (9)의 무차원 변수식을 적용하면 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\eta=0, \quad d\eta/d\xi=0, \quad \xi=0 \quad \text{에서} \quad (14,15)$$

자유단($x=l$)은 집중질량과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 휨모멘트는 $EI_b d^2w_x/dx^2 = \omega_i^2 J dw_x/dx$ 이며, 전단력은 $EI_b d^3w_x/dx^3 = -P(1-\gamma)dw_x/dx + (K_{tb} - \omega_i^2 M)w_x$ 이다. 여기서 I_b 는 자유단의 단면2차모멘트이며 식 (4)를 이용하여 산출할 수 있다. 이 식들에 무차원 변수인 식 (8)~(11)을 적용하면 무차원 경계조건을 다음의 식들과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{j\theta C_i^2}{\beta^n} \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{p(1-\gamma)}{\beta^n} \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{k_{tb} - \mu\theta C_i^2}{\beta^n} \eta = 0, \quad \xi=1 \quad \text{에서} \quad (17)$$

위에서 μ 는 식 (18)로 나타내지는 기둥상단의 집중질량 M 과 기둥 재료의 질량비이며, j 는 식 (19)로 표시되는 무차원 질량관성모멘트이다. 식 (16)에서 θ 는 등단면($\beta=1$) 기둥의 단면적 A_m 과 기둥하단에서 단면적 A_a 의 비(A_a/A_m)로 표현되는 변단면의 기하적 특성을 나타내는 무차원계수이다. 따라서 θ 값은 단면비 β 의 향으로 표시될 수 있으며, 폭 및 깊이 변단면은 식 (20a), 정방형 변단면은 식 (20b)로 표현된다.

$$\mu = M/(\rho A_m l), \quad j = J/(\rho A_m l^3) \quad (18, 19)$$

$$\theta = (\beta+1)/2, \quad \theta = (\beta^2 + \beta + 1)/3 \quad (20a, 20b)$$

4 수치해석 방법

유도된 미분방정식을 식 (14)-(17)의 경계조건을 이용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 $\eta(\xi)$ 을 구할 수 있다. 진동형 $\eta(\xi)$ 를 산출하기 위하여 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 미분방정식의 고유치인 C_i 를 산출하기 위하여 Regula-Falsi법을 결합한 시행착오적 행렬값 탐사법을 이용하였다.(Lee and Oh, 2000; 이병구 등, 2005)

본 연구에서는 $i=1, 2$ 의 최저차 2개의 C_i 를 산출하였다. 이렇게 산출된 하중 단계별 고유진동수를 이용하여 전형적인 하중-고유진동수 관계를 예로 들면 다음 그림 4와 같다.

이 그림에서 종하중 p 가 증가함에 따라 C_i 는 감소하고 $C_1=0$ 이 되는 □로 표시된 좌표의 p 값이 발산임계하중 p_d 이다. 발산임계하중에서 기둥은 정적으로 좌굴한다. 그림 1(a)에서 $\gamma=0$ 인 Euler기둥은 반드시 발산임계하중을 갖는다. 이 그림의 또 다른 곡선에서 $C_1=C_2$ 가 되는 ■로 표시된 좌표의 p 값이 동요임계하중 p_f 이고, 이 C_i 값이 동요고유진동수(flutter frequency) C_f 이다. 동요임계하중에서는 2개의 진동형이 서로 같아지기 때문에 기둥이 자유진동하게 되면 기둥은 동요하여 동적 불안정 상태에 빠진다. 그림 1(c)에 보인 $\gamma=1$ 인 점선종하중이 작용하는 경우에는 반드시 동요임계하중을 갖는다. 한편, 그림 1(b)에 보인 $0 < \gamma < 1$ 인 경사종하중이 작용하는 기둥에서는 γ 값의 크기에 따라서 임계하중의 형태가 발산 또는 동요임계하중으로 달라질 수 있다.

5. 수치해석 예 및 고찰

그림 5는 깊이 변단면, $\beta=0.6$, $\mu=0.3$, $j=0.1, k=10$, $\gamma=0.05/0.19/0.20/0.80$ 에 대하여 하중-고유진동수곡선을 나타낸 그림이다. $\gamma=0.05, 0.19$ 에서는 p 가 증가함에 따라 C_i 는 계속 감소하며 \square 로 표시된 $C_1=0$ 이 되는 발산임계하중 $p_d=7.48, 9.89$ 를 갖는다. 이 기등에 발산임계하중이 작용하면 기등은 정적으로 좌굴한다. 이 그림의 $\gamma=0.20, 0.80$ 에 대해서는 \blacksquare 로 표시된 $C_1=C_2$ 가 되는 동요고유진동수 $C_j=1.40, 3.93$ 을 갖고 이에 대응하는 동요임계하중은 $p_f=11.22, 5.84$ 이다. 동요임계하중이 작용하는 기등이 외부로부터 충격을 받아 자유진동하게 되면 기등은 곧 동요하여 동적으로 안정성을 잃게 된다. 따라서 정확한 동요임계하중을 산출하는 것은 기등의 안정성을 확보하기 위하여 매우 중요한 일이다.

그림 6은 $\beta=0.6$, $\gamma=0.5$, $j=0.1$ 인 폭 변단면 기등의 질량비 μ 의 변화에 따른 동요임계하중 p_f 와 동요고유진동수 C_j 의 변화를 $k=0, k=10$ 에 대하여 나타낸 것이다. 실선은 동요임계하중을 나타내고, 점선은 동요고유진동수를 나타낸다. 이 그림에서 $k=0$ 즉, 스프링이 없는 경우에는 μ 값이 증가하면 p_f 도 증가하며, $k=10$ 인 경우에는 μ 값이 증가하면 p_f 는 감소하다 일정값 이상에서는 다시 증가한다. 동요고유진동수 C_j 는 두 경우 모두 μ 값의 증가에 따라 감소함을 알 수 있다.

그림 7은 $\beta=0.6$, $\gamma=0.5$, $\mu=0.3$, $j=0.1$ 인 변화폭, 변화높이 및 정방향 변단면 기등에서 스프링 강성 k 의 변화에 따른 임계하중 p_d, p_f 의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 k 값이 증가하면 발산임계하중(실선)은 증가하다가 일정값에 도달하면 동요임계하중(점선)으로 변환되며, 폭 변단면 > 깊이 변단면 > 정방향 변단면 순으로 임계하중의 크기 및 임계하중의 형태가 변화되는 k 값이 큼을 알 수 있다. k 값이 1000인 경우 모든 변단면에서 일정값의 임계하중으로 수렴해 감을 알 수 있는데, 이는 k 가 1000정도에 도달하면 기등 자유단이 회전지점의 형태로 전환되어 k 값이 1000이상으로 증가하여도 임계하중의 변화가 거의 나타나지 않는다.

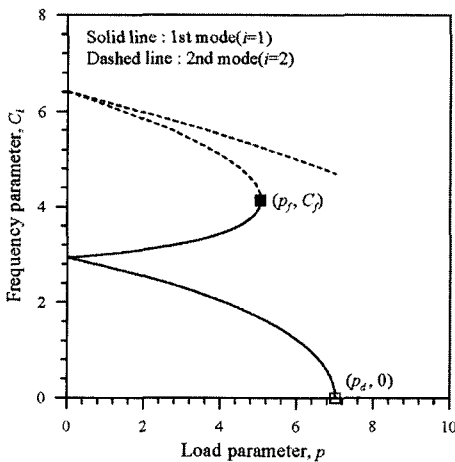


그림 4. 하중-고유진동수 곡선의 예

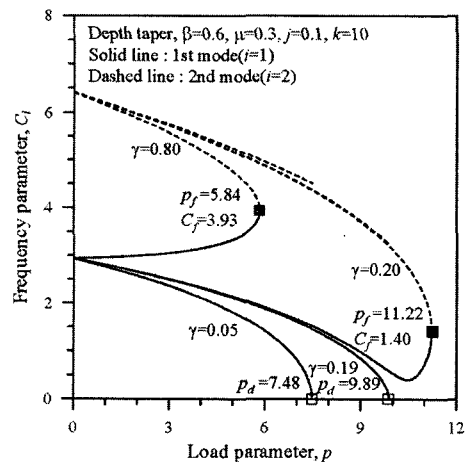


그림 5. 하중-고유진동수 곡선

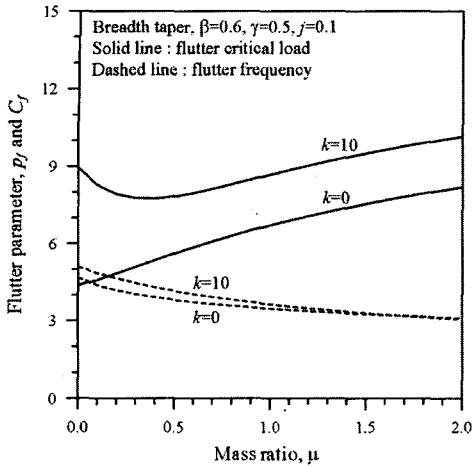


그림 6. 질량비-임계하중 곡선

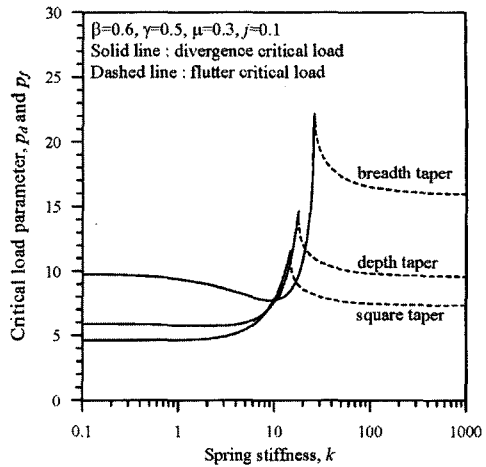


그림 7. 스프링강성-임계하중 곡선

6. 결 론

이 논문은 자유단에 집중질량 및 스프링을 갖고 경사종하중이 작용하는 변단면 Beck 기둥의 안정성에 관한 연구이다. 대상기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 수치적 기법을 개발하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 곡선으로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 수치해석의 결과를 분석하여 질량비 및 스프링 강성이 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다. 이 연구의 결과는 변단면 Beck 기둥의 정·동적 안정해석에 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

- 류봉조, 임경민, 이종원, 한재섭 (1999) 2층 탄성기초위에 놓인 불균일 테이퍼진 보의 진동과 안정성. 한국소음진동공학회 논문집, 제 9권, pp. 828-834.
- 이병구, 이태은, 안대순 (2005) 원호형 변화폭 대판의 면의 자유진동. 대한토목학회 논문집, 제 25권, 제 1A호, pp. 125-132.
- Bokaian, A. (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial loads. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65.
- Kupta, A.K. (1985) Vibrations of tapered beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, pp. 1244-1247.
- Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2507-2518.
- Beck, M. (1952) Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 3, pp. 225-228.
- Sugiyama, Y., Langthjem, M.A. and Ryu, B.J. (1999) Realistic follower forces. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, pp. 779-782.