

일정체적 캔틸레버 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동

Buckling Loads and Post-Buckling Behavior of Cantilever Column with Constant Volume

이 승 우* · 이 태 은** · 김 권 식*** · 이 병 구****

Lee, Seung-Woo · Lee, Tae-Eun · Kim, Gwon0Sik · Lee, Byoung-Koo

ABSTRACT

Numerical methods are developed for solving the elastica and buckling load of cantilever column with constant volume, subjected to a compressive end load. The linear, parabolic and sinusoidal tapers with the regular polygon cross-sections are considered, whose material volume and span length are always held constant. The differential equations governing the elastica of buckled column are derived. The Runge-Kutta method is used to integrate the differential equations, and the Regula-Falsi method is used to determine the horizontal deflection at free end and the buckling load, respectively. The numerical methods developed herein for computing the elastica and the buckling loads of the columns are found to be efficient and reliable.

Keywords: buckling load, constant volume, post-buckling behavior, Runge-Kutta method, Regular-Falsi method, regular polygon cross-section

1. 서 론

기둥은 보, 평판과 함께 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이며, 토목, 기계, 선박, 항공 등 각종 공학분야에서 뼈대 구조물로 많이 이용되고 있다. 복잡하고 거대한 구조물도 이러한 단위구조의 결합체로 이루어지므로 이들 단위구조의 정적, 동적 거동을 나타내는 결과들을 이용하면, 전체 구조물의 거동결과를 예측하는 등의 사전정보를 얻을 수 있다. 따라서 단위구조의 거동을 정확하게 표현할 수 있는 값을 결정하는 것은 대단히 중요한 연구과제이다.(Haftka, *et al.*, 1990)

최근에는 재료공학의 발달로 토목공학을 비롯한 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성이 확보될 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동해석이 필수적이다. 이러한 대변형 문제에 관한 연구는 Euler에 의해 처음 발표된 이후 많은 과학자들에 의해 활발히 진행되고 있다.(Kamat and Simites, 1973)

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 석사과정 E-mail: iamwoz@wonkwang.ac.kr

** 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수

*** 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 박사과정

**** 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

이러한 연구배경으로 본 논문은 축하중을 받는 정다각형 단면 캔틸레버 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동 해석에 연구목적이 있다. 대상부재는 동일한 지간길이와 체적을 갖고, 단면깊이가 선형, 포물선 및 정현 함수로 변화하는 변단면 캔틸레버 기둥이다. 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계가 비선형인 Bernoulli-Euler 보이론(Timoshenko, *et al.* 1974)을 이용하여 대상 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 Runge-Kutta method를 이용하여 수치적분 하였으며, 미지수인 자유단의 수평처짐 및 고유치인 좌굴하중은 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다. 수치해석의 결과로 다양한 선형 및 정다각형의 변수 변화에 따른 자유단의 수평, 수직처짐 및 회전각의 변화를 고찰하고, 최대의 좌굴하중을 갖는 최적단면비를 제시하였다.

2. 변단면의 정의

그림 1(a)은 본 연구에서 대상으로 하고 있는 지간길이가 l 이고, 체적이 V 로 일정한 기둥의 단면깊이의 변화를 나타낸 것이다. 본 연구에서 기둥의 단면은 정다각형 단면이며, 단면의 도심에서 꼭지점까지의 단면 깊이는 h 이다. 본 연구에서 h 는 단면의 축방향 좌표 s 에 따라서 변화하는 변단면 기둥이므로 기둥의 단면적 A 및 단면 이차모멘트 I 는 s 에 따라서 변화한다.

그림 1(a)에서와 같이 $s=0$ 즉, 고정단에서 $h=h_c$ 이고, $s=l$ 즉, 자유단에서 $h=h_f$ 이다. 기둥의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비로 정의되는 α 를 다음과 같이 도입한다.

$$\alpha = h_f / h_c \tag{1}$$

단면깊이가 h 인 정다각형의 단면적 A 및 단면 이차모멘트 I 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = c_1 h^2, \quad I = c_2 h^4 \tag{2, 3}$$

여기서,

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad c_2 = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[1 + \frac{\tan^2(\pi/n)}{3} \right] \tag{4, 5}$$

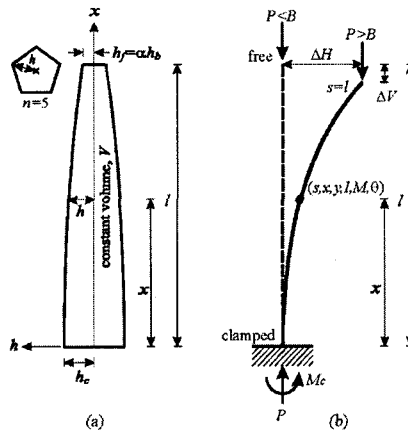


그림 1(a) 단면깊이의 변화 (b) 정확탄성곡선의 제 변수

식 (4), (5)에서 n 은 정다각형의 변수이며 n 이 ∞ 이면 즉, 원형 단면이면 c_1 값과 c_2 값은 각각 π 와 $\pi/4$ 로 수렴한다. 또한 정다각형 단면의 도심을 통과하는 축은 모두 주축이며, 따라서 식 (3)과 같이 주어지는 단면 이차모멘트는 도심축에 상관없이 모두 동일한 값을 갖고 주단면 이차모멘트이다.

이제 단면깊이 h 를 결정해주는 s 에 관한 h 의 함수식을 정의한다. 본 연구에서는 연구의 대상기둥으로 h 가 선형, 포물선 및 정현 함수로 변화하는 변단면 기둥을 채택하였다.

그림 1에서 변단면 기둥의 함수식 h 는 직교좌표계 (s, h) 에서 $(0, h_c)$, $(l, \alpha h_c)$ 를 통과하므로 직선, 포물선 및 정현 함수의 방정식은 다음과 같다.

$$\text{직선} : h = h_c [c_3(s/l) + 1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (6)$$

$$\text{포물선} : h = h_c [c_3(s/l)^2 + 1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (7)$$

$$\text{정현} : h = h_c [c_3 \sin\{\pi s/(2l)\} + 1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (8)$$

여기서,

$$c_3 = \alpha - 1 \quad (9)$$

주어진 단면비 α 및 단면깊이변화식 h 로 정의되는 변단면 기둥의 체적 V 는 식 (6)~(8)을 이용하면 다음과 같이 산출되고 이 체적 V 는 모두 일정하다.

$$V = \int_0^l A ds = c_4 (c_1 h_c^2 l) \quad (10)$$

위의 식에서 c_4 는 단면깊이가 h_c 로 일정한 기둥의 체적 V 에 대한 직선, 포물선 및 정현 변단면 기둥의 체적의 비율로 그 값은 각각 식 (11), (12), (13)과 같다.

$$\text{직선} : c_4 = (\alpha^2 + \alpha + 1)/3, \quad \text{포물선} : c_4 = (3\alpha^2 + 4\alpha + 8)/15, \quad \text{정현} : c_4 = c_3^2/2 + 4c_3/\pi + 1 \quad (11-13)$$

3. 지베미분방정식

그림 1(b)는 지간길이가 l 이고, 체적이 V 인 본 연구대상 기둥의 정확탄성곡선 및 체변수를 나타내고 있다. 대상 기둥은 단부에 축하중 P 가 재하되며, 선형 및 단면의 변화에 대해 모두 동일한 지간길이가 l 과 동일한 체적 V 를 갖는다. 그림에서의 실선은 점선으로 표시된 기둥이 하중 재하 후에 수평처짐 ΔH , 수직처짐 ΔV 만큼 변화하여 최종적으로 평형상태가 된 정확탄성곡선을 나타낸다. 임의점 (x, y) 에서 기둥의 곡선길이는 s 이며, 기둥의 축은 비긴장성이므로 기둥의 축상 임의점 s 에서 단면이차모멘트 I 는 하중재하 전 s 에서의 I 와 같다. 또한 하중재하 전의 지간길이는 하중재하 후에도 l 을 유지한다. 이 그림에서 M_c 는 모멘트 반력, M 은 휨 모멘트, θ 는 임의점 s 에서의 회전각이다.

그림 1(b)에 나타낸 정확탄성곡선의 미분방정식은 다음과 같다.(Timoshenko, *et al.*, 1974)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI}, \quad 0 \leq s \leq l \quad \text{에서} \quad (14-16)$$

식 (16)에서 E 는 재료의 탄성계수이다.

그림 1(b)의 정확탄성곡선상 임의점 s 에서 휨 모멘트 M 은 다음 식과 같이 산출할 수 있다.

$$M = -M_c + Py = -P\Delta H + Py \quad (17)$$

본 연구대상 기둥의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다.

$$x=0, y=0, \theta=0, s=0 \text{에서} \quad (18-20)$$

$$M=0, s=l \text{에서} \quad (21)$$

본 연구에서는 수치해석과정의 효율성을 높이고자 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\lambda = s/l, \xi = x/l, \eta = y/l, \delta_h = \Delta H/l, \delta_v = \Delta V/l, p = \frac{Pl^4}{EV^2}, m = \frac{Ml^3}{EV^2} \quad (22-28)$$

위의 식들에서 $\lambda, \xi, \eta, \delta_h$ 및 δ_v 는 각각 $s, x, y, \Delta H$ 및 ΔV 를 지간길이 l 로 정규화 한 것이며, p 는 무차원 하중, m 은 무차원 휨 모멘트이다.

식 (14), (15)에 무차원변수 식 (22)~(24)를 대입하면 식 (29), (30)을 얻을 수 있고, 식 (3), (6)~(8), (16), (17)과 무차원 변수들을 이용하면 식 (31)과 같은 무차원미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos\theta, \frac{d\eta}{d\lambda} = \sin\theta, 0 \leq \lambda \leq 1 \text{에서} \quad (29, 30)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{c_1^2 c_4^2 m}{c_2 i} = -\frac{c_1^2 c_4^2 p\eta - p\delta_h}{c_2 i}, 0 \leq \lambda \leq 1 \text{에서} \quad (31)$$

위의 식 (32)에서 i 는 단면의 변화에 따라 변화하는 단면변화 형상함수식이며, 이를 무차원변수들을 이용하여 무차원화하면 각 선형별로 다음의 식들과 같다.

$$\text{직선} : i = [c_3\lambda + 1]^4, \text{포물선} : i = [c_3\lambda^2 + 1]^4, \text{정현} : i = [c_3\sin(\pi\lambda/2) + 1]^4 \quad (32-34)$$

경계조건 식 (18)~(21)은 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식으로 유도된다.

$$\xi=0, \eta=0, \theta=0, \lambda=0 \text{에서} \quad (35-37)$$

$$p\eta - p\delta_h = 0, \lambda=1 \text{에서} \quad (38)$$

4. 수치해석 방법

이상에서 유도된 미분방정식과 경계조건을 이용하면, 주어진 기둥의 기하학적 형상 및 하중조건에 대한 정확탄성곡선을 얻을 수 있다. 유도된 지배미분방정식 식 (29)-(31)은 초기치 문제이므로 $\lambda=0$ 에서의 경계조건 즉 식 (35)-(37)을 이용하여 수치적분하고, 이 상미분방정식에서 미지수인 δ_h 값은 $\lambda=1$ 에서의 경계조건인 식 (38)을 이용하여 찾을 수 있다. 이 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method(Carnahan, et al., 1969)를 이용하였고, 미지수인 자유단의 수평처짐 δ_h 는 Regula-Falsi method(Carnahan, et al., 1969)를 이용하여 산출한다.

기둥 자유단의 수평처짐 δ_h 가 발생하는 순간의 하중 P 가 좌굴하중 B 가 된다. 따라서 미분방정식 식

(31)에 포함되어있는 δ_h 가 매우 작을 때의 p 값을 근사적인 무차원 좌굴하중 b 로 생각할 수 있다. 따라서 식 (31)에 $p = b$ 를 대입하고 정리하면 다음의 식 (39)와 같으며, 이 식에서 δ_h 값은 이미 결정된 매우 작은 값이다. 본 연구에서 기둥이 좌굴할 때의 수평처짐 $\delta_h = 1 \times 10^{-8}$ 으로 결정하였으며, 이렇게 결정된 무차원 좌굴하중 b 는 식 (40)과 같다.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{c_1^2 c_4^2}{c_2} \frac{b\eta - b\delta_h}{i}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ 에서, } b = \frac{Bl^4}{EV^2} \quad (39, 40)$$

이제 무차원 좌굴하중 b 는 식 (40), (29), (30)의 미분방정식과 경계조건 식 (35)-(38)을 이용하면 구할 수 있다. 수치해석 방법은 정확탄성곡선 문제와 동일하다.

5. 수치해석 예 및 고찰

그림 2는 정삼각형 단면을 갖는 일정체적 기둥의 무차원 좌굴하중 b 와 단면비 α 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 α 값이 증가함에 따라 b 값이 증가하다가 최대값을 보인 후에 감소함을 알 수 있다. b 값이 최대값을 가질 때가 최강기둥이며 이때의 단면비가 최적단면비이다. 이 그림에서 □로 표시된 가장 높은 점들의 b, α 값이 최강기둥의 좌굴하중 및 단면비가 된다. 선형 변단면(점선)의 경우 최강기둥은 $\alpha = 0.58, b = 0.295$ 에서, 포물선 변단면(실선)의 최강기둥은 $\alpha = 0.51, b = 0.309$ 에서, 정현 변단면(쇄선)의 최강기둥은 $\alpha = 0.67, b = 0.282$ 에서 발생한다. 포물선 변단면이 다른 변단면에 비해 더 큰 좌굴하중을 보이고 있으며, 특히 $0.1 \leq \alpha \leq 0.6$ 의 범위에서는 직선 및 정현 변단면에 비해 매우 큰 좌굴하중값을 갖는다. 따라서 이 범위에서는 포물선 변단면으로 기둥을 설계하는 것이 유리하다.

그림 3은 정삼각형 포물선 변단면의 최강기둥($\alpha = 0.51$)과 등단면 기둥($\alpha = 1$)의 평형경로를 나타낸 것이다. 이 그림에서 무차원 하중 p 와 거동값 사이의 관계는 비선형성을 보이며, 최강기둥의 평형경로가 등단면 기둥에 비하여 항상 아래쪽에 존재하고 있어 최강기둥의 하중에 대한 저항능력이 더 큼을 알 수 있다. 이 그림에서 □로 표시된 p 값이 해당기둥의 좌굴하중이며, 최강기둥의 좌굴하중이 등단면 기둥의 좌굴하중에 비하여 약 30%정도 더 크게 나타났다.

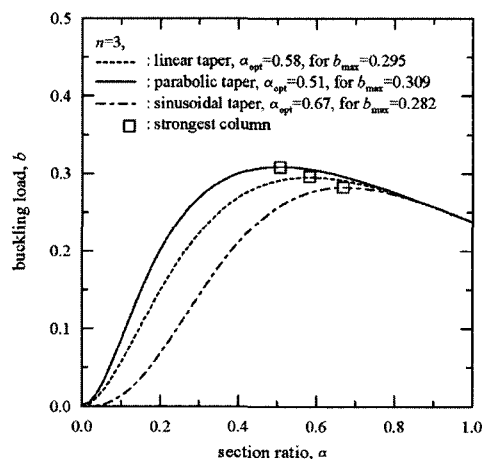


그림 2. $b - \alpha$ 관계곡선

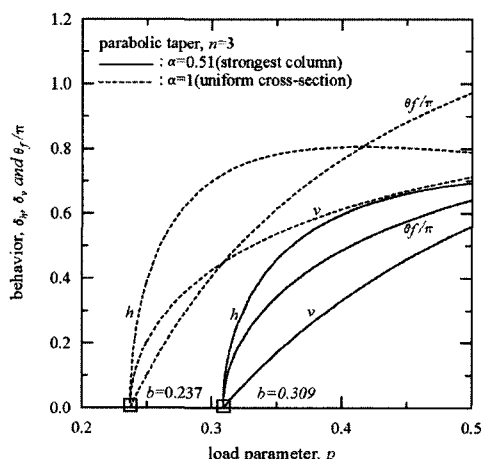


그림 3. 평형경로

표 1. 정다각형 변수에 따른 최적단면비*

n	α_{opt}	b
3	0.580	0.295
4	0.580	0.256
5	0.580	0.248
6	0.580	0.246
10	0.580	0.245
∞	0.580	0.244

* 직선 변단면, $p=0.3$

표 1은 직선 변단면 기둥에 $p=0.3$ 이 작용할 때 정다각형의 변수변화에 따른 최대좌굴하중과 최적단면비를 나타낸 것이다. 최대좌굴하중은 정삼각형 단면에서 가장 크게 나타나 정삼각형 단면이 가장 유리함을 알 수 있고, $n=5$ 이상의 단면은 그 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 또한 α_{opt} 는 n 의 증가와 상관없이 일정한 값을 나타낸다.

6. 결 론

이 논문은 일정체적 정다각형 캔틸레버 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴거동에 관한 연구이다. 본 연구에서 해석대상 기둥은 단면깊이의 변화식이 직선, 포물선 및 정현식으로 표현되는 정다각형 단면의 캔틸레버 기둥을 채택하였다. 대상기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고, 이를 수치해석하여 대상기둥의 좌굴하중 및 후좌굴거동을 산출하였다.

일련의 수치해석 결과로부터 다음의 내용을 고찰할 수 있었다.

1. 기둥의 내하력은 포물선, 직선, 정현의 변단면 순으로 크다.
2. 최강기둥의 단면비는 정다각형의 변수와 상관없이 일정하다.
3. 최대좌굴하중 이하의 좌굴하중에 대하여 거동값이 '0'인 단면비가 존재한다.

참고문헌

- Haftka, R. T., Grudal, Z. and Kamat, M. P. (1990) *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publisher.
- Kamat, M. P. and Simites, G. J. (1973) Effect of Shear Deformations and Rotatory Inertia on Optimum Beam Frequencies, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 9, pp.51-62.
- Lee, B. K. and Mo, J. M. (1996) Free Vibrations and Buckling Loads of Tapered Beam-Columns of Regular Polygon Cross-Section with Constant Volume, *Journal of Korean Society of Noise and Vibration Engineering*, Vol. 6, No. 5, pp.587-594.
- Niordson, F. I. (1965) On the Optimal Design of a Vibrating Beam, *Q. App. Math.*, Vol. 23, pp.47-53.
- Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J.O. *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc.
- Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, Jr. W. (1974) *Vibration Problem in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- B. Carnahan, H.A. Luther and J.O. Wilkes (1969) *Applied Numerical Methods*, JohnWiley & Sons Inc.