

# 기하학적으로 정확한 셸 유한요소와 NURBS기반의 Trimmed Surface 모델링과의 연동

## Integration of Geometrically Exact Shell Finite Element With Trimmed Surface Modeling base on the NURBS

최진복\* · 노희열\*\* · 조맹효\*\*\*  
 Choi, Jin-Bork · Roh, Hee-Yuel · Cho, Maenghyo

### ABSTRACT

The linkage framework of geometric modeling and analysis based on the NURBS technology is developed in this study. The NURBS surfaces are generated by interpolating the given set of data points or by extracting the necessary information to construct the NURBS surface from the IGES format file which is generated by the commercial CAD systems in the present study. Numerical examples shows the rate of displacement convergence according to the parameterization methods of the NURBS surface. NURBS can generate quadric surfaces in an exact manner. It is the one of the advantages of the NURBS. A trimmed NURBS surface that is often encountered in the modeling process of the CAD systems is also presented in the present study. The performance of the developed geometrically exact shell element integrated with the exact geometric representations by the NURBS equation is compared to those of the previous reported FE shell elements in the selected benchmark problems.

**Keywords:** shell element, NURBS surface, trimmed surface, cutout

### 1. 서 론

셸(shell)은 곡률을 가지는 얇은 구조물로 정의되며, 자동차, 항공기 그리고 선박을 비롯하여 건축물의 아치(arch) 또는 돔(dome) 등과 같이 공간을 효율적으로 활용함과 동시에 경량화가 요구되는 분야에 널리 사용되는 구조물이다. 그러나 셸은 그 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로 셸 문제를 접근하는 것은 까다롭다. 따라서 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대하여 강력하게 적용할 수 있는 도구인 유한요소법이 셸의 공학적 문제의 수치해석에 적합하며 이에 관련한 연구들이 지난 수십 년 간 활발히 진행되어 왔고 현재도 많은 연구가 진행 중이다. Ahmad<sup>(1)</sup> 등이 감절점 셸요소(degenerated shell element)를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 국지 좌표계와의 변환관계를 이용하면 셸을 해석 하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 감절점 요소 개발이 관심을 모았다. 그러나 감절점 요소는 요소 내에서의 기하학적인 셸의 형상을 근사를 통하여 보간하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원 박사과정

\*\* 삼성전자 프린트 사업부 책임연구원

\*\*\* 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

어떻게 되나 실제 복잡한 형상의 셸을 해석하는 데는 한계가 있다. 그러므로 기하학적 형상을 정확하게 표현하는 셸 이론에 근거한 유한요소의 개발이 필요하다.

한편, 최근 CAD(Computer Aided Design) 시스템에 사용되는 곡면의 기하학적 모델링은 대부분 NURBS(Non Uniform Rational B-Spline Surface)를 사용하여 수행되어지고 있다. 일반적으로 NURBS를 사용하면 곡면은 2개의 매개변수로 나타낼 수 있고, 일반 곡선좌표계에서 주어지는 셸 유한요소 또한 2개의 매개 변수로 일반 곡면을 표시하기 때문에 CAD에서 주어지는 곡면 표현식과 동일하여 직접적인 연동이 가능하게 된다. 즉 CAD 시스템에서 얻은 셸 형상의 기하학적인 모델링을 셸 구조물의 유한요소 해석 루틴과 연결하는 것이 가능해지며 모든 기하학적인 계산은 NURBS방법에 의해 얻은 국지 접선 표면에서 이루어진다. 본 연구자들에 의해 셸 곡면의 기하 정보를 정확히 적용할 수 있는 셸 요소가 개발되었고<sup>(2)</sup> 이 셸 요소를 B-스프라인 곡면과 연동시켰으며<sup>(3)</sup> B-스프라인 환경 하에서 곡면 모델링과 해석을 통합한 연구를 발표하였다<sup>(4)</sup>. 또한 유한요소의 질점의 위치를 변경하여 해의 정밀도를 향상시키는 r-adaptivity방법에 대한 연구도 수행되었다.<sup>(5)</sup>

셸 유한요소 해석에서 곡면을 얻는 방법으로 다음과 같은 방법들을 생각할 수 있다. 첫째, 실린더나 반구와 같이 곡면의 수학적 식이 주어지는 경우를 생각할 수 있고 이 경우 곡면의 매트릭이나 곡률텐서 등을 주어진 위치 벡터로부터 계산할 수 있다. 다음으로 디지털 스캐너와 같은 장비를 이용하여 곡면을 스캐닝한 직교좌표상의 점 데이터로부터 보간이나 근사를 통해 NURBS 곡면을 생성하는 것이다. 세 번째 방법은 CAD 소프트웨어에서 모델링 된 곡면 데이터를 직접 사용하는 것이다. 이것은 앞서 언급한 바와 같이 최근의 CAD 시스템에서 곡면 생성이 대부분 NURBS 기반에서 이루어지기 때문에 가능하며, 이를 통해 CAD의 곡면 모델링과 기하학적으로 정확한 셸 유한요소를 효율적으로 연동할 수 있기 때문에 보다 일반적이고 유용한 방법이라 할 수 있다.

본 연구에서는 셸의 기하학적 모델링과 셸의 유한요소 해석을 연동할 수 있는 프레임 워크를 상용 소프트웨어 라이브러리 환경을 이용하여 개발하고자 한다. 기하학적 셸의 형상을 NURBS 곡면으로 모델링하기 위하여 그 정확성과 유용성이 검증된 라이브러리인 Solid Modeling Solutions, Inc. (SMS)의 SMLib™(NURBS Library)<sup>(6)</sup>를 사용하였으며, 이를 통하여 일반 좌표계에 기초한 셸 유한요소와 NURBS 곡면을 기반으로 통합된 설계 프레임워크는 모델링 부분에서 생성한 기하 정보를 해석 부분에서 그대로 사용하며, CAD 곡면 모델링 시 빈번하게 발생하는 트림(trim)곡면에 대한 해석도 가능하게 된다. 모델이 변형된 후에도 유한요소 격자를 새로 생성하지 않고 기존의 격자를 그대로 사용하므로 일반적으로 여러 차례 반복 시행하는 모델링과 해석에서의 계산 비용을 크게 절감할 수 있다.

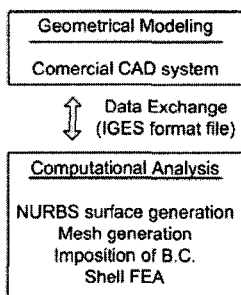


그림 1 곡면 모델링과 셸 유한요소해석의 통합

## 2. Naghdi 쉘 이론과 유한요소

### 2.1 Naghdi 쉘 이론

일반 곡선좌표계와 텐서에 기초한 쉘 이론에서는 일반적으로 변형률 텐서를 다음과 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = (g'_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (1)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 일반좌표계에 기반을 둔 텐서에 대한 기초는 참고문헌<sup>(7),(8)</sup>에서 확인할 수 있다.

### 2.2 혼합 가정 변형률 범함수

Naghdi 쉘에 기초한 유한요소 해석에서 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 발생하는 잠김(locking) 현상을 해결하기 위해 가정된 변형률장을 사용하고 잠김을 효과적으로 억제하는 부분 혼합 변분 범함수를 도입한다. 본 연구에서 전단 변형률과 인장 변형률을 변분 변형률 매개변수로 도입한다. 변분 범함수로부터 유한요소 정식화의 자세한 과정은 참고문헌<sup>(2)</sup>에 주어진다.

### 2.3. 유한요소 정식화

유한요소 정식화를 위한 변위와 변형률 가정식은 다음과 같다.

$$(u_\alpha, w, \phi_\alpha) = \sum (u_{\alpha i}, w_i, \phi_{\alpha i})N_i + (u_\alpha, w, \phi_\alpha)_b N_b$$

$$(\epsilon_\alpha, \gamma_\alpha) = (P_1 \vec{a}, P_2 \vec{\beta}) \quad (2)$$

여기서  $N_i$ 는 형상함수,  $N_b$ 는 거품함수 형태의 형상함수이고,  $P_1, P_2, \alpha, \beta$ 는 가정된 변형률장과 그 매개변수이다. 자세한 내용은 참고문헌<sup>(4)</sup>을 참고할 수 있다.

부분 혼합 범함수와 가정된 변형률 매개변수를 이용하여 유한요소 이산화룰 수행하면 이산화 된 범함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi(\vec{a}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2} \vec{a}^T K_b \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a}^T H_m \vec{a} + \vec{a}^T G_m \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{\beta}^T H_\gamma \vec{\beta} + \vec{\beta}^T G_\gamma \vec{a} - \vec{a}^T \cdot f \quad (3)$$

$$\text{여기서 } K_b = \int_\Omega B_b^T D_b B_b \sqrt{ad} d\theta^1 d\theta^2, H_m = \int_\Omega P_1^T D_m P_1 \sqrt{ad} d\theta^1 d\theta^2, G_m = \int_\Omega P_1^T D_m B_m \sqrt{ad} d\theta^1 d\theta^2$$

$$H_\gamma = \int_\Omega P_2^T D_\gamma P_2 \sqrt{ad} d\theta^1 d\theta^2, G_\gamma = \int_\Omega P_2^T D_\gamma B_\gamma \sqrt{ad} d\theta^1 d\theta^2 \text{이고, } \vec{f} \text{는 외력에 의해 요소에 가해지는 하중}$$

벡터,  $\vec{a}$ 는 요소 절점 변위 벡터,  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 는 미지 변형률 벡터이다. 문자에 사용한 하첨자  $m, b, \gamma$ 는 각각 멤브레인, 굽힘, 전단 변형을 표시한다.

요소의 자유도 벡터는 절점의 자유도와 일반적인 쉘 곡면의 접평면에서 2개의 곡면의 접선방향 변위( $u_\alpha$ )와 수직변위( $w$ ), 2개의 회전각변위( $\phi_\alpha$ )로 표시된다.

$$\vec{d} = [(u_1, u_2, w, \phi_1, \phi_2)_1, \dots, (u_1, u_2, w, \phi_1, \phi_2)_n, (u_b, u_b, w_b, \phi_b, \phi_b)]^T \quad (4)$$

여기서, 4절점 요소의 경우는  $n=4$ 이다.

$\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 에 대한 변분을 취함으로써 다음과 같은 요소 평형 방정식을 얻는다.

$$K^e \vec{d} = \vec{f} \tag{5}$$

여기서 요소 강성 행렬  $K^e$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_\gamma^T H_\gamma^{-1} G_\gamma \tag{6}$$

### 3. NURBS 곡면의 표현

개발된 쉘 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서 NURBS 곡면을 구성해야 한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다<sup>(9)</sup>

#### 3.1 NURBS 곡면의 정의

$u$ 방향과  $v$  방향으로 각각  $p, q$  의 차수를 가지는 NURBS 곡면은 다음과 같이 정의 된다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \tag{7}$$

여기서  $P_{i,j}$ 는  $u, v$  방향으로의 조정점 망을 나타내며  $w_{i,j}$ 는 가중치 그리고  $N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ 는 각각 B-스플라인의 기저 함수를 나타낸다. 그리고 각 방향으로의 조정점 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U &= \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \\ V &= \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서  $r = n + p + 1, s = m + q + 1$  인 관계를 만족하며, 아울러  $u$  방향으로의 기저함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} N_{i,0}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ N_{i,p}(u) &= \frac{u - u_i}{u_{i+p+1} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \end{aligned} \tag{9}$$

$v$  방향으로도 마찬가지로 기저 함수를 생각할 수 있다.

$[u_i, u_{i+1}]$ 는 매듭 간격이라고 하는데 일반적으로 편의를 위하여  $u_0 = 0, u_n = 1$ 로 둔다.

#### 3.2 Trimmed NURBS 곡면의 격자생성 및 기하 정보의 계산

트림(trimmed)곡면은 CAD 시스템에서 복잡한 형상의 곡면 설계 시 빈번하게 접하게 되는 곡면 중의 하나이다. 대표적으로 두 곡면이 교차하는 경우를 생각할 수 있고 이때 교차 부위에 교선이 생기게 되고 이 교선은 두 곡면 위에 동시에 존재하게 된다. 일반적으로 트림곡면은 NURBS 곡면 그 자체와 트림곡선으로 정의되는데, 여기서 트림곡선은 NURBS 곡선으로 정의된다. 본 연구에서는 해석과 검증에 사용한 트림 곡면은 상용 CAD 시스템 (Rhino<sup>®</sup>, Solid Works)에서 모델링 된 것이며 CAD 시스템의 곡면 모델링과 해석을 보다 효과적으로 연동시키기 위하여 서로 다른 CAD 시스템들 사이에 데이터를 효과적으로 주고 받기위하여 만들어진 널리 알려진 표준 파일 형식중의 하나인 IGES 파일 형식으로 데이터를 교환하였다. 유한요소해석을 위해서는 격자생

성과정이 필요하게 되는데, 본 연구에서는 트림 곡면의 격자 생성을 위해 다음과 같은 단계를 거치게 된다.

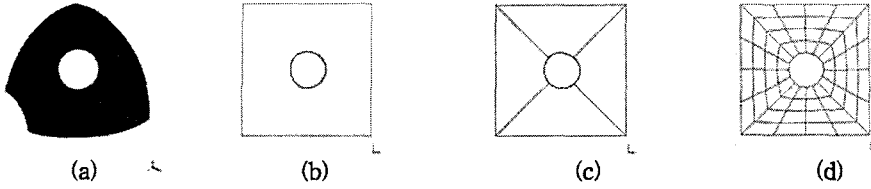


그림 2 트림 곡면에 대한 유한요소해석을 위한 격자 생성

그림 2(a) 와 같은 트림 곡면은  $(u, v)$  매개 변수 영역에 그림 2(b) 같이 사상될 수 있고, 본 연구에서는 9절점 또는 4절점의 사각형 셀 요소를 사용하기 때문에 사각형 격자생성을 위해 영역을 그림 2(c)와 같이 분할 하고 각 부 영역에 대해서 격자생성을 수행하여 그림 2(d)와 같은 격자정보를 얻게 된다. NURBS 곡면은 매개변수 영역 상의 한 점과 3차원 직교 좌표 영역상의 점 사이에 일 대 일 대응 관계가 성립되므로 이 격자 정보를 3차원 상의 본래 NURBS곡면으로 다시 사상시키면 그림 3(b)와 같다.

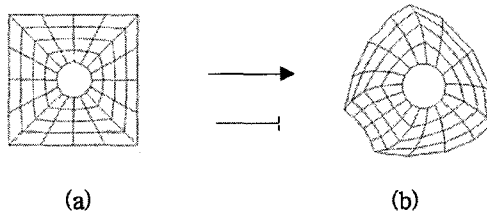


그림 3 매개변수 영역에서 3차원 곡면으로의 사상

기하학적으로 정확한 셀 유한요소 정식화를 위해서는 가우스 적분점에서의 곡면의 메트릭과 곡률텐서, 2종 Christoffel 기호 등의 계산이 요구된다. 본 연구에서는 이러한 곡면의 기하정보를 NURBS 곡면 식으로부터 직접 계산함으로써, 곡면의 수학적 식이 주어지지 않은 일반적인 자유 곡면 및 트림 곡면에 대한 해석을 용이하게 할 수 있도록 하였다. 그림 4는 각 요소의 가우스 적분점에서 계산된 곡면의  $u, v$  각 방향으로의 절선벡터 및 법선벡터를 도시하고 있다. 일반적으로 평면 셀 요소의 경우 그림 5에서와 같이 가우스 적분점에서의 기하정보를 각 절점에서의 값들을 보간하여 계산하기 때문에 기하학적인 오차를 내포할 수 밖에 없다. 그러나 NURBS 곡면 식으로부터 직접 곡면의 기하 정보를 계산하게 되면 이러한 기하학적 오차를 줄일 수 있으며 요소 수가 비교적 적다하더라도 좋은 해석 결과를 얻을 수 있다.(그림 6)

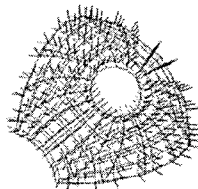
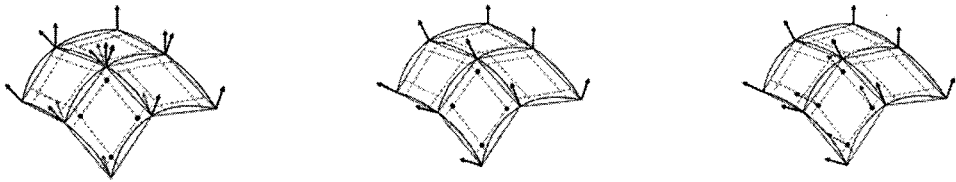


그림 4 가우스 적분점에서 계산된 기저벡터



(a) 각 요소에서의 법선 벡터      (b) 절점에서의 법선 벡터      (c) 가우스 적분점에서의 법선벡터

그림 5 평면 쉘 요소의 법선 벡터 계산



(a) NURBS 곡면식으로부터 법선벡터 계산      (b) 기하학적으로 정확한 쉘 요소와 평면 쉘 요소의 법선벡터

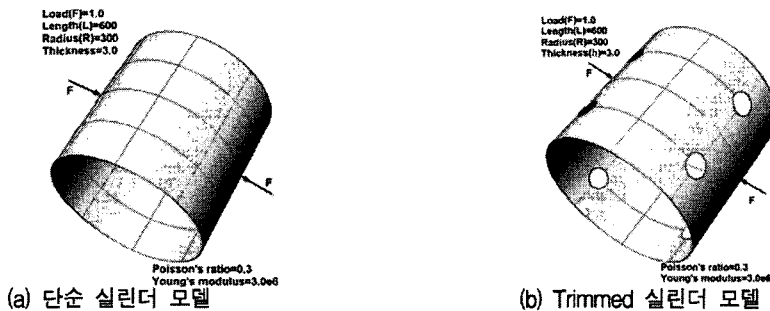
그림 6 기하학적으로 정확한 쉘 요소의 곡면 기하정보 계산

#### 4. 해석 결과

개발된 프로그램을 검증하기 위하여 정해(exact solution)가 주어진 몇 가지 잘 알려진 쉘 모델 과 트림 (trim) 쉘 모델들에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 곡면들은 NURBS 기반으로 생성되었으며, 앞서 언급한 가정변형률장과 거품함수가 도입된 9절점 쉘 요소를 사용하였다.

##### 4.1 집중하중이 주어진 실린더 예제

양단에 막(diaphragm) 경계조건이 주어진 단순 실린더 모델과 트림 실린더 모델에 대하여 해석을 수행 하였다. 그림 7의 (a)와 같은 조건에 대하여 실린더의 최대변위는  $0.18541 \times 10^{-4}$  이며, 그 해석 결과는 그림 8과 같다. 일반적으로 chord-length 나 centripetal parameterization 방법이 곡면을 잘 표현한다고 알려져 있으나 본 실린더 예제의 경우에는 uniform 방법이 나은 수렴성을 보여주었으며 그림 8(b)에서 보는 바와 같이 해석에 사용한 요소 수가 비교적 적은 경우에도 양호한 수렴성을 보여주고 있다.

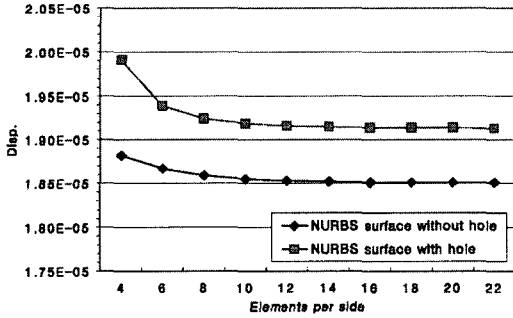


(a) 단순 실린더 모델

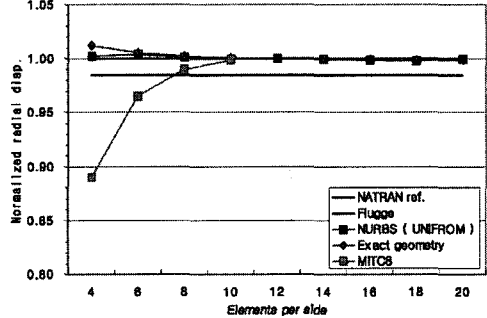
(b) Trimmed 실린더 모델

그림 7 해석 모델

또한 그림 7(b)와 같이 단순 실린더 모델의 표면에 구멍이 뚫린 트림곡면을 해석한 결과 그림 8(a)와 같이 수렴성을 확인 할 수 있었다.



(a) 변위 수렴성

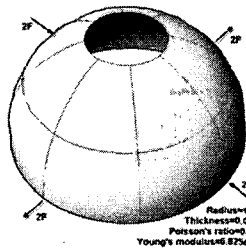


(b) 단순 실린더 모델의 변위 수렴성 비교

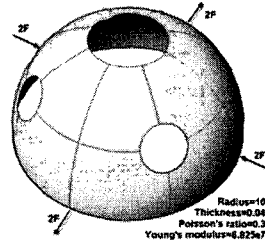
그림 8 해석결과

4.2 집중하중이 주어진 반구 예제

상단에 18°의 구멍이 뚫린 반구 예제에 대하여 해석을 수행하였다. 하단은 변위에 대한 경계조건이 없는 자유로운 상태이다. 이 그림 9(a)모델에 대한 최대 변위의 정해는 0.094로 알려져 있다. 그림 10(b)에서 보는 바와 같이 비교적 적은 요소를 사용하여도 월등한 수렴성을 보여준다.

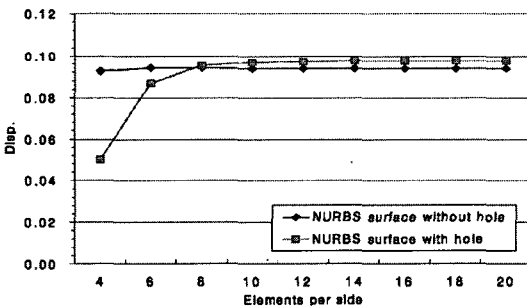


(a) 단순 반구 모델

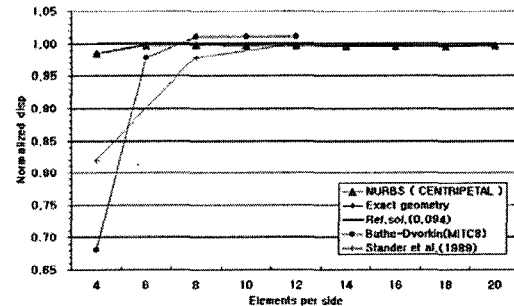


(b) Trimmed 반구 모델

그림 9 해석 모델



(a) 변위 수렴성



(b) 단순 반구 모델의 변위 수렴성 비교

그림 10 해석결과

## 5. 결 론

본 연구에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소와 NURBS곡면을 이용한 기하 모델링의 연동을 가능하게 하는 프레임워크를 구현하였다. 임의의 형상의 곡면에 대한 효과적인 해석을 위하여 기하학적으로 정확한 쉘 요소를 적용하였고 잠김 현상을 해결하기 위하여 가정된 변형률 방법과, 격자 뒤틀림에 민감하지 않도록 거품함수를 도입하였다. 매개화된 쉘 곡면의 일반적인 형태를 생성하기 위해서 NURBS곡면 구현에 대한 다양한 기능을 제공하는 SMLib를 이용하여 NURBS곡면을 생성하였고, 현재의 일반 좌표계에 기초한 텐서기반 쉘 요소가 임의의 자유 곡면을 다룰 수 있도록 하였다. 매개변수 영역에서 구성된 기하학적으로 정확한 쉘 요소는 컴퓨터 이용 곡면 모델링(CAGD modeling)과 쉘 유한요소(Shell FE) 해석의 연동 체계를 가능케 한다. 잘 알려진 benchmark 쉘 구조에 대한 해석을 통하여 본 연구를 통해 구현된 프레임워크의 성능을 검증하였으며, 이로써 기존의 감절점 쉘 요소의 한계를 극복하고 일반적인 CAD 시스템과 유기적으로 연동할 수 있는 통합설계에 대한 가능성을 확인하였으며 cutout을 포함하는 트림(trim)곡면의 해석을 가능하도록 함으로써 그 적용 범위를 확장시켰다.

## 참고 문헌

1. Ahmad,S.,Iron,B.,and Zienkiewicz,O., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419-451
2. Maenghyo Cho, Hee-Yuel Roh, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates", *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.56, No.1, 2003, pp.81-115
3. H.Y.Roh, M.Cho, "The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces," *Computer Meth. Applied Mech and Engrg.* 193 (2004) 2261-2299.
4. H.Y.Roh, M.Cho, "Integration of geometric design and mechanical analysis using B-spline functions on surface," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, 62(2005) 1927-1949.
5. M.Cho, S.K.Jun, "R-adaptive mesh generation for shell finite element analysis," *Journal of Computational Physics*, 199(2004) 291-316
6. SMLib™, Solid Modeling Solutions, Inc. <http://www.smlib.com/>
7. Naghdi PM, "Foundations of Elastic Shell Theory, Progress in Solid Mechanics 4", Edited by Sneddon, 1963,
8. Green AE, Zerna W., Theoretical Elasticity, 1968
9. Les Piegl, Wayne Tiller., " The NURBS Book", Springer-Verlag, New York, NY Second Edition, 1997