

역V형 철골 중심가새골조의 정적/동적 지피기동 · 설계법

Static and Dynamic Design of Zipper Columns in Inverted V Braced Steel Frames

이 철 호* · 김 정 재**

Lee, Cheol-Ho · Kim, Jung-Jae

ABSTRACT

Inverted V (or chevron) braced steel frames have been seen as being highly prone to soft story response once the compression brace buckles under earthquake loading. To salvage chevron braced frames, the concept of the zipper column was proposed many years ago such that the zipper column can redistribute the inelastic demand over the height of the building. However, rational design method for the zipper column has not been established yet. In this paper, a new dynamic design method for the zipper column was proposed by combining the refined physical braced model and modal pushover analysis. Inelastic dynamic analysis conducted on 6 story building model showed that the proposed method was more superior to the existing static design method and was very effective in improving seismic performance of chevron braced steel frames.

Keyword: Inverted V (chevron) braced steel frames, Zipper column, Soft story, Buckling, Modal pushover analysis, Seismic

1. 서론

중심가새골조(Concentrically-Braced Frames, CBFs)는 가새의 축강성 및 축강도를 활용하기 때문에 건물의 횡력에 대한 저항력을 최소의 철골물량으로 확보할 수 있는 매우 효과적인 시스템이다. 대부분의 접합부에 전단접합을 사용할 수 있으므로, 접합비용을 대폭 절감할 수 있으며 구조해석 및 설계도 용이하다. 원래 가새골조는 탄성 거동을 전제로 풍하중에 대한 저항력 증진을 위해 개발되었다. 그러나 비탄성 거동을 수반하는 지진하중 작용시에는 최선의 구조시스템이 될 수가 없다. 지진하중 작용시에는 가새좌굴 이후의 열등한 에너지소산능력 구조물의 낮은 부정정도, 반복하중 하에서의 가새 및 접합부의 취성파단 등이 문제로 대두된다. 특히 일반적 중심가새골조의 치명적 결함은, 건물에 가해지는 비탄성 변형을 건물의 높이 방향으로 분배할 구조요소가 결핍되어 있다는 점이다. 따라서 특정 층의 가새에 최초의 좌굴이 발생하면, 최초 좌굴층에 소성변형이 계속 집중되는 연약층(soft story) 거동으로 의해 건물의 붕괴로 이어질 가능성이 매우 높다.

특히 역V형 가새골조에서 압축가새 좌굴 후 내진거동을 악화시키지 않으려면, 좌굴 후의 대변형 상태에서 보에 유입되는 수직 불균형력을 보가 항복치 않고 저항하는 것이 중요하다. 그러나 가새좌굴 이후의 수직 불균형력을

* 책임저자, 정회원 · 서울대학교 건축학과 부교수 E-mail: ceholee@snu.ac.kr

** 학생회원 · 서울대학교 건축학과 박사과정 E-mail: kitchen0@snu.ac.kr

보의 휨강도로써 저항시키는 방안은 보의 사이즈가 너무 과도해지는 문제점이 있다. 이에 대한 합리적 대안은 보의 휨응력으로 수직 불균형력을 저항하는 대신, 인장 타이 바로서 수직 불균형력을 상층으로 전달하여 여러 층에 걸쳐서 가새의 좌굴을 발생시킴으로써 특정층에서의 연약층 형성을 완화하는 것이다. 물론 타이 바의 도입에 따른 건축계획상의 가변성의 감소는 불가피하다. Khatib 등(1988)은 역 V형 가새골조의 보 중앙부를 타이 바로서 긴결하여 설계할 것을 제안한 바가 있는데 이러한 일련의 타이 바 전체를 지퍼기둥(zipper column)이라 칭하였다. 이 방안의 활용과 관련하여 아직 규명되지 않은 것 가운데 하나가 지퍼기둥의 적정 설계강도의 문제이다. 최근에 이철호 등(2003)은 압축가새의 좌굴발생 순서를 감안하여 보강 인장재를 경제적으로 설계할 수 있는 정적 설계방안을 제시하였다. 그러나 이 방안은 간편하기는 하지만 수직 불균형력 산정에 있어서 가새의 세장비의 영향과 고차모드의 영향을 비롯한 동적 거동을 반영치 못하는 단점이 있다. 본 연구에서는 이를 개선할 수 있는 동적 타이바 설계법을 모달 푸쉬오버 해석법을 이용하여 제시하고 비선형 동적해석을 통하여 방안의 타당성을 입증하였다.

2. 골조설계

그림 1은 본 연구의 사례해석을 위해 설계된 6층 역V형 가새골조의 구조평면도와 구조입면도를 나타낸 것이다. 고정하중과 적재하중은 각각 $500(\text{kgf}/\text{m}^2)$ 와 $250(\text{kgf}/\text{m}^2)$ 을 택하였다. 가새가 설치된 스패의 보-기둥 접합부만을 모멘트접합부로 설계하였고, 나머지는 전단접합으로 처리하였다. 따라서 모든 형력은 가새가 설치된 공간에서 지지하도록 설계되었다. 건축구조설계기준 상의 지진지역1, S_B 지반에 위치한 사무소건물을 대상으로 건축구조설계기준(대한건축학회, 2005)에 따라 국내의 평균적 실무관행을 가정하여 설계하였다(그림 2 참조). 현행의 내진규준에서 요구하는 대로 중력하중과 등가정적하중의 조합효과에 강도요건과 층간변위 제한조건만 만족되도록 골조를 설계하였다. 철골중심가새골조로서 반응수정계수는 5.0이다. 6층 모델골조의 설계(계수)밀면전단력은 135.3 tf로써 건물 자중의 6.19% 수준이다. 표 1에 부재치수 및 사용강종을 정리하였다. 가새는 각형강관을 사용하였다. 국내의 경우 내진성능확보와 관련된 가새부재의 세장비나 폭두께비 제한과 관련한 특별한 규정이 없다. AISC 내진규정을 참조하여 살펴보면, 가새의 세장비(KL/r)는 82~106의 범위로서 AISC에서 요구하는 세장비의 한계치 171(연성가새골조) 및 123(보통가새골조)을 만족하고 있다. Khatib 등(1988)의 분류에 의할 때 6층 모델의 가새는 중간세장비 범위(60~130)에 든다.

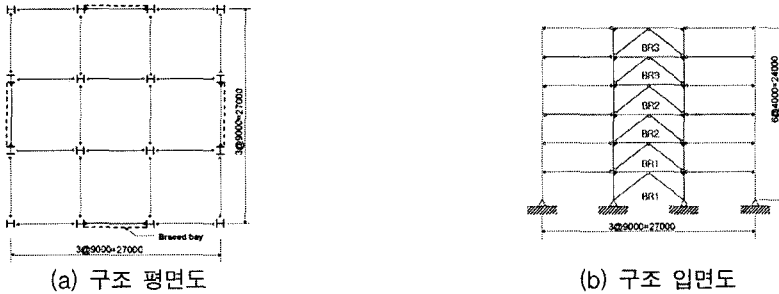


그림 1. 6층 모델골조의 구조 평면도 및 입면도

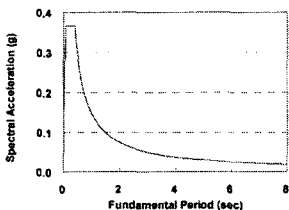


그림 2. 설계응답스펙트럼 (KBC2005, S_B , 지진구역1)

표 1. 부재치수 및 강종

보	H-404×201×9×15		SS400
기둥	H-304×301×11×17		SM490
가새	BR3	□-150×150×9	SPS400
	BR2	□-200×200×8	
	BR1	□-200×200×9	

3. 지퍼기둥의 설계법

3.1 지퍼기둥 정적 설계법

최근에 역V형 철골 중심가새골조의 지퍼기둥 설계법이 제시된 바 있다 (이철호, 김남훈, 2003). 그 핵심을 요약 하면 다음과 같다. 그림 3은 압축가새 좌굴 이후의 수직 불균형력 산정하기 위한 자유물체도를 보여준다. AISC 1997 내진규정의 경우 중간세장비를 갖는 가새의 경우 후좌굴 저항내력(C_u)은 최초 좌굴강도($P_{cr} = A_g F_{cr}$, A_g 는 가새의 단면적, F_{cr} 는 가새의 좌굴응력도)의 30% 선으로 제안하고 있다. 지퍼기둥의 강도가 부족하여 조기 항복한다면 하층의 좌굴발생을 상층으로 전달하는 "메신저"로서 기능을 효과적으로 발휘할 수 없으므로 지퍼기둥은 가능하면 탄성상태를 유지하는 것이 바람직하다. 이철호 등(2003)은 "capacity design principle"을 그대로 적용할 경우 상층부에서 너무 보수적인 설계가 되는 점을 고려하여, 하층부의 좌굴시 발생하는 수직 불균형력 만큼 지퍼기둥이 상층부로 전달하여 상향의 순차적 연쇄좌굴을 유도할 수 있는 정도의 지퍼기둥 강도가 확보되도록 제안하였다 (식 1 및 2 참조). 표 2는 앞의 6층 모델골조에 이 방안을 적용하여 산정된 지퍼기둥의 최소 요구 단면적 및 지퍼기둥의 사이즈를 정리한 것이다.

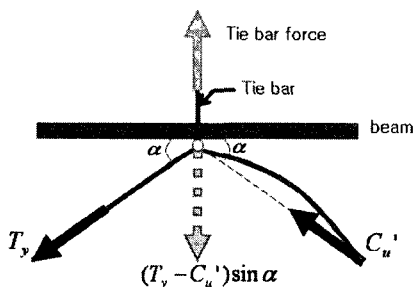


그림 3. 지퍼기둥의 정적 설계 개념

표 2. 정적 지퍼기둥 설계법에 의한 지퍼기둥의 최소 요구 단면적 및 사이즈 (SPS400강재)

층	최소 요구 단면적(cm ²)	지퍼기둥 사이즈
6	15.6	∅139.8×4.0
4~5	18.4	∅165.2×4.5
2~3	21.2	∅190.7×4.5

$$V_u = (T_y - C_u) \sin \alpha = (A_g F_y - 0.30 A_g F_y) \sin \alpha \quad (\text{수식 1})$$

$$\phi_t A_t F_{t,y} \geq V_u \quad \text{or} \quad A_t \geq \frac{V_u}{\phi F_{t,y}} \quad (\text{수식 2})$$

단, $\phi_t = 0.9$: 인장재의 강도저감계수; A_t : 지퍼기둥의 단면적; $F_{t,y}$: 지퍼기둥의 항복응력도.

3.2 지퍼기둥의 동적 설계법

이미 언급한 바와 같이 이철호 등(2003)에 의한 정적 설계법은 수직 불균형력 산정에 있어서 가새의 세장비의 영향과 고차모드의 영향을 반영치 못하는 단점이 있다. 본 연구에서는 압축가새의 좌굴거동을 실제에 가깝게 반영할 수 있는 Ikeda-Mahin (1984)의 개선된 물리적 가새모형(Refined Physical Brace Model, RPBM)과 고차모드의 영향을 반영할 수 있는 모달 푸쉬오버 해석법(MPA, modal pushover analysis, Chopra and Goel 2001)을 결합한 동적 지퍼기둥 설계법을 제시하고자 한다(RPBM의 캘리브레이션과 관련된 내용은 3.3절에서 자세히 기술하였다).

(1) 각 모드별 주기(T_n)와 진동모드(ϕ_n)를 산정한다.

(2) 각 모드별 푸쉬오버를 통해 밀면전단력-지붕층변위도($V_{bn} - u_{rn}$, base shear versus roof displacement)를 구한다.

- (3) 푸쉬오버곡선을 이상화하여 이상화시킨다.
- (4) 이상화된 곡선을 각 모드별 비탄성 단자유도계에 대하여 S_A-S_B 로 변환한다.
- (5) 내진설계기준의 설계스펙트럼을 수요스펙트럼(demand spectrum)으로 하여 위에서 얻어진 S_A-S_B 도(capacity spectrum)와 비교하여 각 모드별 비탄성 단자유도계의 최대변위 D_n 을 구한다.
- (6) 각 모드별 목표 지붕층변위 $u_{rn} (= \Gamma_n \phi_{rn} D_n)$ 를 계산한다.
- (7) 지퍼기둥의 초기값은 정적 지퍼기둥 설계법에 의해 산정한다.
- (8) 각 모드별로 목표 지붕층변위까지 푸쉬오버해석하여 지퍼기둥에 작용하는 인장력을 구한다.
- (9) 각 층 지퍼기둥의 설계인장력은 너무 보수적이지 않도록 SRSS (square-root-of-sum-of-squares)에 의해 조합하되 유효모드질량의 90%까지를 포함할 것을 권장한다(수식 3 참조).
- (10) 아래의 식(4)에 의해 지퍼기둥의 단면적을 산정한다.
- (11) 위의 (1)~(10)의 단계를 반복하여 단면의 수렴여부를 확인한다 (통상 1~2 회의 반복으로 충분)

$$F_{tie} = F_y A_{g,i} = \sqrt{\sum_{j=1}^n F_{tie,ij}^2} \quad \text{(수식 3)}$$

$$A_{g,i} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n F_{tie,ij}^2}}{F_y} \quad \text{(수식 4)}$$

단 여기서, $A_{g,i}$: i 층의 지퍼기둥의 단면적; $F_{tie,ij}$: j 모드에서 i 층의 지퍼기둥에 작용하는 응력.

3.3 반복응력을 받는 가새거둥의 캘리브레이션

압축가새는 그림 4와 같이 복잡한 이력거둥을 보이므로 비탄성 해석에 많은 어려움이 있다. 해석을 기초로 실제적으로 의미있는 결과를 제시하기 위해서는 해석에 사용되는 이론상의 모델이 실제 실험결과와 잘 부합되는 구조적 거둥을 재현할 수 있음을 확인하는 것이 무엇보다도 중요하다. 가새의 이력모델로는 실험에 기초한 현상학적인 모델(phenomenological model)인 Jain (1980)의 모델 또는 Marshall의 스트럿 모델 (HKS 1998) 등이 널리 사용되어 왔다. 이들 모델은 현상적으로 가새의 이력거둥을 재현하므로 실제의 물리적 근거가 미약한 한계가 있다. 반면 개선된 물리적 가새모형(Refined Physical Brace Model, RPBМ)이라 불리는 좀더 타당한 모델이 이미 오래 전에 제시된 바 있다 (Ikeda-Mahin 1984). 이 모델에서는 축력-모멘트 상호작용, 축력 크기가 미치는 탄성계수에 대한 영향, 좌골점에서의 소성힌지의 회전거둥 등을 명시적으로 반영하여 반복하중을 받는 가새의 좌골거둥을 추적할 수 있는 장점이 있다. 따라서 전적으로 경험적이고 현상학적인 모델에 비해 획기적으로 발전된 모델이라 할 수 있다. 최근에 Taddei(1995) 등에 의해 이 가새모델이 비선형해석 프로그램 DRAIN-2DX에 5번요소로 장착된 바 있다. 그러나 이 모델을 해석에 응용하기 위해서는 사용자의 상황에 맞게 위에서 언급한 물리적 거둥을 규정하는 다양한 변수를 실험자료와의 캘리브레이션을 통하여 결정해야만 한다.

실물대 실험결과를 활용하여 RPBМ의 파라미터를 캘리브레이션 연구가 시도된 예는 드물다. 본 연구에서는 가새부재로 가장 널리 사용되는 각형강관 부재를 대상으로 한 최근의 실물대 실험결과(천성욱 등 2003)를 활용하여 RPBМ의 파라미터의 캘리브레이션을 시행착오적 방법에 의해 시도하였다. RPBМ의 변수로서 그림 5의 축력-모멘트 상관도에서 인장축 α_t 는 0.95, 압축축 α_c 는 0.85, 그림 6의 축력 대 접선계수 관계에서 e1, e2, e3, e4를 각각 0.3, 1.0, 1.25, -0.25 로 하였을 때 가장 높은 정합성을 얻을 수 있었다. 그림 7에서 보듯이 실험에서 초기에 약간의 슬립이 발생했었기 때문에 미소한 차이를 보이는 것을 제외하면, 실험치와 해석치가 전반적으로 잘 부합되고 있음을 알 수 있다. 이 캘리브레이션 결과를 사용하여 이하의 4장 및 5장의 동적 설계를 위한 푸쉬오버해석 및 성능평가를 위한 비선형 동적해석을 수행하였다.

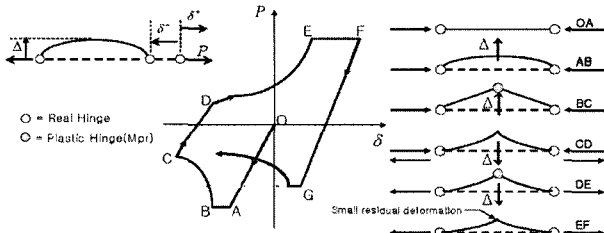


그림 4. 반복 압축력을 받는 가새부재의 이력거동 및 강도저하 (Bruneau 등 2000)

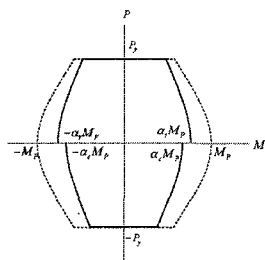


그림 5. 축력-모멘트 상관도

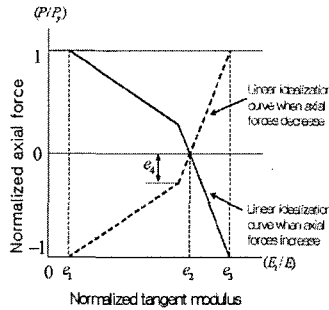
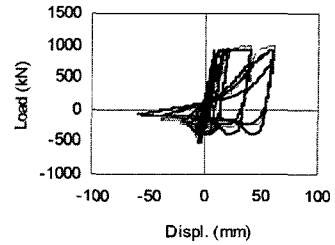
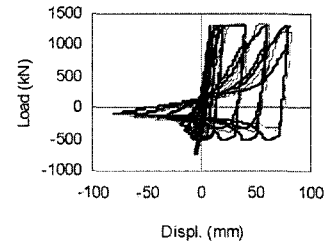


그림 6. 축력 대 접선계수 관계



(a) $KI/r = 85$



(b) $KI/r = 90$

그림 7. 실험과 해석결과의 비교 (— : 해석값, ... : 실험값)

4. 모델건물의 지퍼기둥의 동적 설계

동적설계를 위한 요소모델링을 요약하면 다음과 같다. 해석프로그램은 DRAIN-2DX를 사용하였다. 가새요소는 캘리브레이션을 거친 5번 요소, 보 및 기둥 부재는 2번 요소(모두 축력과 모멘트의 상호작용이 반영), 지퍼기둥은 1번 요소로 모델링하였다. 내부 중력기둥의 P- Δ 효과를 반영시키기 위하여 그림 8과 같이 가상의 의지기둥(leaning column)을 설치하고 주두의 수평자유도를 가새골조의 수평자유도와 같도록 강체 링크요소로써 연결시켰다. 여기서 가상의 의지기둥은 보와 전단집합된 내부 중력기둥을 집약하여 단일의 기둥요소로써 치환한 것이다. 이 기둥에 가해지는 수직하중 P는 FEMA 273의 권고대로 적재하중의 25% 및 바닥자중이 포함된 중력하중이다.

3.2절에서 제시한 방안에 따라 모델건물의 지퍼기둥의 동적 설계를 수행하였다. 그림 9의 모드형상에 따라 그림 10과 같이 각 모드별 푸쉬오버를 통해 밀면전단력-지붕충변위도를 구하였다. 표 3과 같이 각 모드별 목표 지붕충변위도를 구한 후 목표 지붕충변위까지 푸쉬오버해석하여 지퍼기둥에 작용하는 인장력을 그림 11과 같이 산출하였다. 이때 골조가 지중이므로 2차모드까지의 질량 참여율이 90%가 넘기 때문에 1차, 2차 모드 두 개를 이용하여

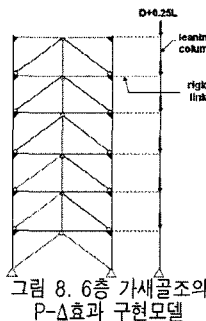


그림 8. 6층 가새골조의 P- Δ 효과 구현모델

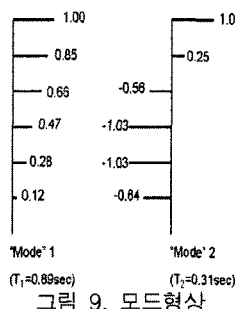
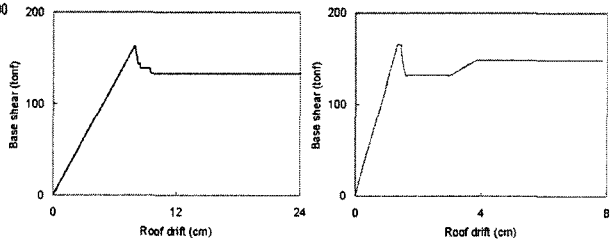


그림 9. 모드형상



(a) Mode 1

(b) Mode 2

그림 10. 모달 푸쉬오버 곡선

설계를 수행하였다. 표 4는 지퍼기둥의 모드별 인장력 응답이다. 지퍼기둥의 동적설계법에 의한 단면적은 정적설계법에 비하여 대폭 절감되었다. 즉 본 연구의 동적설계에 의해 합리적이면서도 경제적 설계가 가능함을 알 수 있다. 여기에서 구한 지퍼기둥의 단면적을 가지고 5절에서 성능을 비교하였다.

표 3. 시스템특성 및 목표 지붕층변위

mode	T_n (sec)	질량 참여율 (%)	모드참여계수 Γ_n	항복시 밀면전단력 V_{bnv} (tonf)	항복시 지붕층변위 u_{mv} (cm)	목표지붕층변위 u_m (cm)
1	0.89	77.00	458.83	133.4	8.04	12.3
2	0.31	17.16	216.59	131.9	1.33	4.6

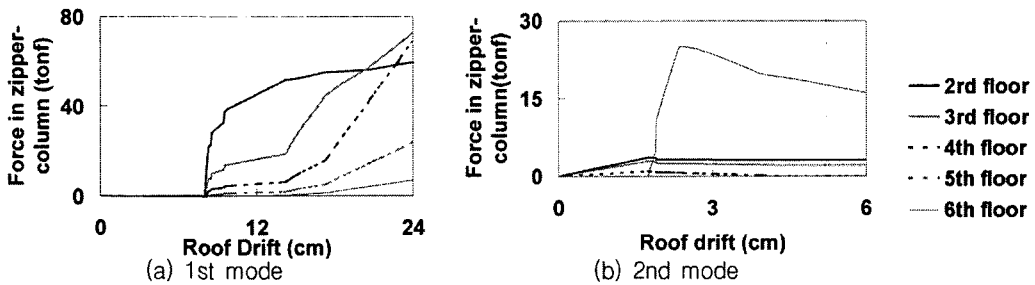


그림 11. 지퍼기둥의 모드별 인장력

표 4. 지퍼기둥의 모드별 인장력 응답

지퍼기둥의 위치	모드별 인장력 (tonf)		SRSS값 (tonf)	A_{gi} (cm^2)	지퍼기둥의 사이즈	정적지퍼기둥설계에 의한 단면적 (cm^2)
	mode 1	mode 2				
2 층	45.75	3.41	45.88	19.12	$\varnothing 165.2 \times 4.5$	21.2
3 층	16.46	2.53	16.65	6.94	$\varnothing 89.1 \times 3.2$	21.2
4 층	5.42	0.94	5.50	2.29	$\varnothing 89.1 \times 3.2$	18.4
5 층	1.50	0	1.50	0.63	$\varnothing 89.1 \times 3.2$	18.4
6 층	0.18	25.1	25.10	10.46	$\varnothing 139.8 \times 4.0$	15.6

5. 동적비선형해석에 의한 성능 비교

5.1 입력지진

입력지진동은 SIMQKE(Vanmarcke-Gasparini 1976)를 이용하여 만든 인공지진을 사용하였다. 입력지진은 모델 골조에 극한거동을 유발하여 본 연구에서 제안한 방안의 타당성을 비교해 보기 위해 충분히 강한 지진동을 입력 지진동으로 선택하였다. 즉 최대가속도를 0.4g로 하여 Newmark 설계스펙트럼(median, 5%감쇠비)과 부합되는 10개의 인공지진동을 생성하였다. 그림 13에서 보듯이 입력지진동이 Newmark 설계스펙트럼과 잘 부합한다.

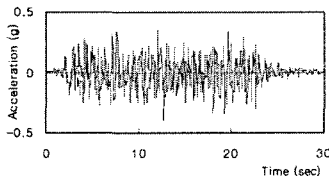


그림 12. 입력 가상지진의 지진가속도의 예(PGA=0.4g)

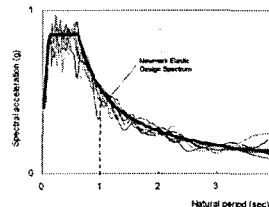


그림 13. 응답스펙트럼 및 Newmark 설계스펙트럼 (0.4g, median, 5% 감쇠비)

5.2 비선형동적해석에 의한 성능비교

그림 14는 앞에서 정적/동적 설계법에 의한 지퍼기둥의 사이즈를 이용하여 비선형동적해석을 수행한 결과이다. 4절과 동일한 모델링을 통하여 DRAIN-2DX로 해석하였다. 그림 14에 지퍼기둥의 유/무 및 정적/동적 설계법에 따른 성능을 비교하였다. 그림 14(a)에서 보듯이 지퍼기둥이 없는 경우는 1층에서 치명적인 연약층 현상이 발생함을 알 수 있다. 반면 지퍼기둥이 설치된 구조물의 경우는 설계의도대로 소성화가 전 층에 고루 분포됨을 알 수 있다. 1층의 층간변위비를 보면, 지퍼기둥이 없는 경우는 각각 4.18%인데 반해, 지퍼기둥이 있는 경우는 1.69~1.73%로 40% 선에 불과하다 (그림 14b 참조). 그림 14(c)의 영구 횡변위를 보면, 지퍼기둥의 설치로 인해서 영구 횡변위가 거의 없음을 알 수 있다. 또한 본 연구의 동적설계법에 의한 지퍼기둥의 단면적은 정적설계법에 비해 대폭 절감되지만, 유사한 내진성능을 발휘하고 있음을 알 수 있다.

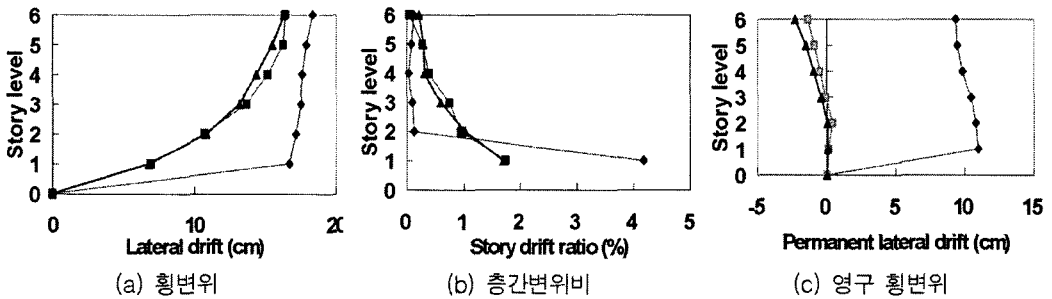


그림 14. 지퍼기둥의 유/무 및 정적/동적 설계법에 따른 성능비교

◆ : w/o zipper-column, ■ : 정적 설계된 지퍼기둥, ▲ : 동적 설계된 지퍼기둥

6. 요약 및 결론

본 연구에서는 역V형 가새골조의 내진성능향상을 위해 지퍼기둥을 도입할 경우, 가새의 세장비 및 동적 거동의 영향을 반영하여 수직 불균형력을 정확히 산정할 수 있는 동적 지퍼기둥 설계법을 제시하였다. 방안의 핵심은 압축가새의 좌굴거동을 실제에 가깝게 반영할 수 있는 개선된 물리적 가새모형과 고차모드의 영향을 반영할 수 있는 모달 푸쉬오버 해석법을 결합하는 것이다. 6층 모델골조를 대상으로 한 비선형 동적해석결과에 의할 때 본 연구의 방안이 내진성능의 향상에 매우 효과적임이 확인되었다. 즉 저층부의 연약층 현상이 방지되고 수 개 층의 연쇄좌굴이 유발되어 손상분포가 전 층에 걸쳐서 비교적 균등하게 분포되었다. 또한 본 연구의 모델골조가 6층의 저층구조물이라 그 차이가 크지는 않았지만 기존의 정적 설계법에 비해 더욱 합리적으로 지퍼기둥이 설계됨도 확인되었다. 본 연구의 방안의 정적 설계법에 대한 우월성은 고차모드효과 커지는 중/고층구조물에서 더욱 확연히 드러날 것으로 판단된다. 후속연구를 통하여 이같은 점을 분명히 보이고자 한다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초 연구사업 (과제번호: R01-2002-000-00025-0)에 의한 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

김남훈, 이철호 (2003), “역V형 철골 가새골조의 비탄성거동 및 내진성능향상 방안에 관한 연구,” 강구조학회, 15(5), pp. 571-578.
 대한건축학회 (2005), “건축구조설계기준,” 기문당.

- 이철호, 김정재 (2004). "P- Δ 효과를 고려한 역V형 철골가새골조의 내진성능평가 : 사례연구," 한국지진공학회, 8(3), pp. 97-103.
- 이철호, 김정재 (2005), "지진하중을 받는 대각선 철골 중심가새골조의 동적 불안정 거동." 한국지진공학회 학술발표대회 논문집, 9(1), pp. 129-136
- 천성욱, 한상환, 이리형 (2003). "각형강관 가새부재의 폭두께비에 따른 거동평가," 대한건축학회 춘계학술발표대회 논문집, 23(1), pp. 101-104.
- American Institute of Steel Construction Inc. (1997). "Seismic Provisions for Structural Steel Buildings," AISC, Chicago Il.
- Bruneau, M. and Mahin, S.A. (1990). "Ultimate Behavior of Heavy Steel Section Welded Splices and Design Implications," *Journal of Structural Engineering*, 116(18), pp.2214-2235.
- Chopra, A. K. (2001). "Dynamics of Structures," Prentice-Hall.
- Ikeda, K., and Mahin, S. A. (1984). "A Refined Physical Theory Model for Predicting the Seismic Behavior of Braced Frames," *EERC Report, UCB/EERC-84/12*, Berkeley.
- Jennings, P.C, Housner, G.W, and Tsai, N.C. (1968), Simulated earthquake motions, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
- Khatib, I. F, Mahin, S.A, and Pister, K. S. (1998), "Seismic Behavior of Concentrically Braced Steel Frames," Report, UCB/EERC-88/01, CA.
- Pascal, T. (1995). "Implementation of the Refined Physical Theory Model of Braced Steel Frames in Nonspec and Drain2DX," August, Department of Civil Engineering, The University of Ottawa, Ottawa, Ontario, Canada.
- Robert Tremblay (2003), "Achieving a Stable Inelastic Seismic Response for Multi-Story Concentrically Braced Frames," *Engineering Journal*, 40(2), pp. 111-130.
- T. Tjhin, M. Aschheim, and E. Hernández-Montes (2005), "Estimates of Peak Roof Displacement Using "Equivalent" Single Degree of Freedom Systems." *Journal of Structural Engineering*, 131(3), pp. 517-522.
- Vanmarcke, E. H. and Gasparini, D. A. (1976), "SIMQKE User's Manual and Document." *Division of Advanced Environmental Research and Technology*, Massachusetts Institute of Technology.