

선형 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동

Buckling Loads and Post-Buckling Behavior of Linear Tapered Columns

이 태 은* · 안 대 순** · 이 승 우*** · 박 광 규****

Lee, Tae-Eun · Ahn, Dae-Soon · Lee, Seung-Woo · Park, Kwang-Kyou

ABSTRACT

This paper deals with the geometrical non-linear analyses of the buckled columns. Differential equations governing elasticas of the buckled columns are derived, in which both effects of taper type and shear deformation are included. Three kinds of taper types such as breadth, depth and square tapers are considered. Differential equations are solved numerically to obtain the elasticas and buckling loads of such columns. End constraint of both clamped ends and both hinged ends are considered. The effects of shear deformation on the elasticas of the buckled column and buckling load of column are investigated extensively. Experimental studies are presented that complement theoretical results of non-linear responses of the elasticas.

Keyword: buckling load, post-buckling behavior, tapered column, shear deformation

1. 서 론

기둥은 보, 평판, 곡선 부재, 곡면 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계, 항공, 조선 등 각종 구조공학 분야에서 때때구조로 이용되고 있다. 기둥 문제에서 좌굴하중 산정과 후좌굴 거동의 해석은 기둥의 안정문제에서 매우 중요한 연구과제이다. 기둥의 정확한 좌굴하중의 산정은 기둥의 내하력 측면에서 특히 중요하다. 기둥의 후좌굴 거동에 대한 정확한 해석은 후좌굴 거동 값을 미리 예측함으로써 좌굴된 기둥의 보수·보강에 매우 유용한 자료로 이용될 수 있다.

이러한 관점에서 기둥의 좌굴문제는 구조공학에서 전통적으로 매우 중요한 학문분야 중에 하나이다. Euler는 기둥의 Euler 좌굴하중을 산정하였을 뿐만 아니라 후좌굴 거동 해석에서 가장 기본이 되는 대변형 이론을 연구하였다(Euler, 1774). 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동은 단면 형상, 변단면 형상 및 전단변형의 고려 여부 등이 매우 큰 영향을 미친다(Gere and Timoshenko, 1984). 기둥의 적절한 단면형상 및 적절한 변단면 형상을 채택은 최적설계의 개념에서 기둥의 내하력을 크게 증진시킬 수 있는 합리적인 방법이다(Haftka, et al. 1990).

구조물의 거동 해석에서 전단변형 효과는 구조물의 변위를 현저하게 증가시키므로 좌굴하중을 감소시키고 후좌굴 거동 값을 증가시키는 요인이다(Gere and Timoshenko, 1984). 따라서 전단변형의 효과를 고려하는 것이 구조해석에서 안전한 것은 잘 알려진 사실이다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 E-mail: telee@wonkwang.ac.kr

** 정회원 · (유)신한개발기술단 대표이사

*** 정회원 · 원광대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정

**** 정회원 · 대전대학교 토목공학과 교수

이상과 같은 연구배경에서 이 연구는 변단면 기둥의 좌굴하중 산정과 후좌굴 거동 해석을 연구하는데 주안점이 있다. 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동 해석에서 변단면을 채택하고 전단변형 효과를 고려하여 보다 정확한 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동을 해석하여 기둥설계 및 정확탄성곡선 아치의 안정성 확보에 기여하는데 연구목적이 있다.

2. 변단면 정의

본 연구에서는 그림 2.1에 보인 바와 같이 부재 중심축을 따라 단면제원이 직선적으로 변화하는 선형 변단면 기둥을 대상으로 택하였다. 대상 기둥은 직사각형 단면을 갖고 기둥의 중앙에 대하여 대칭이다.

그림 2.1(a)는 단면깊이 D 가 일정하고 단면폭 B 가 변화하는 폭 변단면, 그림 2.1(b)는 단면폭 B 가 일정하고 단면깊이 D 가 변화하는 깊이 변단면, 그림 2.1(c)는 단면폭 B 와 단면깊이 D 가 동시에 변화하는 정방형 변단면을 나타낸 것이다.

이 그림에서 s 축은 기둥이 좌굴하기 전 곧은 상태의 기둥의 축을 나타내며, 기둥의 길이는 l , 기둥의 좌단 $s=0$ 에서 단면폭은 B_a 이고 기둥의 중앙 $s=l/2$ 에서 단면폭은 B_m 이다. 또한 기둥 좌단에서 단면적 및 단면 2차모멘트는 각각 A_a , I_a 이고 기둥의 중앙에서 단면적은 A_m 이다.

이 연구에서는 변단면의 단면적 및 단면이차모멘트를 유도하기 위하여 식 (2.1)에 표시한 바와 같이 중앙점의 단면적과 좌단의 단면적 비로 정의되는 단면비를 사용한다.

$$r = \frac{A_m}{A_a} \quad (2.1)$$

위의 식을 이용하여 기둥의 축 좌표 s 에서 단면적 A 및 단면 2차모멘트 I 를 s 의 함수식들로 나타내면 다음과 같다.

$$A = A_a \left[2(r^{1/c} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^c, \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{2}, \quad I = I_a \left[2(r^{1/c} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^d, \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{2} \quad (2.2,2.3)$$

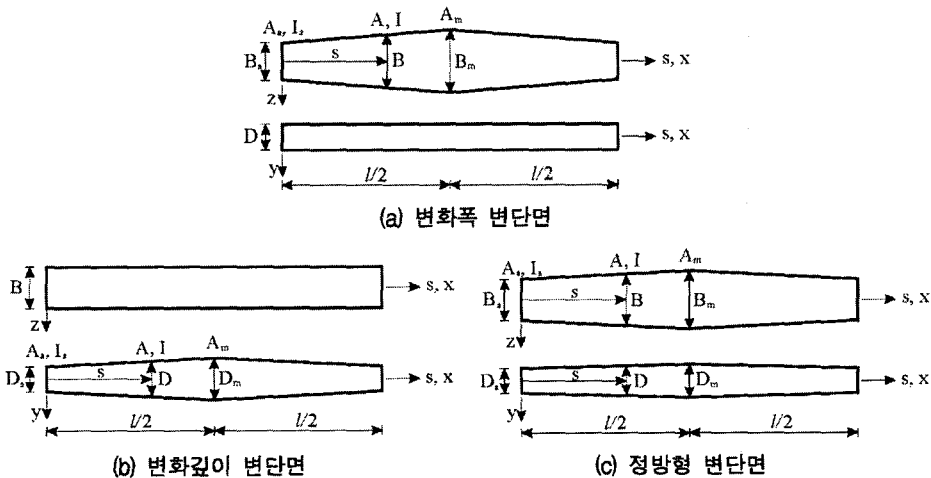


그림 2.1 변단면 기둥

위의 식들에서 무차원 계수 c, d 는 변단면의 형식을 설명해주는 변단면 단면형상계수로서 본 연구에서 택한 3가지 선형 변단면에 대한 이들 값은 다음의 식들과 같다.

- 폭 변단면 : $c = 1, d = 1$ (2.4a)

- 깊이 변단면 : $c = 1, d = 1$ (2.4b)

- 정방형 변단면 : $c = 1, d = 1$ (2.4c)

이상의 식들을 이용하면 본 연구의 대상기둥인 선형 변단면 기둥의 축 s 에서 단면적 A 및 단면 2차모멘트 I_s 를 산출할 수 있으며, 기둥의 나머지 구간인 $l/2 \leq s \leq l$ 에서 단면적 및 단면 2차모멘트는 대칭조건으로부터 산출할 수 있다.

3. 수학적 모형

그림 3.1(a)는 기둥이 좌굴하기 전에 끈은 상태의 양단고정 및 양단회전 기둥을 나타낸다. 이 기둥들은 기둥의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계 (x, y) 의 평면상에 존재한다. 기둥의 좌단은 수평방향의 이동이 불가능하고, 우단은 좌굴하중 B_L 보다 큰 압축하중 P 가 작용하면 좌굴하여 좌측의 수평방향으로 이동한다. 좌굴 전의 기둥들은 이상기둥 즉 기둥의 축이 완전히 끈은 상태이다. 따라서 기둥이 좌굴하기 전에 기둥의 중심축인 s 축은 x 축과 일치한다.

그림 3.1(b)는 기둥에 좌굴하중 B_L 보다 큰 압축하중 P 가 작용하여 좌굴된 형상을 나타낸다. 좌굴된 기둥의 s 축은 더 이상 끈지 않으며 기둥의 중심축은 비압축성이기 때문에 그림에 표시되어 있는 바와 같이 좌단으로부터 정확탄성곡선상의 임의 좌표 (x, y) 까지의 곡선거리는 s 가 된다. 따라서 좌굴된 기둥의 총 곡선길이는 l 을 유지하므로 우단에서 $s = l$ 이다.

그림 3.1에서 Δ 는 좌굴된 기둥 우단의 수평처짐, θ 는 정확탄성곡선상의 임의 좌표 (x, y) 에서 단면 회전각, θ_a 는 좌단에서의 단면 회전각이며, M_a 는 지점의 반력 모멘트이다.

정확탄성곡선상의 임의 좌표 (x, y) 에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨 모멘트 M 이 발생하며 이들 합용력의 부호규약은 그림 3.2에 표시되어 있는 방향이 “+”이다.

정확탄성곡선상의 임의점 (x, y) 에서 평형방정식을 이용하여 합용력 N, Q, M 을 산정하면 다음 식들과 같다.

$$N = P \cos \theta, \quad Q = P \sin \theta, \quad M = M_a - Py \tag{3.1-3.3}$$

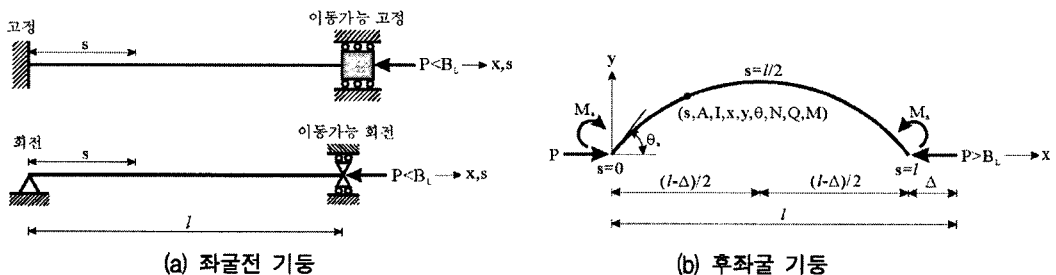


그림 3.1 좌굴 전·후 기둥의 형상 및 제 변수

휨 모멘트 M 및 전단력 Q 를 변위의 함으로 나타내면 다음 식들과 같다.

$$M = EI\psi', \quad Q = fGA\beta \quad (3.4, 3.5)$$

식 (3.4)에서 ($'$)는 미분연산자 (d/ds)이며, 위의 식들에서 E, G 는 기둥 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이고, f 는 단면 형상계수이며, 직사각형 단면에 대해서 $f = 5/6 (= 0.8333)$ 이다. 변위함인 ψ 및 β 는 순수 휨에 의하여 발생하는 단면 회전각 및 전단력에 의하여 발생하는 단면 회전각을 나타낸다. 이 연구에서는 식 (3.4)와 같은 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 비선형 미분방정식 $M = EI\psi'$ 를 사용하였다(Chen and Atsuta, 1977).

좌굴된 기둥의 단면 회전각 θ 는 그림 3.2에 나타난 합응력의 부호규약을 이용하면 그림 3.3에 나타낸 바와 같이 순수 휨에 의한 회전각 ψ 와 전단에 의한 회전각 β 로 구성되며 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta = \psi + \beta \quad (3.6)$$

위의 식 (3.6)에 보인 바와 같이 이 연구에서 후좌굴 거동을 해석하기 위하여 전단변형효과를 고려하는 Timoshenko 보 이론을 채택하였다.(Timoshenko and Gere, 1961)

식 (3.6)을 좌굴된 기둥의 축방향 곡선거리인 s 로 미분하면 식 (3.7)과 같고, 식 (3.4), (3.5)를 ψ' 와 β' 에 대하여 정리하면 다음의 식 (3.8), (3.9)와 같다.

$$\theta' = \psi' + \beta', \quad \psi' = \frac{M}{EI}, \quad \beta' = \frac{1}{fGA} \left(Q' - \frac{Q}{A} A' \right) \quad (3.7-3.9)$$

식 (3.7)에 식 (3.8), (3.9)를 대입하면 θ' 는 다음과 같이 구해진다.

$$\theta' = \frac{M}{EI} + \frac{1}{fGA} \left(Q' - \frac{Q}{A} A' \right), \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{2} \quad (3.10)$$

위의 식에서 미분방정식에 내재되어 있는 변수 A, I 가 식 (2.28), (2.29)에 보인 바와 같이 대칭단면의 범위인 $0 \leq s \leq l/2$ 의 범위에서만 유효하므로 식 (3.10)도 이 범위 내에서 유효하다.

식 (2.28) 및 식 (3.2)로부터 A' 및 Q' 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$A' = \frac{2cA_a}{l} (r^{1/c} - 1) \left[2(r^{1/c} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^{c-1}, \quad Q' = P(\cos \theta)\theta' \quad (3.11, 3.12)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다. 먼저 기둥의 후좌굴 거동을 해석하기 위하여 필요한 좌표계 관련변수들을 무차원화하면 다음과 같다.

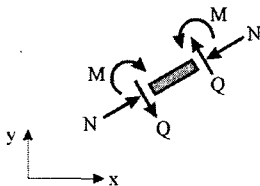


그림 3.2 합응력의 (+) 부호규약

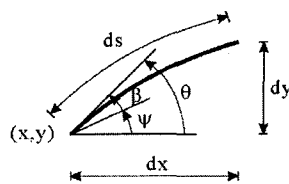


그림 3.3 후좌굴 기둥의 미소요소 및 회전각의 구성

$$\lambda = \frac{s}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \delta = \frac{\Delta}{l}, \quad g = \frac{G}{E}, \quad (3.13-3.17)$$

$$k = \frac{l}{(I_a/A_a)^{1/2}}, \quad p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_a}, \quad m_a = \frac{M_a l}{\pi^2 EI_a} \quad (3.18-3.20)$$

위에서 λ, ξ, η 는 각각 좌굴된 기둥의 곡선거리 s , 정확탄성곡선을 정의하는 직교좌표계 (x, y) 를 기둥의 길이 l 로 정규화한 것이고, δ 는 기둥의 무차원 수평처짐이다. 또한, g 는 전단변수, k 는 세장비, p 는 하중변수, m_a 는 반력모멘트변수이다.

식 (3.10)에 식 (2.2), (2.3)의 단면의 성질 A, I , 식 (3.2), (3.3)의 합응력 Q, M 및 식 (3.11), (3.12)의 미분식들을 대입하여 θ' 항으로 정리하고, 식 (3.13)-(3.20)에서 정의된 무차원변수들을 이용하면 좌굴된 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 지배미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\theta^i = \frac{\pi^2}{1 - \frac{\pi^2 p \cos \theta}{fgk^2(a\lambda+1)^c}} \left[\frac{m_a - p\eta}{(a\lambda+1)^d} - \frac{acp \sin \theta}{fgk^2(a\lambda+1)^{c+1}} \right], \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5 \quad (3.21)$$

위의 식 (3.21)에서 (i)는 미분연산자 ($d/d\lambda$)이며, c, d 는 식 (2.4)에 이미 정의되어 있다. 또한, 기호 a 는 정리된 식을 간단하게 표시하기 위하여 도입한 무차원 계수로 식 (3.22)와 같다.

$$a = 2(r^{1/c} - 1) \quad (3.22)$$

그럼 3.3에서 다음과 같은 ξ^i, η^i 의 미분식들을 얻을 수 있다.

$$\xi^i = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5, \quad \eta^i = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5 \quad (3.23, 3.24)$$

식 (3.21)에서 변위항으로 표현되는 식 (3.5)로부터 기인하는 $\pi^2 p \cos \theta / [fgk^2(a\lambda+1)^c]$ 및 $\pi^2 a c p \sin \theta / [fgk^2(a\lambda+1)^{c+1}]$ 의 항이 전단변형효과를 고려함으로써 발생된 항들이다.

이상에서 유도한 무차원 지배미분방정식을 수치적분하기 위하여 무차원 경계조건을 유도하여야 한다. 양단고정, 양단회전 및 기둥 중앙에서의 경계조건을 앞에서 정의된 무차원 변수들을 이용하여 다음 식들과 같이 무차원 경계조건으로 유도할 수 있다.

$$\text{- 고정지점 : } \theta_a = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0 \quad (\lambda = 0 \text{에서}) \quad (3.25-3.27)$$

$$\text{- 회전지점 : } \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad m_a = 0 \quad (\lambda = 0 \text{에서}) \quad (3.28-3.30)$$

$$\text{- 기둥중앙 : } \theta = 0 \quad (\lambda = 0.5 \text{에서}) \quad (3.31)$$

후좌굴 기둥의 단면에 발생하는 합응력 N, Q, M 을 무차원 변수인 식 (3.15), (3.19), (3.20)을 이용하여 무차원화 하면 다음 식들과 같다.

$$n = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI_a} = p \cos \theta, \quad q = \frac{Ql^2}{\pi^2 EI_a} = p \sin \theta, \quad m = \frac{Ml}{\pi^2 EI_a} = m_a - p\eta \quad (3.32-3.34)$$

4. 수치해석 방법

앞에서 유도한 변단면 기둥의 후좌굴 거동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 수치해석법을 이용하면 좌굴된 기둥의 후좌굴 거동을 해석할 수 있다.

지배미분방정식의 수치적분은 초기치 문제이므로 유도된 무차원 지배미분방정식 (3.21), (3.23), (3.24)를 수치적분하기 위해서는 $\lambda=0$ 에서의 초기조건을 모두 알아야 수치적분을 시행할 수 있다.

양단고정 기둥인 경우에는 반력 모멘트 변수 m_a 가 미지수이고, 양단회전 기둥인 경우에는 초기 회전각 θ_a 가 미지수이다. m_a 또는 θ_a 는 초기값을 적당히 가정하여 지배미분방정식을 수치적분하고 기둥 중앙에서의 경계조건 식 (3.31)을 이용하여 산출할 수 있다.

본 연구에서 변단면 기둥의 후좌굴 거동을 지배하는 미분방정식의 수치적분은 그 정도가 높아 많은 공학 문제에 이용되고 있는 Runge-Kutta method(Carnahan *et al.*, 1969)를 이용하였고, 미지수인 m_a 와 θ_a 는 비선형 방정식의 해법 중 효율성이 높은 Regula-Falsi method(Al-Khafaji and Tooley, 1986)를 이용하였다.

좌굴 직후의 후좌굴 거동 값들은 매우 작은 값들이므로 이러한 성질을 이용하면 기둥의 좌굴하중을 무차원 지배미분방정식을 이용하여 산정할 수 있다. 이 연구에서 좌굴하중은 양단고정 기둥의 $m_a = 1 \times 10^{-10}$, 양단회전 기둥의 $\theta_a = 1 \times 10^{-10}$ 의 값을 갖는 p 값을 좌굴하중 변수 b 로 정의하였다. 여기서 좌굴하중 변수 b 는 식 (3.19)에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$b = B_L l^2 / (\pi^2 EI_a) \quad (4.15)$$

5. 수치해석 예 및 토의

표 5.1은 변단면 종류가 후좌굴 거동에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표에서 보인 바와 같이 변단면 종류가 후좌굴 거동에 미치는 영향은 매우 큰 것을 알 수 있으며, 하중 및 기하적 형상이 같더라도 모든 후좌굴 거동 값들은 변화깊이 <정방향<변화폭의 순서로 크다. 따라서 모든 조건이 같으면 변화깊이 변단면이 후좌굴 거동 값이 가장 작으므로 기둥의 안정에 가장 유리하다. 예로서 양단고정 기둥의 경우에 변화깊이의 δ 는 변화폭에 비하여 0.196에 불과하여 기둥 안정에 매우 유리한 것을 수치적으로 알 수 있다.

전단변형 효과는 식 (3.21)의 지배미분방정식에서 보인 바와 같이 기둥의 재료 및 기하적 형상인 (f, g, k)에 의하여 결정된다. 이러한 전단변형 효과를 분석하기 위하여 f, g, k 의 연계효과를 다음 식과 같이 α 로 표시하여 전단변형 변수로 정의하고 전단변형 변수 α 가 후좌굴 거동에 미치는 영향을 분석하였다.

표 5.1 변단면 종류별 후좌굴 거동($g=0.4, r=1.5, k=100$)

단부조건 및 하중변수 p	변단면 종류	후좌굴 거동			δ 의 비율 ^b
		m_a/θ_a^a	δ	η_m	
양단고정 $p=8$	변화폭	1.51781	0.73784	0.40225	1.000
	변화깊이	0.77709	0.14448	0.22915	0.196
	정방향	1.31873	0.48801	0.36947	0.661
양단회전 $p=3$	변화폭	2.33043	0.98933	0.38362	1.000
	변화깊이	1.41141	0.37441	0.32490	0.378
	정방향	1.98539	0.72558	0.38496	0.733

^a m_a : 양단고정; θ_a : 양단회전, ^b 비율 = $\delta_{\text{변단면}} / \delta_{\text{변화폭}}$

$$\alpha = 1/(fgk^2) \quad (5.1)$$

그림 5.1은 양단고정 기둥의 단면비 r 과 후좌굴 거동과의 관계를 나타낸 그림이다. 단면비 r 가 증가하면 모든 후좌굴 거동 m_a 또는 θ_a 및 δ 는 감소하고 η_m 은 증가하다가 최고치에 도달하고 이후에는 감소한다. 이 그림에서 모든 거동 값들은 \square 로 표시된 r 값($r=2.82$)에서 모두 0이 된다. 이는 \square 로 표시된 r 값들보다 더 큰 단면비에서는 기둥에 작용하고 있는 하중변수 $p=7$ 에 대하여 이 기둥들은 좌굴하지 않고 곧은 직선의 형상을 유지한다는 것을 의미한다. 즉 $r=2.82$ 가 주어진 하중에 대하여 기둥이 좌굴하지 않는 최소의 단면비이다.

그림 5.2는 하중변수 p 의 증가에 따른 양단고정 기둥의 후좌굴 거동 값의 변화를 그린 평형경로를 나타내고 있다. 이 그림들에서 α 는 식 (5.1)에 보인 전단변형 변수이다. 여기에서 $\alpha=0.0012$ 는 실제 구조물에 사용되는 실용적인 값으로 $f=0.833$ (구형단면), $g=0.4$ (강재), $k=50$ (실용적 범위의 세장비)을 이용하여 결정된 값이다. 이 그림에서 $\alpha=0$ 인 경우 \circ 로 표시한 $b=4.944$ 와 $\alpha=0.0012$ 인 경우 \square 로 표시한 $p=4.719$ 이하에서는 거동 값이 "0"이어서 기둥은 곧은 직선의 형상을 유지한다. 따라서 $\alpha=0$ 인 경우 $p=4.944$, $\alpha=0.0012$ 인 경우에 $p=4.719$ 가 그림 상단에 나타낸 제한을 갖는 기둥의 좌굴하중 변수 b 임을 알 수 있다.

그림 5.3 및 그림 5.4는 단면비 $r=1$ 인 등단면 기둥의 전단변형 변수 α 와 좌굴하중 b 의 관계를 나타낸 그림이다. $\alpha=0$ 일 때의 b 값은 전단변형 효과를 고려하지 않은 등단면 기둥의 좌굴하중이다. α 값이 증가하면 b 값은 감소하며, 그 변화율은 양단고정 기둥이 양단회전 기둥보다 큰 것을 알 수 있다. 이 그림들을 그리는데 사용한 단부조건별로 각각 100개의 (α, b) 자료에 대한 회귀분석을 실시하여 다음 식들과 같은 좌굴하중 변수 방정식을 산출하였다.

$$- \text{양단고정} : b = 4.00 - 154\alpha + 5130\alpha^3 + 1160000\alpha^4, \quad 0 \leq \alpha \leq 0.03 \quad (5.2)$$

$$- \text{양단회전} : b = e^{-(8.63\alpha + 0.0058)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 0.03 \quad (5.3)$$

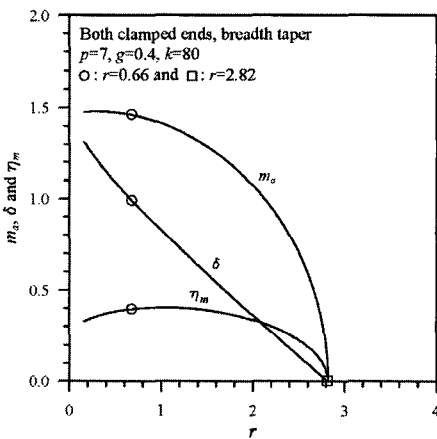


그림 5.1 r 와 m_a , δ 및 η_m 의 관계(양단고정)

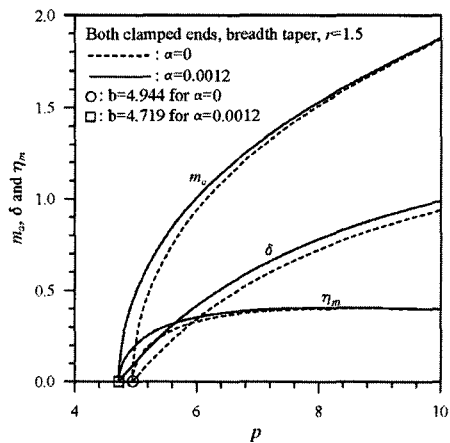


그림 5.2 평형경로(양단고정)

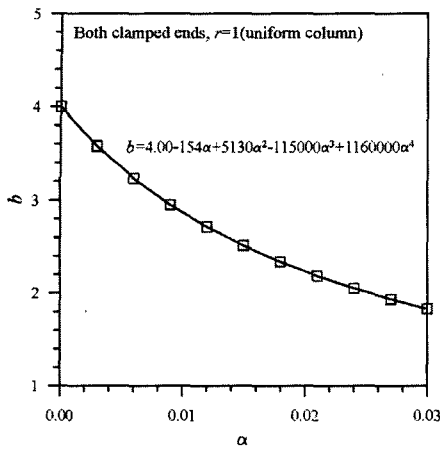


그림 5.3 α 와 b 의 관계(양단고정)

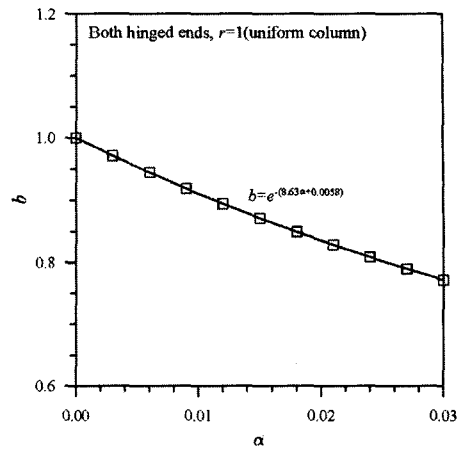


그림 5.4 α 와 b 의 관계(양단회전)

6. 결론

이 논문은 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동에 관한 연구이다. 이를 위하여 직사각형 단면을 갖고, 단면이 선형으로 변화하는 변화폭, 변화깊이 및 정방형 변단면을 채택하였다. 기둥의 후좌굴 거동을 지배하는 지배미분방정식을 유도하고, 단부조건별 경계조건을 유도하였다. 유도된 지배미분방정식과 경계조건을 이용하여 변단면 기둥의 후좌굴 거동 및 좌굴하중을 산정할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하고, 기둥의 제변수가 좌굴하중 및 후좌굴 거동에 미치는 영향을 분석하였다.

이 논문의 수치해석 예를 통하여 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

1. 후좌굴 거동 값은 변화폭, 정방형, 변화깊이의 변단면 순서로 크다. 기둥의 조건이 같을 때 후좌굴 거동에 대하여 변화깊이 변단면이 가장 안정하다.
2. 전단변형 변수의 증가는 후좌굴 거동 값을 증가시킨다. 전단변형을 고려하여 후좌굴 거동을 해석하는 것이 기둥의 안정문제상 안전하다.
3. 후좌굴 거동 및 좌굴하중 산정에서 전단변형의 영향력은 양단회전에서 보다 양단고정에서 더 크다.

참고 문헌

- L. Euler (1774) *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimive proprietate gaudentes, Additamentum I, De Curvis Elasticis*, Lausanne and Geneva.
- J.M. Gere, J.M and S.P. Timoshenko (1984) *Mechanics of Materials*, Books/Cole Engineering Division.
- P.T. Haftka, Z. Gurdal and M.P. Kamat (1990) *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- W.F. Chen and T. Atsuta (1977) *Theory of Beam-Columns(I)*, McGraw-Hill.
- S.P. Timoshenko and J.M. Gere (1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, pp. 132-135.
- B. Carnahan, H.A. Luther and J.O. Wilkes (1969) *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons.
- A.W. Al-Khafaji and J.R. Tooley (1986) *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc.