

집중질량 위치변화에 따른 변단면 후판의 진동해석

Vibration Analysis of Tapered Thick Plates on Position of Concentrated Mass

오 숙 경* · 이 용 수** · 김 일 중***

Oh, Soog-Kyoung · Lee, Yong-Soo · Kim, Il-Jung

ABSTRACT

This paper has the object of investigating natural frequencies of tapered thick plate on pasternak foundation by means of finite element method and providing kinetic design data for mat of building structures. Finite element analysis of rectangular plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is supported on pasternak foundation, the Winkler parameter is varied with 10, 10^2 , 10^3 and the shear foundation parameter is 5, 10. This paper is analyzed varying thickness by taper ratio. The taper ratio is applied as 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 respectively.

Key Words : Concentrated Mass, Vibration, Tapered Ratio

1. 서 론

본 연구는 탄성지지원 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동해석에 관하여 수행하였다. 판의 지지조건은 4 변단순지지와 4변고정지지로하여 해석하였다. 집중질량은 판 전체의 질량을 고려하여 적용하였으며, 집중질량의 작용 위치는 각각 3곳에 작용하는 것으로 고려하여 각 위치에서의 진동수 변화를 파악하였다. 그리고 판의 두께에 대한 진동수의 변화를 알아보기 위하여 판의 두께가 판의 길이에 따라 선형적으로 변화하는 변단면으로 고려하였다. 따라서 본 연구는 기계진동이나 외부 진동 요인에 의해 영향을 받는 판의 진동에 의한 특성을 파악하여 안정성 확보를 위한 설계의 기초자료로 활용하는데 목적이 있다.

1984년 P.A.A. Laura와 R. H. Gutierrez⁽³⁾는 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석을 행하였으며, 같은 해 J. A. G. Horenberg 와 J. G. M. Kerstens⁽⁴⁾는 Modal Constraint법을 이용하여 판의 동적 해석을 행하였다. P.A.A. Laura⁽³⁾와 K.H.Low^(6,7)는 집중질량을 받는 판의 진동 특성에 대해 1993년 발표하였다.

2. 유한요소법에 의한 후판의 고유진동

집중질량을 갖는 판의 고유진동수를 구하기 위하여 판의 고유진동 방정식을 이용하였다.

2-1 판요소의 변위함수 구성

* 정희원 · 원광대학교 건축학부 강의전담교수, E-mail: osk0921@dreamwiz.com

** 정희원 · 원광대학교 건축학부 교수 E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

*** 정희원 · 전북과학대학 건축토목계열 교수 E-mail: platepro@jbsc.ac.kr

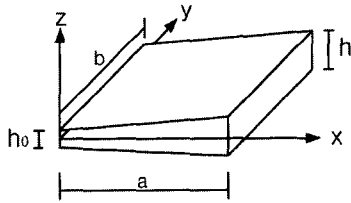


fig.2 Global Coordination of a Tapered Thick Plate

변단면 후판의 두께 h 는 길이에 따라 변하므로 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \quad (1)$$

여기서, h_0 는 $x=0$ 일 때 판의 두께, $\xi = \frac{x}{a}$, $f(\xi) = 1 + a\xi$, $a = (h - h_0/h_0)$: Taper Ratio

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \quad (2)$$

여기서, $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu^2)$

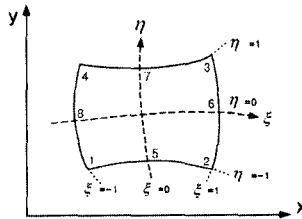


fig.3 8-node Isoparametric Element

판 요소의 크기를 $a \times b$ 로 정의 할 때 무차원 좌표계는 $\xi = (x - x_c)/a$, $\eta = (y - y_c)/b$ 이고 fig.3과 같이 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬 형태로 나타낼수 있으며 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi_i (\xi_i + \xi_j) (\eta_i + \eta_k) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi_i^2) + (1 - \eta_i)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta_i^2) \} \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

2-2 판의 강성 행렬 및 질량행렬

가상일의 원리 $\delta(T - U) = 0$ 을 적용하기 위해 판요소의 운동에너지 (T_e) 와 지반에 대한 항을 포함한 변형에너지 (U_e)를 구하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho \left(h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} m_c(a_1, b_1) \dot{w}^2(a_1, b_1) \quad (5-a)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{M}^T \boldsymbol{\chi} dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\psi} dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_w w^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_s [w_{,x}^2 + w_{,y}^2] dx dy \quad (5-b)$$

여기서

$$\begin{aligned} i w(a_1, b_1) &= \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{x=a_1}^{y=b_1} \\ \mathbf{M} &= [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T \\ \mathbf{Q} &= [Q_x \ Q_y]^T \\ w_{,x} &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \boldsymbol{\chi} &= \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \right]^T \\ \boldsymbol{\psi} &= [-\phi_x, -\phi_y]^T = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right]^T \\ \bar{w} &= \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \bar{\theta}_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial t}, \quad \bar{\theta}_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \end{aligned}$$

(5-a)식은 판 요소의 회전관성까지 고려한 운동에너지를 나타낸 식이고, (5-b)식 우변의 첫째 항은 판 요소의 휨변형에너지, 둘째 항은 전단변형에너지, 셋째 항은 Winkler지반에 대한 에너지, 넷째항은 전단지반에 대한 에너지를 나타낸다.

2-3 고유치 방정식

(5)식에 대해 변분을 취하고 전체요소에 대해 조합하면 판의 고유진동수를 얻을 수 있는 고유치방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta T_e = \delta (\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^T) \mathbf{m}_e \bar{\boldsymbol{\delta}}_e + \delta (\bar{\mathbf{w}}_e^T) \mathbf{m}_p \bar{\mathbf{w}}_e \quad (14)$$

$$\delta U_e = \delta (\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^T) [\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{es}] \bar{\boldsymbol{\delta}}_e + \delta (\bar{\mathbf{w}}_e^T) [\mathbf{K}_{fw} + \mathbf{K}_{fs}] \bar{\mathbf{w}}_e \quad (15)$$

전체 유한요소에 대해 조합하여 운동에너지 및 변형에너지 변분을 구하면 다음과 같다.

$$\delta T = \delta (\bar{\boldsymbol{\Delta}}^T) [\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_p] \bar{\boldsymbol{\Delta}} \quad (16)$$

$$\delta U = \delta (\bar{\boldsymbol{\Delta}}^T) [\mathbf{K} + \mathbf{K}_f] \bar{\boldsymbol{\Delta}} \quad (17)$$

여기서

$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$: 전체 판의 절점 변위

\mathbf{K} : 전체 판의 휨 및 전단 강성 행렬

\mathbf{M}_e : 전체 판의 질량 행렬

\mathbf{K}_f : 전체 좌표계로 조합된 지반의 전체 강성 행렬

\mathbf{M}_p : 전체 판의 집중 질량행렬

다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta (T - U) = \delta (\bar{\boldsymbol{\Delta}}^T) [\omega^2 (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_p) - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_f)] \bar{\boldsymbol{\Delta}} = 0$$

$$\text{즉 } (\mathbf{K} + \mathbf{K}_f) - \omega^2 (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_p) = 0 \quad (18)$$

(18)식에서 ω^2 은 고유값이 되고 ω 는 판의 고유진동수를 나타낸다.

3. 유한요소해석의 적용

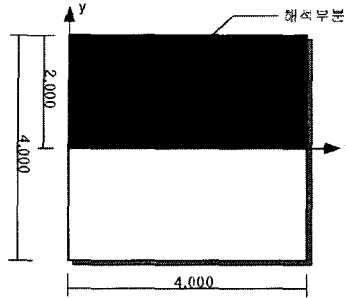


fig.4 Modeling of Thick Plate

탄성지지원 집중 질량을 변단면 후판의 진동수를 구하기 위해 유한요소법을 적용하였으며 판의 대칭성을 고려하여 fig.4 와 같이 후판의 1/2만을 8×4 요소분할 하여 해석하였다. 탄성지반은 전단 지반과 Winkler지반을 고려한 Pasternak 지반으로 하였다.

본 연구를 위한 해석 조건은 다음과 같다.

탄성 계 수 (E) : $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
 단위체적당질량 (ρ) : $2.1443 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$
 포 아 송 비 (ν) : 0.3
 판의 지지상태 : 4변 단순지지, 4변 고정지지
 집중질량크기 : 0 ~ 0.5 kg

변단면률(T/R) : 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0
 판의 크기($\bar{a} \times \bar{b}$) : $4.0 \times 4.0 \text{ m}$
 WFP : 0, 20, 50, 100, 200, 500, 1000
 SFP : 5
 (SFP : 전단지반 파라메터,, WFP : Winkler 지반 파라메터)

3-1. 비교분석

본 해석 이론 및 유한요소해석의 신뢰성을 검증하기 위해 첫 째로 후판 전체질량의 $\frac{1}{4} \rho \bar{a}^2$ 이 후판의 중앙에 집중질량으로 가해진 경우 고유 진동수를 기존해와 비교하고, 둘째로 Pasternak 지반에 지지된 4변 단순지지 정방형 후판의 고유 진동수를 구하여 기존해와 비교 검토한다. table1.은 중앙에 집중질량 $P_c = (\rho \bar{a}^2)/4$ 가 가해진 후판의 고유진동수를 Leissa의 해와 비교한 것이다. Leissa는 Dirac Delta함수를 이용하여 해석하였으므로 함수의 항수에 따라 값의 차이가 있을수 있으며, 4차항까지 고려한 Leissa의 해와 본 해와 비교한 결과 0.22%의 오차를 보였다. table2.는 Winkler지반 매개변수(WFP)와 전단 지반 매개변수(SFP)의 변화에 따른 4변단순지지 정방형 후판의 고유진동수를 본 해석해와 기존해와 비교한 것이다. 표2.에 의하면 기존해에 대한 본 해석해의 최대 오차가 0.22% 정도임을 알 수 있다. table2.에서 보면 Winkler지반 매개변수가 큰 경우 전단지반 매개변수 증가에 따른 고유 진동의 변화가 크지 않으나 (WFP=104, SFP=0일때 $\lambda^2 = 98.7452$, WFP=104, SFP=10일때 $\lambda^2 = 99.6619$ 로 λ^2 의 차이는 별로 없다.) Winkler지반 매개변수가 작은 경우 전단지반 매개변수 증가에 따른 고유 진동수의 변화가 커짐을 알 수 있다. (WFP=10, SFP=10일때 $\lambda^2 = 17.4345$, WFP = 0, SFP=10일때 $\lambda^2 = 22.1956$ 로 λ^2 의 약 27%정도 증가)

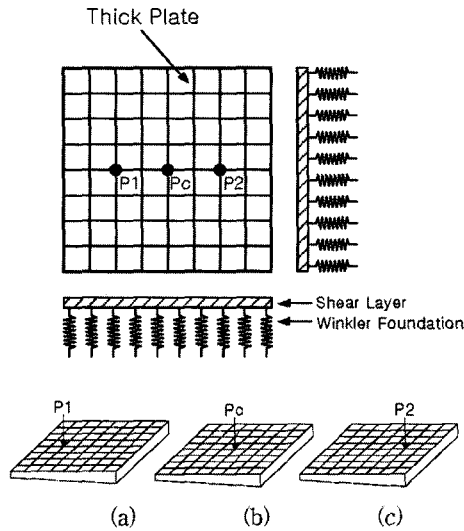


fig.5 Position of Concentrated mass

Table1. Comparison natural frequency present and Ref.(9) ($\lambda^2 = \omega^2 \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$) (Position of Concentrated Mass: Center, 50cm×50cm, t=0.455cm, all side simple supported)

Ref.(9)		This Study
Term	Frequency	Frequency
1	13.96	13.76
2	13.89	
3	13.81	
4	13.79	

Table 2. Comparison natural frequencies versus foundation parameters by present and Ref.(8) ($\lambda^2 = \omega^2 \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$) (Position of Concentrated Mass: Center, 100cm×100cm, t=20.0cm, all side simple supported)($\lambda^2 = \omega^2 \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$)

SFP	WFP	Ref.[8] (simply supported)	this study (errors)
0	0	17.4486	17.4345 (0.08%)
	10	17.7208	17.7071 (0.08%)
	10^2	20.0042	19.9952 (0.05%)
	10^3	35.5028	35.5161 (-0.04%)
	10^4	98.5331	98.7452 (-0.22%)
10	0	22.2117	22.1956 (0.07%)
	10	22.4261	22.4104 (0.07%)
	10^2	24.2698	24.2580 (0.05%)
	10^3	38.0638	38.0741 (-0.03%)
	10^4	99.4473	99.6619 (-0.22%)

* SFP=Shear Foundation Parameter WFP=Winkler Foundation Parameter

3-2. 집중 질량에 대한 판의 진동

Fig.6, 7 은 Winkler지반과 전단지반을 갖는 fig.5 (b)와 같은 조건으로 변단면률에 따른 진동수 구하였다.

집중 질량비가 작용하지 않은 경우에는 단순지지와 고정지지의 진동수에는 큰 차이가 있었으나 집중질량이 커짐에 따라 고유진동수의 변화는 상당히 큰 폭으로 감소함을 알 수 있다. 또한 변단면률에 따른 진동수의

변화는 변단면률이나 판의 지지 상태에 따라 모두 비슷한 감소양상을 보였다. 집중 질량이 증가함에 따라 고유진동수는 일정한 값에 수렴하여 감을 알 수 있으며 판의 경계조건에 따른 차이는 거의 나타나지 않음을 알 수 있다.

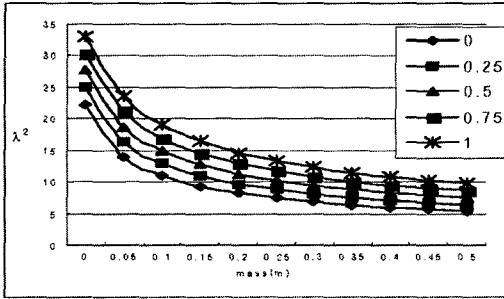


fig. 6 Variation of natural frequencies (position of concentrated masses : center , 400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, T/R=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, all side simple supported)

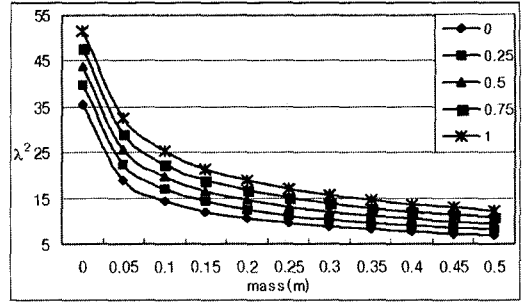


fig. 7 Variation of natural frequencies (position of concentrated masses : center , 400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, T/R=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, all side Fixed)

fig.8,9는 fig.5(a)~(c)에서 보는바와 같이 집중질량의 위치변화에 따른 진동수를 산정한것이다. 집중질량이 커짐에 따라 진동수의 급격한 감소는 변단면률에 따른 감소와 비슷한 양상을 보였다. 그러나 진동수의 변화 폭은 집중질량이 Pc, P1에 작용하는 경우에는 비슷한 진동수를 나타내고 있으며 P2에 집중질량이 작용하는 경우에는 상대적으로 진동수가 큰 것으로 나타났다. 경계조건 따른 진동수 변화가 양상은 비슷하게 나타났다. 따라서 집중질량이 판의 두꺼운 쪽에 작용하는 경우에 집중질량의 영향에 의한 진동수 변화가 낮은 것으로 판단된다.

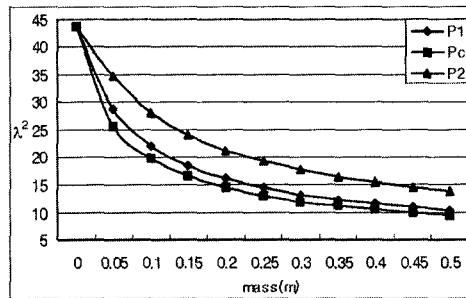
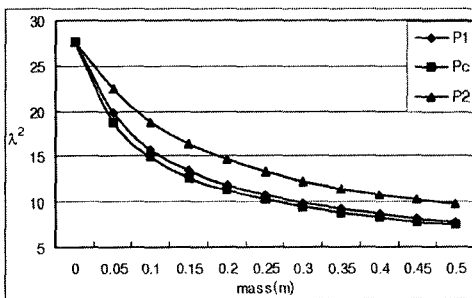


fig. 10, 11은 판의 변단면률에 따른 집중질량의 작용위치와의 관계를 나타낸 것이다. 변단면률이 낮은 경우는 집중질량이 작용한 위치에 따라 진동수는 크게 차이를 보이지 않았으나, 변단면률이 커짐에 따라 진동수의 변화가 다르게 나타났다. 특히 집중질량이 P2에 작용하는 경우에 Pc에 작용하는 경우와 비슷한 진동수를 보였으며 변단면률(T/R)이 0.75인 경우에는 진동수의 역전 현상이 나타났다. 그 반면 집중질량이 P1에 작용한 경우에는 변단면률이 커짐에 따라 선형증가를 보였다. 이는 집중질량이 작용하는 위치가 판의 강성이 작은 쪽에 작용하고, 판의 전체진동수에 영향을 거의 미치지 않은 위치에 인 것으로 판단된다. 따라서 진동수에

영향을 주는 집중질량의 위치는 변단면률이 큰 쪽에 집중질량이 작용할 경우 판의 진동수에 영향을 미치는 것으로 보인다.

판의 경계조건에 따라 4변고정지지에서도 집중질량 Pc, P2 사이의 진동수 역전현상이 나타났으나 4변단순지지에 비해 T/R이 큰 부분에서 역전됨을 알 수 있다.

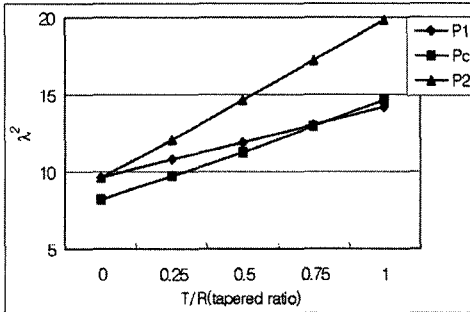


fig. 10 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(T/R) (400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, all side simple supported)

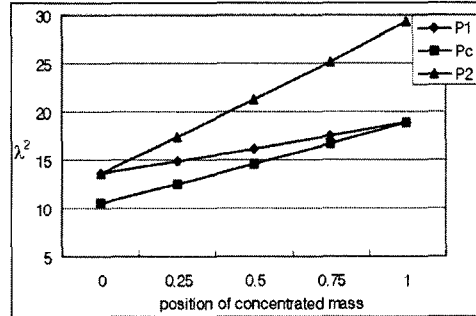


fig. 11 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(T/R) (400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, all side Fixed)

fig. 12, 13는 판에 작용하는 탄성지반의 강성변화에 따른 진동수의 변화이다. 집중질량이 P2에 작용하는 경우는 P1, Pc에 비해 높은 진동수를 보였으며 전체적으로 변단면률(T/R)의 변화에 대한 진동수와 비슷한 양상을 나타냈다.

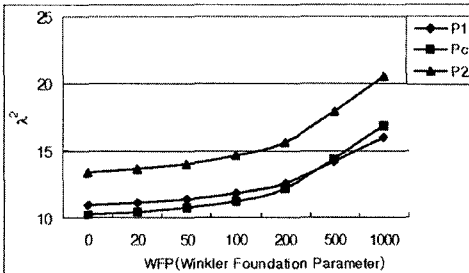


fig. 12 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation paramete (400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, all side simple supported)

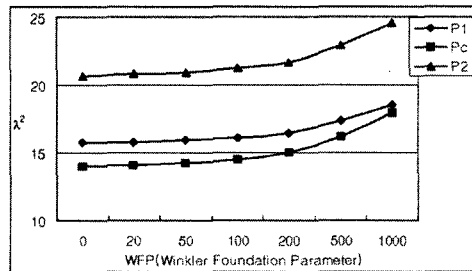


fig. 13 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation paramete (400cm×400cm, WFP=100, SFP=5.0, all side Fixed)

4. 결론

본 연구는 탄성지반 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동에 대한 연구이다. 탄성지반은 전단지반과 Winkler지반을 고려한 Pasternak 지반으로 고려하였으며, 판에작용하는 집중질량의 크기 및 위치 변화에 따른진동수를 산정하였다. 또한 판의 경계조건은 4변단순지지와 4변고정지지에 대해 알아 보았으며 판은 변단면으로하여 변단면률에 따른 진동수도 검토하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 지반에 지지되지 않고 집중질량을 갖는 판과 지반위에 놓여지고 집중질량을 갖지않는 판에 대해 고유진동수를 구하고 기존 해와 비교한 결과 최대 0.22%의 오차를 보였다.
2. 변단면틀에 따른 진동수의 변화는 변단면틀이나 판의 지지 상태에 따라 모두 비슷한 감소양상을 보였다. 집중 질량이 증가함에 따라 고유진동수는 일정한 값에 수렴하여 감을 알 수 있으며 판의 경계조건에 따른 차이는 거의 나타나지 않음을 알 수 있다.
3. 진동수의 변화폭은 집중질량이 P_c , P_1 에 작용하는 경우에는 비슷한 진동수를 나타내고 있으며 P_2 에 집중질량이 작용하는 경우에는 상대적으로 진동수가 큰 것으로 나타났다. 경계조건 따른 진동수 변화가 양상은 비슷하게 나타났다. 따라서 집중질량이 판의 두꺼운 쪽에 작용하는 경우에 집중질량의 영향에 의한 진동수 변화가 낮은 것으로 판단된다.
4. 진동수에 영향을 주는 집중질량의 위치는 변단면틀이 큰 쪽에 집중질량이 작용할 경우 판의 진동수에 영향을 미치는 것으로 보인다.
판의 경계조건에 따라 4변고정지지에서도 집중질량 P_c , P_2 사이의 진동수 역전현상이 나타났으나 4변단순지지에 비해 T/R 이 큰 부분에서 역전됨을 알 수 있다.

참고문헌

- H.Cohen and G.Handelman (1956) Vibration of a rectangular plate with distributed added mass, *J. Franklin Inst.*261, 319-329.
- T.Wah (1961) Natural frequencies of plate-mass system *proc.Ind. Doc. Theor. Appl. Mecho* 157-168.
- P.A.A Laura and R.H.Gutierrez (1985) Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method , vol(101) , pp 307-315, JSV.
- J.A.G. Horenberg & J.G.M.Kerstens (1985) Transverse Vibrations of Rectangular Plates on inhomogeneous foundations Part II:Modal Constraint Method, *Computers and Structures*, Vol(101), p317-324.
- K.H.Low (1993) Analytical and experimental investigation on a vibration rectangular plates with mounted weights, *J. Sound Vibr.* 160(1), 111-121.
- K.H.Low, C.K.Ng and Y.K.Ong (1993) Comparative study of frequencies for carrying mass. *ASCE J.Engng Mech.* ASCE 119(5), 917-937.
- K. N.saha, R. C. Kar and P. K Datta (1997) Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation, vol.63, pp 1213-1222, JCS.
- Hirayoki Matsunaga (2000) Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations, *Journal of Engineering Mechanics*, pp.27-34, January.
- 이용수,김일중,오숙경 (1999) 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구, 한국전산구조 공학회 학술발표 논문집, 제12권 2집 통권 제23호, pp 35-42.
- 이병구, 오상진, 이재만 (1998.6) 탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동. 한국전산구조공학회 논문집. 제 11권 제 2 호.