

탄성지반위의 보의 엄밀한 강성계산을 위한 개선된 해석방법

Improved Numerical Method Evaluating Exact Static Element Stiffness Matrices of Beam on Elastic Foundations

김 남 일* · 이 준 석** · 김 문 영***

Kim, Nam-Il · Lee, Jun-Seok · Kim, Moon-Young

ABSTRACT

An improved numerical method to obtain the exact element stiffness matrix is newly proposed to perform the spatially coupled elastic and stability analyses of non-symmetric thin-walled beam-columns with two-types of elastic foundation. This method overcomes drawbacks of the previous method to evaluate the exact stiffness matrix for the spatially coupled stability analysis of thin-walled beam-column. This numerical technique is firstly accomplished via a generalized eigenproblem associated with 14 displacement parameters by transforming equilibrium equations to a set of first order simultaneous ordinary differential equations. Then exact displacement functions are constructed by combining eigensolutions and polynomial solutions corresponding to non-zero and zero eigenvalues, respectively. Consequently an exact stiffness matrix is evaluated by applying the member force-deformation relationships to these displacement functions.

Keywords: exact stiffness matrix, elastic analysis, stability analysis, beam-column

1. 서 론

지난 20년 동안 보요소에 관한 엄밀한 동적 강성행렬에 관해서 활발한 연구가 진행되어왔다. 이러한 연구들의 대부분은 지배방정식에 대한 엄밀한 변위 함수의 명시적인 표현을 요구하는 해석적인 방법을 채택하였다. 이는 연산방식의 도움으로 손쉽게 얻을 수 있는 엄밀해로부터 연산시간을 단축시키는데 상당히 효과적이다. 그러나 해석적인 방법은 다수의 변수를 포함하는 연립상미분방정식의 해를 구하는 경우 엄밀한 변위 함수에 접근하기에 너무 복잡한 감이 있다. 실제적으로 빈번히 직면하는 보와 관련된 문제들은 탄성지반위의 보의 해석과 같은 복잡한 방법들을 고려해야 하는 것과 연관이 있다. 이러한 탄성지반위의 보에 관한 문제들에 대해서 많은 학자들이 연구를 진행해 왔는데, 초기의 연구로써 Hetenyi (1946)는 고전적인 미분방정식의 접근방식을 채택하였고, 이후 근사화된 형상 함수에 기초한 유한요소해석 방법이 다른 연구자들에 의해 광범

* 성균관대학교 건설환경연구소 연구교수 E-mail: kni8501@dreamwiz.com

** 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정 E-mail: junsok73@skku.edu

*** 정희원 · 성균관대학교 건설환경시스템공학과 교수 E-mail: kmye@skku.ac.kr

위하게 채택되어 왔다. Chen (1998)은 탄성지반위에 놓인 보의 지배미분방정식을 이산화하기 위해서 미분구적법에 관한 해석모델을 제시하였고, 이 방법의 해석이 수렴에 효과적인 것을 증명하였다. Guo와 Weitsman (2002)은 비균일 탄성지반위의 단순지지된 보의 응답을 산정하기 위해서 Green의 함수를 인용하였다. Kuo와 Lee (1994)는 지배미분방정식을 4차의 선형 상미분방정식으로 변환하고 perturbation method를 이용하여 비선형 탄성 지반위에 놓인 비균일 보의 처짐을 산정하였다. Gendy와 Saleeb (1999)는 Winkler지반위의 진단 변형이 고려된 보요소를 hybrid-mixed variational principle 접근방법을 이용하여 두 가지 모델을 개발하였다. 탄성기초위의 보에 관한 이러한 광범위한 연구에도 불구하고, 대부분의 연구는 보의 2차원 해석에 국한되고 있다. 저자가 아는 바로는 Dube와 Dumir (1996)가 개발한 탄성지반위의 박벽보의 진동 문제에 대한 엄밀한 series solution을 제외하고는 공간상에서의 비대칭 박벽보 문제에 관한 연구가 수행되고 있지 않은 실정이다. 최근에 Kim *et al.* (2003)은 공간상에서의 진동과 좌굴 해석에 관한 엄밀한 동적 및 정적 강성행렬을 제시하고 있는데, 이때 정적강성행렬을 유도하기 위해서 평형방정식 유도과정에서 복잡한 연산이 내포되고 비제차 미분방정식을 풀어야 하는 단점이 있다.

본 연구에서는 앞서 설명한 이러한 단점들을 극복하기 위해서 탄성지반위의 비대칭 개/폐단면을 이루는 박벽 보-기둥의 엄밀한 정적 요소강성행렬을 산정하기 위해서 개선된 수치적 기법을 제시하고자 한다.

2. 탄성지반위에 놓인 비대칭 박벽보-기둥의 지배방정식

탄성지반위에 놓인 개/폐단면의 비대칭 박벽보-기둥의 정적해석에 관한 힘-변형관계와 평형방정식을 유도한다. 그림 1은 탄성지반위의 박벽보를 보여주고 있다. 여기서 k_x, k_y, k_z 는 h_y, h_z 에서의 축방향 및 횡방향 변위에 관련되는 Winkler지반상수를 의미하며, k_θ 는 단면의 회전과 관련된 스프링 상수이다. g_y, g_z 는 h_y, h_z 에서의 두 번째 지반상수인 Vlasov, Pasternak 그리고 Filonenko-Borodich의 지반상수를 의미한다. 그림 2(a)와 2(b)에는 비대칭단면에서 정의된 박벽보의 변위파라미터와 단면력을 보여주고 있다. x_1 와 x_2, x_3 는 도심과 주축을 각각 의미하며, U_x, U_y, U_z 와 $\omega_1(=\theta), \omega_2(=-U'_z), \omega_3(=U'_y)$ 는 x_1 와 x_2, x_3 축에 대한 강제변위 및 회전변위를 나타내고 있고, $f(=-\theta')$ 는 뒤틀변형을 나타내는 변위 파라미터이다. 이 제 박벽보의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표현된다.

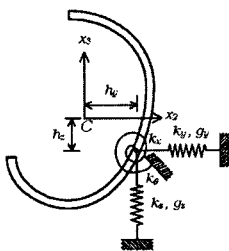
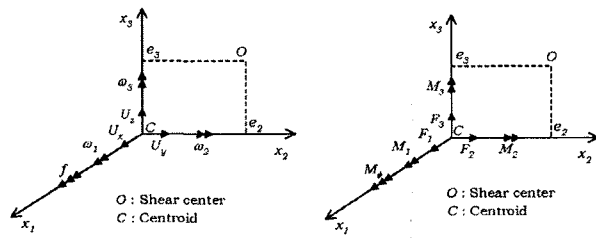


그림 1. 탄성지반위에 놓인 박벽보



(a) 변위장

(b) 단면력

그림 2. 박벽보요소의 변위장 및 단면력

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G + \Pi_F - \Pi_{ext} \tag{1}$$

여기서 Π_E, Π_G, Π_F 그리고 Π_{ext} 는 각각 탄성변형에너지, 초기응력에 의한 포텐셜에너지, 탄성지반에 대응되는 변형에너지 그리고 요소절점력에 의한 포텐셜에너지이다. 식 (1)의 총 포텐셜 에너지에 관련되는 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^l [EAU_x'^2 + E_3U_y''^2 + E_2U_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_\phi\theta''^2 + 2EI_{3\phi}U_y''\theta' + 2EI_{2\phi}U_z''\theta'] dx_1 \quad (2a)$$

$$\Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^l [{}^oF_1(U_y'^2 + U_z'^2) + {}^oM_p\theta^2 + {}^oF_2U_z'\theta - {}^oF_3U_y'\theta + {}^oM_1(U_z'U_y'' - U_z''U_y') + {}^oM_2(U_y''\theta - U_y'\theta') + {}^oM_3(U_z''\theta - U_z'\theta')] dx_1 \quad (2b)$$

$$\Pi_F = \frac{1}{2} \int_0^l [k_xU_x^2 + k_y(U_y^2 - 2h_zU_y\theta + h_z^2\theta^2) + k_z(U_z^2 + 2h_yU_z\theta + h_y^2\theta^2) + k_\theta\theta^2 + g_y(U_y'^2 - 2h_zU_y'\theta + h_z^2\theta'^2) + g_z(U_z'^2 + 2h_yU_z'\theta + h_y^2\theta'^2)] dx_1 \quad (2c)$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} U_e^T F_e \quad (2d)$$

여기서 ()'는 x_1 에 대한 미분; E 는 탄성계수; G 는 전단상수; J 는 비틀림상수; U_e, F_e 는 각각 재단변위와 재단력 벡터이다. 또한 oF_1 는 축력; ${}^oF_2, {}^oF_3$ 는 도심에 작용하는 전단력; oM_1 는 도심축에 대한 비틀림 모멘트; ${}^oM_2, {}^oM_3$ 는 각각 x_2, x_3 에 대응되는 휨모멘트; oM_p 는 와그너효과를 나타내는 단면력이다. Π_E 와 Π_G 에 관한 상세한 유도과정은 문헌 (Kim and Kim 2000)을 참조할 수 있다. 초기의 휨과 비틀림모멘트에 의한 포텐셜 에너지 (2b)는 준-접선방향의 회전에 관한 2차항을 포함함으로써 유도된다.

이제 Hamilton의 원리를 이용하여 다음과 같이 평형방정식과 힘-변형의 관계를 얻을 수 있다.

$$EAU_x'' - k_xU_x = 0 \quad (3a)$$

$$EI_3U_y'''' + EI_{3\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_y'' + {}^oM_1U_z'''' + {}^oM_2\theta'' + k_y(U_y - h_z\theta) - g_y(U_y - h_z\theta)'' = 0 \quad (3b)$$

$$EI_2U_z'''' + EI_{2\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_z'' - {}^oM_1U_y'''' + {}^oM_3\theta'' + k_z(U_z + h_y\theta) - g_z(U_z + h_y\theta)'' = 0 \quad (3c)$$

$$EI_\phi\theta'''' - GJ\theta'' + EI_{3\phi}U_y'''' + EI_{2\phi}U_z'''' - {}^oM_p\theta'' + {}^oM_2U_y'' + {}^oM_3U_z'' - k_yh_zU_y + k_zh_yU_z + (k_yh_z^2 + k_zh_y^2 + k_\theta)\theta + g_yh_zU_y'' - g_zh_yU_z'' - (g_yh_z^2 + g_zh_y^2)\theta' = 0 \quad (3d)$$

그리고

$$F_1 = EAU_x' \quad (4a)$$

$$F_2 = -EI_3 U_y'''' - EI_{3\phi} \theta'' + {}^o F_1 U_y' - {}^o M_1 U_z'' - {}^o M_2 \theta + g_y (U_y - h_2 \theta)' \quad (4b)$$

$$F_3 = -EI_2 U_z'''' - EI_{2\phi} \theta'' + {}^o F_1 U_z' + {}^o M_1 U_y'' - {}^o M_3 \theta + g_z (U_z + h_3 \theta)' \quad (4c)$$

$$M_1 = -EI_\phi \theta'' + GJ\theta - EI_{3\phi} U_y'''' - EI_{2\phi} U_z'''' + {}^o M_7 \theta - 0.5 {}^o M_2 U_y' - 0.5 {}^o M_3 U_z' \\ + (g_y h_2^2 + g_z h_3^2) \theta + g_z h_3 U_z' - g_y h_2 U_y' \quad (4d)$$

$$M_2 = EI_2 U_z'' + EI_{2\phi} \theta' - 0.5 {}^o M_1 U_y' + 0.5 {}^o M_3 \theta \quad (4e)$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{3\phi} \theta' + 0.5 {}^o M_1 U_z' + 0.5 {}^o M_2 \theta \quad (4f)$$

$$M_\phi = EI_\phi \theta' + EI_{3\phi} U_y'' + EI_{2\phi} U_z'' \quad (4g)$$

3. 비대칭 박벽보-기둥의 엄밀한 정적요소강성행렬

명백히 식 (3)은 4차의 연립 상미분방정식이다. 이를 일차의 연립 상미분방정식으로 변환하기 위해서 14개의 변위파라미터로 구성된 변위벡터를 다음과 같이 정의 한다.

$$d(x) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (5) \\ = \langle U_x, U_x', U_y, U_y', U_y'', U_y''', U_z, U_z', U_z'', U_z''', \theta, \theta', \theta'', \theta''' \rangle^T$$

식 (5)에 기초하여 식 (3)은 다음과 같이 일차의 연립 상미분방정식으로 변환가능하다.

$$Ad = Bd \quad (6)$$

이제 식 (6)의 일반적인 해를 찾기 위해서, 다음의 고유해에 관한 문제로 생각할 수 있다.

$$\lambda AZ = BZ \quad (7)$$

IMSL의 부함수인 DGVCRC를 이용하여 14쌍의 고유해를 얻을 수 있다. 이제 식 (7)의 일반해는 다음과 같은 복소수 함수형태의 고유치에 관한 선형조합으로 표현가능하다.

$$d(x) = \sum_{i=1}^{14} a_i Z_i e^{\lambda_i x} = X(x) a \quad (8)$$

여기서,

$$X(x) = \begin{bmatrix} Z_1 e^{\lambda_1 x}, Z_2 e^{\lambda_2 x}, Z_3 e^{\lambda_3 x}, Z_4 e^{\lambda_4 x}, Z_5 e^{\lambda_5 x}, Z_6 e^{\lambda_6 x}, Z_7 e^{\lambda_7 x}, \\ Z_8 e^{\lambda_8 x}, Z_9 e^{\lambda_9 x}, Z_{10} e^{\lambda_{10} x}, Z_{11} e^{\lambda_{11} x}, Z_{12} e^{\lambda_{12} x}, Z_{13} e^{\lambda_{13} x}, Z_{14} e^{\lambda_{14} x} \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$a = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \rangle^T \quad (9b)$$

이때, X 와 a 는 14개의 고유해로 이루어진 14×14 행렬 함수와 적분상수벡터를 각각 의미한다. 14개의 절점변위성분(그림 3)에 관한 복소계수 벡터 a 를 표현하기 위해서 절점변위는 다음과 같이 정의된다.

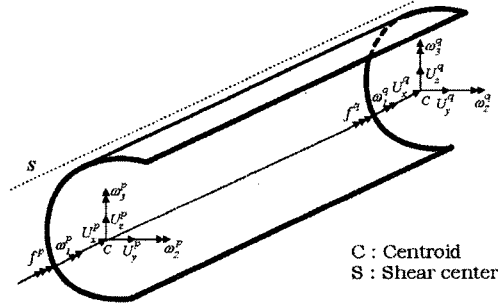


그림 3. 박벽보요소의 절점변위

$$U_e = \langle U^p, U^q \rangle^T \tag{10a}$$

$$U^a = \langle U_x^a, U_y^a, \omega_3^a, U_z^a, \omega_2^a, \omega_1^a, f^a \rangle^T, \quad a = p, q \tag{10b}$$

여기서,

$$U^p = \langle U_x(\phi), U_y(\phi), U_y'(\phi), U_z(\phi), -U_z'(\phi), \theta(\phi), -\theta'(\phi) \rangle^T \tag{11a}$$

$$U^q = \langle U_x(l), U_y(l), U_y'(l), U_z(l), -U_z'(l), \theta(l), -\theta'(l) \rangle^T \tag{11a}$$

그리고 절점변위벡터 U_e 가 다음과 같이 계산된다.

$$U_e = E a \tag{12}$$

결국 식 (12)를 이용하여 식 (8)에서 a 를 소거함으로써 다음과 같은 변위벡터를 얻게된다.

$$d(x) = X(x) E^{-1} U_e \tag{13}$$

여기서 $X(x) E^{-1}$ 는 엄밀한 보간행렬이다.

이제 식 (5)로부터 식 (4)의 박벽보-기둥의 힘-변위 관계가 다음과 같이 재 표현 가능하다.

$$f(x) = S d(x) \tag{14}$$

여기서 $f = \langle F_1, F_2, M_3, F_3, M_2, M_1, M_4 \rangle^T$ 이다.

다음으로 엄밀한 정적요소강성행렬을 결정하기 위해서, 절점력벡터를 산정하는 것이 필요하고 이는 다음과 같이 정의 된다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \tag{15}$$

여기서

$$F^a = \langle F_1^a, F_2^a, M_3^a, F_3^a, M_2^a, M_1^a, M_4^a \rangle^T, \quad a = p, q \tag{16}$$

결국, 탄성지반위에 놓인 박벽보-기둥의 엄밀한 정적요소강성행렬 K_s 는 다음과 같다.

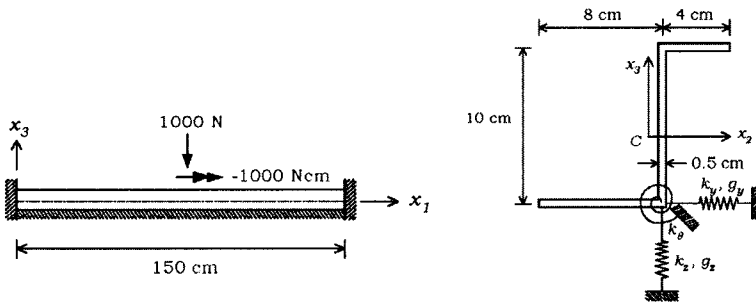
$$F_e = K_s U_e \tag{17}$$

여기서,

$$K_s = \begin{bmatrix} -S X(0) E^{-1} \\ S X(l) E^{-1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

4. 수치 예제

제안된 방법의 실용성과 정확성에대해 기술하기 위해서 수직하중 및 비틀모멘트를 받는 탄성지반위에 놓은 비대칭 보의 거동에 관해서 관측하고자 한다. 그림 4는 탄성지반위에 놓인 양단 고정 의 비대칭 보를 보여 주고 있다. 이 때 보는 중앙에 수직력과 비틀모멘트를 받고 있으며 보의 끝단에서 지반은 없는 것으로 가정 한다.



(a) 두가지 경우의 탄성지반위에 놓인 양단고정지지보 (b) 비대칭 단면형상
 $E=30000 N/cm^2, G=11500 N/cm^2, A=11 cm^2, J=0.91667 cm^4, I_2=234.82353 cm^4,$
 $I_3=30.66132 cm^4, I_\phi=1575.75758 cm^6, I_{2\phi}=-427.01891 cm^5, I_{3\phi}=-81.19701 cm^5,$
 $k_y = k_z = 10 N/cm^2, k_\theta = 10 N, g_y = g_z = 15 N$
 (c) 단면제원

그림 4. 탄성지반위에 놓인 수직하중과 비틀모멘트를 받는 비대칭 박벽보

표 1. 탄성지반위에 놓인 비대칭보의 중앙지간에서의 변위 및 비틀각(cm, rad.)

해석방법	요소의 수	U_y	U_z	θ
	6	0.75130	-1.3876	-0.17891
유한요소 해석결과	8	0.75194	-1.3893	-0.17926
	10	0.75211	-1.3898	-0.17936
	20	0.75222	-1.3901	-0.17942
본연구의 결과		0.75222	-1.3901	-0.17943

표 2. 탄성지반위에 놓인 비대칭보의 고정단 반력(N, N_{cm}, N_{cm}^2)

해석방법	요소수	F_2	F_3	M_1	M_2	M_3	M_6
	6	12.123	1.5792	-48.827	-2078.2	389.12	444.98
유한요소	8	12.087	1.6971	-48.802	-2082.7	388.63	441.24
해석결과	10	12.077	1.7295	-48.786	-2083.9	388.50	440.18
	20	12.071	1.7533	-48.748	-2084.7	388.41	439.42
본연구의 결과		12.071	1.7576	-48.720	-2084.8	388.40	439.33

표 1과 2는 보 중앙지점에서의 횡방향 및 수직변위와 비틀각 그리고 고정단에서의 반력을 보여주고 있으며 유한요소의 해석결과와 비교하고 있다. 표에서 알 수 있듯이 보를 20개의 요소로 나눈 유한요소의 해석결과와 본연구의 해석결과가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그림 5는 보의 임의지점에서의 횡변위 및 수직변위를 나타내고 있으며 유한요소의 해석결과와 비교하고 있다. 이러한 결과들은 탄성지반위에 놓인 비대칭 보의 임의 지점에서 정확하게 산출되는데 이는 본 연구에서 엄밀한 정적요소강성행렬을 이용하기 때문이다.

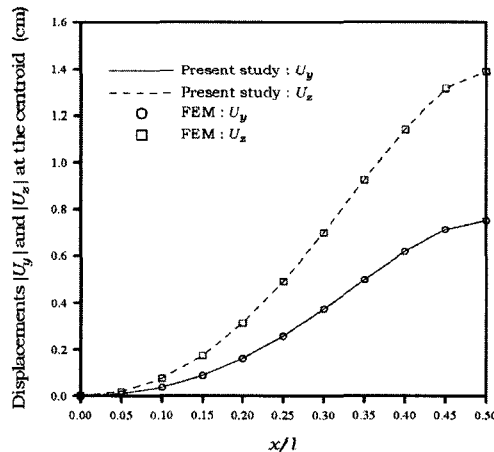


그림 5. 탄성지반위의 양단고정지지원 비대칭보의 임의지점에서의 횡변위 및 수직변위

5. 결론

탄성지반위에 놓인 비대칭 박벽보-기둥의 3차원적으로 연계된 정적 해석을 위해서 엄밀한 정적요소강성행렬을 결정하기 위한 해석방법을 제시하였다. 이는 박벽보의 3차원적으로 연계된 거동해석을 위해서 비제차의 연립미분방정식을 풀기위하여 평형방정식을 미리 적분해야하는 선행기법의 결함을 극복한 개선된 수치해석 기법이다. 수치해석결과로부터 알 수 있듯이, 본 연구에서 제시한 엄밀한 정적요소강성행렬을 이용한 결과가 여러 개의 유한요소를 사용한 보요소의 결과와 상당히 잘 일치함을 알 수 있었다. 결과적으로 본 연구에서 제시한 수치해석 기법은 다양한 종류의 초기하중에 의해 계산된 임의의 '0'의 고유치의 수에 상관없이 박벽보-기둥의 지배방정식을 엄밀히 산정하는데 효과적이며 평형방정식을 미리 적분해야 하는 과정을 생략할 수 있으며, 비제차의 미분방정식을 개별적으로 풀어야 하는 과정도 생략할 수 있다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- Chen, C.N., (1998) Solution of beam on elastic foundation by DQEM. *Journal of Engineering Mechanics* 124, pp.1381-1384.
- Dube, G.P., Dumir, P.C. (1996) Tapered thin open section beams on elastic foundation II. vibration analysis. *Computers & Structures* 61, pp.859-869.
- Gendy, A.S., Saleeb, A.F. (1999) Effective modeling of beams with shear deformations on elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics* 8, pp.607-622.
- Guo, Y.J., Weitsman, Y.J. (2002) Solution method for beams on nonuniform elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics* 128, pp.592-594.
- Hetenyi, M., (1946) *Beams on elastic foundations. Scientific Series, vol. XVI.* Ann Arbor: The University of Michigan Press, University of Michigan Studies.
- Kim, M.Y., Yun, H.T., Kim, N.I. (2003) Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns. *Computers & Structures* 81, pp.1425-1448.
- Kim, S.B., Kim, M.Y. (2000) Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures* 22, pp.446-458.
- Kuo, Y.H., Lee, S.Y., (1994) Deflection of nonuniform beams resting on a nonlinear elastic foundation. *Computers & Structures* 51, pp.513-519.