

경계 및 불연속의 해결을 위한 이동최소제곱 기반 유한요소의 적용

Applications of MLS(Moving Least Square)-based Finite Elements for Mechanics Problems Involving Interfaces and Discontinuities.

임재혁* · 임세영** · 조영삼***

Lim, Jae-Hyuk · Im, Se-Young · Cho, Young-Sam

ABSTRACT

We present applications of MLS-based finite elements, which enable us to easily treat highly complex nonmatching finite element meshes and discontinuities. The shape functions of MLS-based finite element can be easily generated with the aid of Moving Least Square approximation on the parental domain. The major advantage includes that the position of element nodes as well as the number of the element nodes can be conveniently adjusted according to the nature of the problems under consideration, so that finite-element mesh is straightforwardly adapted to evolving discontinuities and interfaces. Furthermore, we show that the present MLS-based finite elements are efficiently applied for elastic-plastic deformations, wherein the implicit constraint of incompressibility should be properly handled.

Keywords: Moving Least Square Approximation, Nonmatching Interface, Discontinuity

1. 서론

유한요소법을 이용한 재료의 전산 해석기법은 컴퓨터 기술의 발전과 맞물려 구조물의 설계 및 제작 분야에 있어 중요한 역할을 하고 있다. 하지만, “요소”라는 재료 기술의 제약은 때로 큰 단점이 되기도 한다. 예를 들어, 균열 같은 재료의 분리 현상이 나타나는 경우에는 요소 망을 분리 면을 따라 재구성해야 하며, 이는 공학자에게 많은 시간과 노력을 요구한다. 또한 대형구조물을 독립적으로 모델한 후 결합시키는 경우에는 요소사이의 불일치 접합으로 인해 해의 신뢰성이 떨어진다. 이의 해결을 위해 라그랑지 승수법을 이용한 이중 모델(Quiroz and Beckers, 1995 ; Aminpour et al, 1995), 삼층 모델(Park et al, 2002) 및 무요소법을 이용한 경계면요소법 (Kim, 2002) 등 몇몇 시도가 있었으나, 효율적인 해를 제시하지 못하고 있다. 이외에도 이런 유한요소법 자체의 한계의 극복을 위해 무요소법 (Li 와 Liu, 2004)등과 같은 다양한 방법론들이 제시되었으나, 유한요소법이 가지고 있지 않은 또 다른 문제점으로 인해 부분적으로만 사용되고 있는 실정이다. 본 연구에서는 무요소법 형상함수 재생기인 이동최소제곱 근사 기법에 새로운 제약조건을 부여하여 경계 및

* 학생회원 · 한국과학기술원 기계공학과 박사과정 E-mail: ljh77@kaist.ac.kr

** 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 교수 E-mail: Sim@kaist.ac.kr

*** 정회원 · 한국기계연구원 책임 연구원 E-mail: yscho@kimm.re.kr

불연속문제를 손쉽게 해결할 수 있는 새로운 유한요소를 개발하였으며, 무요소법 형상함수를 통해 재생되었지만, 무요소법이 가지는 수치적분의 어려움 등을 해결한 유한요소이다(Lim and Im, 2006). 2장에서 이동최소제곱법 및 이동최소 제곱 기반 유한요소의 이론적 개념을 설명하도록 하고 3장에서 이동최소 제곱 기반 요소의 실패를 제시하도록 하며, 4장에서는 수치예제를 통해 성능을 평가하고 5장에서 마무리 짓도록 하였다.

2. 이동 최소 제곱 근사법 및 이동 최소 제곱 기반 유한요소의 수식화

이 장에서는 이동최소 제곱 근사법(Lancaster, 1981)에 관한 간략한 소개와 이를 마스터영역에서 응용한 이동최소제곱기반 유한요소에 형식화에 대해 소개하도록 하겠다. $u(\xi)$ 은 이차원 변위 벡터장이며, 마스터 영역에서 정의된다. 이를 근사한 변위장을 $u^h(\xi, \bar{\xi})$ 라고 놓자. $\bar{\xi}$ 은 근사를 위해 쓰이는 공간상의 주어진 절점을 위치를 의미한다. $u^h(\xi, \bar{\xi})$ 는 식(1)처럼 쓰여진다.

$$u^h(\xi, \bar{\xi}) = a^T(\bar{\xi})p(\xi - \bar{\xi}) \tag{1}$$

$$p^T(\xi - \bar{\xi}) = [1, \xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta}, (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}), (\xi - \bar{\xi})^2, (\eta - \bar{\eta})^2, \dots] \tag{2}$$

$$J(a^T(\bar{\xi})) = \sum_{I=1}^{NP} [a^T(\bar{\xi})p(\xi_I - \bar{\xi}) - u_I]^T [a^T(\bar{\xi})p(\xi_I - \bar{\xi}) - u_I] w_I(\xi_I - \bar{\xi}) \tag{3}$$

여기서 $a^T(\bar{\xi})$ 은 $2 \times NB$ 행의 미지계수이며, $p(\xi - \bar{\xi})$ 은 $NB \times 1$ 단항식의 벡터를 의미한다. (1)에서 정의된 근사된 변위장의 오차를 최소화하는 범함수를 (3)과 같이 구성하고, $I=1 \sim NP$ 으로 공간상의 절점을 의미한다. w_I 와 u_I 는 절점의 가중함수 및 변위의 절점 값을 의미한다. 이 함수에 $a(\bar{\xi})$ 에 관해 변분을 취하면, 식 (4)와 같아진다.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = M(\bar{\xi})a(\bar{\xi}) - B U = 0 \quad \text{with} \quad M = PWP^T \quad \text{and} \quad B = PW \tag{4}$$

여기서 $P = P(\xi_I - \bar{\xi})$, $W = W(\xi_I - \bar{\xi})$, 이고 U 는 아래와 같이 주어진다.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\xi_1 - \bar{\xi}) & (\xi_2 - \bar{\xi}) & (\xi_3 - \bar{\xi}) & \dots & (\xi_{NP} - \bar{\xi}) \\ (\eta_1 - \bar{\eta}) & (\eta_2 - \bar{\eta}) & (\eta_3 - \bar{\eta}) & \dots & (\eta_{NP} - \bar{\eta}) \\ (\xi_1 - \bar{\xi})(\eta_1 - \bar{\eta}) & (\xi_2 - \bar{\xi})(\eta_2 - \bar{\eta}) & (\xi_3 - \bar{\xi})(\eta_3 - \bar{\eta}) & \dots & (\xi_{NP} - \bar{\xi})(\eta_{NP} - \bar{\eta}) \\ (\xi_1 - \bar{\xi})^2 & (\xi_2 - \bar{\xi})^2 & (\xi_3 - \bar{\xi})^2 & \dots & (\xi_{NP} - \bar{\xi})^2 \\ (\eta_1 - \bar{\eta})^2 & (\eta_2 - \bar{\eta})^2 & (\eta_3 - \bar{\eta})^2 & \dots & (\eta_{NP} - \bar{\eta})^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{NB \times NP}$$

구해진 계수 벡터 $\mathbf{a}(\bar{\xi})$ 식(4)를 식(1)에 대입한다.

$$\mathbf{u}^h(\xi, \bar{\xi}) = \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T(\bar{\xi}) \mathbf{M}^{-1}(\bar{\xi}) \mathbf{p}(\xi - \bar{\xi}) = \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi, \bar{\xi}) \mathbf{u}_I \quad (5)$$

(5)처럼 구해진 수식에 최적의 근사를 얻기 위해 이동과정을 취하면 식(6)과 같은 수식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \xi} \mathbf{u}^h(\xi, \bar{\xi}) &= \mathbf{u}^h(\xi) \\ \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \xi} \mathbf{p}^T(\xi - \bar{\xi}) &= \mathbf{p}^T(0) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots] \\ \mathbf{u}^h(\xi) &= \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{p}(0) = \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi) \mathbf{u}_I \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 \mathbf{u}_I 는 절점 I의 값이며, \mathbf{U}^T 이 때 형상함수 $\phi_I(\xi)$ 는 아래와 같이 주어진다. 이식을 풀어 서 기술하면 (7)과 같이 기술된다.

$$\phi_I(\xi) = \sum_{L=1}^{NB} \sum_{J=1}^{NB} B_{LJ}(\xi) M_{LJ}^{-1}(\xi) p_J(0) = \sum_{L=1}^{NB} B_{LJ}(\xi) b_L(\xi) \quad (7)$$

where $b_L(\xi) = \sum_{J=1}^{NB} M_{LJ}^{-1}(\xi) p_J(0)$

식(7)은 아래와 같이 단위 분할 조건과 선형 완전성을 만족함이 Liu(1995)에 의해 증명되었다.

$$\text{Partition of unity: } \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi) = 1 \quad (8)$$

$$\text{Linear completeness: } \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi) \xi_I = \xi \quad (9)$$

이렇게 구해진 $\phi_I(\xi)$ 가 형상함수로 쓰이기 위해서는 크로네커 델타 조건 및 형상함수의 연속성이 만족되어야 하며, 이를 만족하는 요소들 Cho et al(2005), Cho and Im(2006)이 제시하였다. 좀 더 자세한 설명을 위해서 공간상의 근사에 참여하는 절점의 수 및 기저함수의 수를 Rank(W) 및 NB라고 하며, 특히 경계에서의 근사의 참여하는 절점의 수 및 기저함수의 수는 RankB(W) 및 NBB라고 하겠다. 위 조건을 만족하는 Rank(W) > NB 인 경우에는 관한 연구는 Cho 와 Im(2005, 2006)에 연구에서 불일치 접합 및 균열전파에 관해서 진행되었다. 하지만 여전히 형상함수의 이동최소제곱근사로 인해 수치적분이 어려운 한계가 있으며, 최근 이런 단점을 해결한 Rank(W) = NB를 만족하는 요소가 Lim 과 Im(2006) 의해서 제시되었다. 하지만 Rank(W) = NB를 만족하면, 마스터 공간내에서 연속성이 일반적으로 만족되지 않기 때문에 수치적으로 연속

성을 검증해야 하며, 이를 만족하는 요소를 3장에 소개하도록 하겠다.

3. 이차원 이동 최소 제곱 기반 유한요소

3.1 (4+n)절점요소

(4+n)절점 요소는 하나의 선형요소와 여러 개의 선형 요소에 접합이 가능한 요소이며, 기저함수로 $p = [1, \xi, \eta, \xi\eta]$ 를 택한다. $n=3$ 경우를 예로 들면 Fig. 1 와 같다. 4개의 부공간으로 구성되며, 각 부 공간에서 영향력을 가지는 절점은 3, 4와 기타 절점에 의해서 정의된다. 이로 인해 $\overline{3,4}$ 및 $\overline{1,5}$, $\overline{5,6}$, $\overline{6,7}$, $\overline{7,2}$ 절점사이에서 선형 경계를 가진다. 각 부 공간은 2×2 가우스 적분을 통해 수치 적분이 된다.

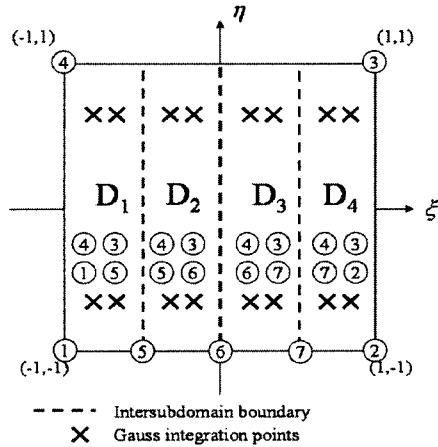


Fig. 1 A (4+n)-noded MLS-based element with linear interpolation on one of the boundary edges for $n=3$

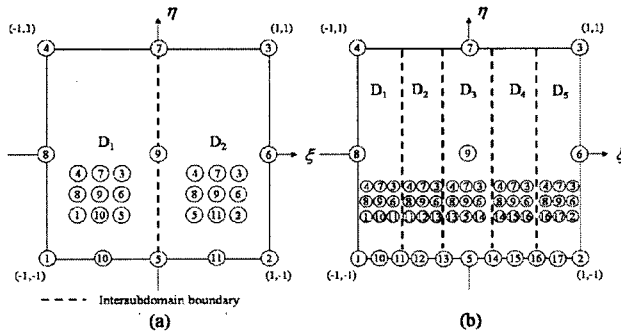


Fig. 2 A (9+2n)-noded MLS-based element with quadratic interpolation on the boundary: (a) $n=1$, (b) $n=4$

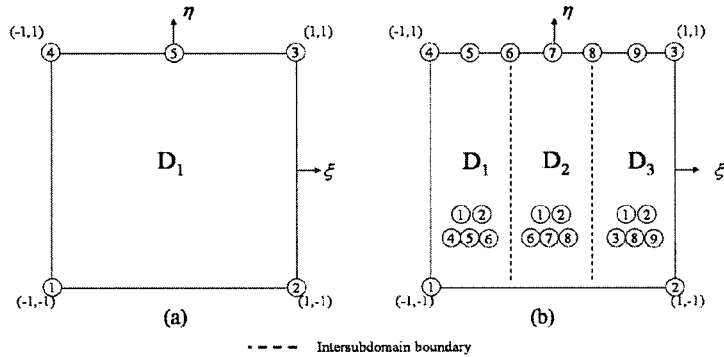


Fig. 3 A (5+2n)-noded MLS-based linear-quadratic transition element: (a) n=0, (b) n=2

3.2 (9+2n)절점 요소

(9+2n)절점 요소는 하나의 이차 경계에 여러 개의 이차경계의 접합이 가능한 요소로 (4+n)절점 요소와 같이 각 부 공간을 4,7,3,8,9,6의 및 기타 절점으로 근사하며, 기저함수로 9개의 라그랑지 이차다항식을 갖는다. n=1인 경우와 n=4인 경우를 각각 Fig.2a,2b에 나타내었다. n=4인 경우에 대해 설명하면, 4,7,3 및 1,10,11,11,12,13,13,5,4,14,15,16,16,17,2에 이차근사를 가진다. 부공간을 3x3요소를 가우스 수치적분이 가능하다.

3.3 A (5+2n)절점 선형-이차 변환 요소

(5+2n)절점 요소의 기저함수는 $p = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2(\eta+1)]$ 이며, $\eta = 1$ 에서 기저는 $[1, \xi, \xi^2]$ 으로 줄어들며, RankB(W)=NBB가 자동적으로 만족되어 이차함수가 재생이 된다. 이와 같은 이유로 $\eta = -1$ 에서는 기저는 $[1, \xi]$ 이며, 일차함수가 재생이 된다. n=2인 경우에 요소의 부 공간에 영향력을 가지는 절점을 Fig.3b에 나타내었다. 수치적분을 위해서는 각각의 부 공간을 3x2수치적분을 실행하였다. 실제로 Fig.3a의 경우는 잘 알려진 선형-이차 변환요소(Hughes,1987)와 같아지며, 이는 선형요소와 이차요소를 접합하는데 유용하다. 하지만 본 논문에서는 이것의 일반화 된 형태인 (5+2n)절점요소를 제시 하였으며, 하나의 선형 요소와 임의의 수의 이차요소의 접합도 가능하다. 이 요소의 성능을 패치시험을 통해서 검증하였다.

4. 수치예제

이장에서는 3장에서 언급한 요소의 성능 평가를 위해 다양한 패치시험을 실시하였으며, 이의 수치결과를 정리하도록 하겠다. (4+n)절점요소의 성능 평가를 위해 Fig. 4와 같은 왜곡된 패치를 구성하였으며, 아래 Ω_2 은 하나의 (4+n)절점 요소로 위 부분 Ω_1 다양한 수의 4-절점 선형 요소를 사용하였다. 위 부분의 선형요소의 수를 5, 20, 50, 100으로 증가시키면서 성능평가를 하였다. Fig. 4와 같이 경계조건을 주었으며, 재료상수는 $E=10^6 \text{ Pa}$, $\nu = 0.25$ 을 사용하고, 평면응력 조건을 부여하였다. σ_{22} 을 Fig. 5a ~ 5d에 나타내었다.

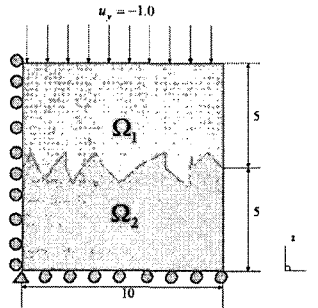


Fig. 4 Geometry and boundary conditions of the patch test for linear MLS-based finite elements.

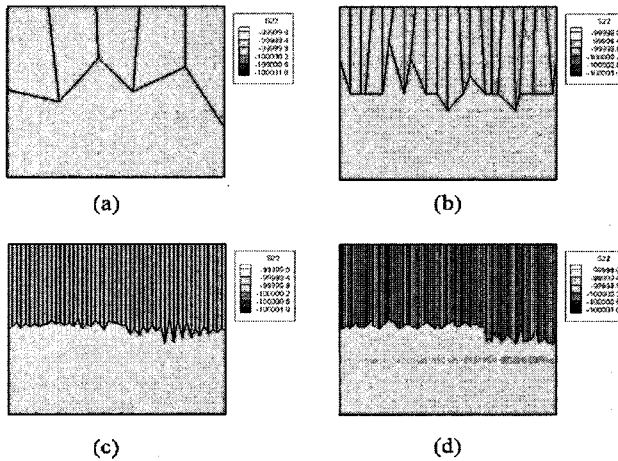


Fig. 5 σ_{22} plot of nonmatching zigzag shaped patch tests with different number of the 4-noded bilinear elements in the upper regions: (a) 5 conventional elements, (b) 20 conventional elements, (c) 50 conventional elements, (d) 100 conventional elements

(5+2n)절점 요소의 평가를 위해서 평면 불일치 면을 가지는 요소를 이용해서 패치시험을 실시 하였으며, $E=10^7$ 와 $\nu=0.29$, 평면 응력조건을 부여하였다. Fig. 6에 σ_{22} 를 나타내었다. 각각의 부공간의 3x2수치적분을 실시하였다. Ω_1 는 이차요소 Ω_2 은 선형요소로 모델링 하였으며, 경계영역 은 (5+2n)절점 요소로 대체하였다.

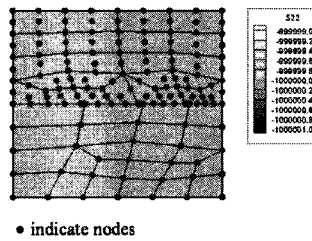


Fig. 6 The distribution of σ_{22} over the nonmatching interface between linear elements and quadratic elements (3x2 integration)

5. 결론

본 논문에서 이동최소제곱 근사 기반의 새로운 유한요소를 제시하였다. 이 유한요소는 기존의 유한요소에 비해 시도함수를 크게 확장한 것이며, Rank (\mathbf{W}) = NB를 만족하게 하는 다양한 유한요소를 소개하였다. 이는 마스터 공간상에 주어진 절점의 영향영역을 적절히 조절한 것으로 형상함수가 되기 위한 단위분할조건, 크로네커 델타 조건 및 연속성을 모두 만족한다. 본 논문에서는 불일치 요소망과 관련한 수치 예제를 통해 방법론의 높은 정확도 및 효율성을 증명하였으며, 이외에도 다양한 수치예제에 대해 검증을 하였으며, 자세한 것은 Lim과 Im(2006)논문에 의해 나타나 있다. 이외에도 접촉, 상변화, 3차원 확장 등에 관한 연구가 진행 중이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단(Korea Science and Engineering Foundation)의 지원 아래 수행되었으며, 이에 감사드립니다.(Grant Number: R01-2002-000-00230-0)

참고문헌

- Li, S., Liu, W.K. (2004) *Meshfree Particle Methods*, Springer, New York.
- Quiroz, L., Beckers, P. (1995) Non-conforming mesh gluing in the finite elements methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.2165~2184.
- Aminpour, M.A., Ransom, J.B., McCleary, S.L. (1995) A coupled analysis method for structures with independently modeled finite element sub-domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.3695~3718.
- Park, K.C., Felippa, C.A., Rebel, G. (2002) A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.2117~2142.
- Kim, H.G. (2002) Interface Element Method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.

3165~3194.

Cho, Y.S., Jun, S., Im, S., Kim, H.G. (2005) An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.3022~3046.

Cho, Y.S., Im, S. (2006) MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation. Part I: formulation and application for non-matching meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, pp.494~516.

Cho, Y.S., Im, S. (2006) MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation Part II: application for finite crack element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, pp.517~547.

Lancaster, P., Salkauskas, K. (1981) Surface generated by moving least squares method. *Mathematics of Computation*, 37, pp.141~158.

Liu, W.K., Jun, S., Z, Y.F. (1995) Reproducing kernel particle methods. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106.

Han, W., Meng, X. (2001) Error analysis of the reproducing kernel particle method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.6157~6181.

Liu, G.R., Gu, Y.T., Dai, K.Y. (2004) Assessment and applications of point interpolation methods for computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, pp. 1373~1397.

Hughes, T. J. R. (1987) *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, New York.

Lim, J.H., Im, S. (2006) MLS(Moving Least Square)-based finite elements for complex domains and discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted.