

무요소 콜로케이션법을 이용한 이종재료 계면해석

Meshfree Collocation Method on the Interface between Bimaterial Media

김 효 진* · 윤 영 철** · 김 동 조*** · 이 상 호****

Kim, Hyo-Jin · Yoon, Young-Chol · Kim, Dong-Jo · Lee, Sang-Ho

ABSTRACT

A new meshfree formulation is developed for material discontinuity problems. A local interfacial jump function which is defined as hyperplane function is embedded in the meshless approximation and the approximation accurately models functions with jumps in the displacement and the derivative fields. Diffuse derivative technique copes with difficulty due to complexity of derivative computation of meshfree approximation. Collocation method with diffuse derivative accelerates computing speed for numerical solution. By solving inclusion and composite material problems, the robustness and effectiveness of the method are verified.

Keywords: meshfree, material discontinuity, interfacial jump function, diffuse derivative, collocation method

1. 서 론

기존의 Galerkin 정식화에 근거한 무요소법은 필수경계조건의 만족을 위해 추가의 구속조건을 요구하며, 약형식(weak form)의 수치적분시 유한요소법의 요소와 유사한 적분셀을 사용하는 등 무요소법이라는 이름에 어울리지 않는 몇 가지 문제점이 제기되었으며(이상호와 김효진, 2003), 이러한 문제를 해결하기 위한 일환으로 콜로케이션법을 이용하여 강형식에서 직접 정식화하는 방법들이 연구되었으며(Aluru, 2000; Zhang 등, 2001), 최근에는 강형식에서 직접 정식화를 수행하는 과정에서 고차의 도함수를 미분해야 하는 콜로케이션법의 단점을 개선하기 위해서 미분함수를 근사화하여 고차의 도함수를 빠르고 정확하게 계산할 수 있는 분산미분근사(diffuse derivative)를 적용하는 점별 무요소법의 연구가 진행되고 있다(Kim과 Kim, 2003; 이상호와 김효진, 2003; Lee와 Yoon, 2004).

본 연구에서는 도함수의 계산에 있어 탁월한 효용성을 보여준 분산미분근사가 균열문제나 이종재료간 계면(interface)문제와 같이 해가 특이거동을 보이는 문제의 해석에 있어서도 매우 유용한 도구가 될 수 있음을 보여주하고자 한다. 이를 위해서 먼저 초평면 및 계면특이함수를 제안하고, 이 함수를 무요소 변위함수에 내재적으로 확장하여 균열이나 불연속성을 인식시키는 별도의 수치기법 없이 이종재료간 계면에서의

* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 첨단융합건설연구단 연구교수 E-mail: jinski@yonsei.ac.kr
 ** 정회원 · (주)시텍컨설팅트 기술연구소 차장 E-mail: abbu07@csem.yonsei.ac.kr
 *** 연세대학교 토목공학과 석사과정 E-mail: kdjdoc@csem.yonsei.ac.kr
 **** 정회원 · 연세대학교 토목공학과 교수 E-mail: lee@yonsei.ac.kr

불연속성문제를 해석하고자 한다. 이 때, 무요소 변위함수에 내제된 계면특이함수의 도함수 계산이 분산 미분근사에 의해서 정확하게 이루어 지는지 여부와 제안된 기법에 의해서 계면특이성이 정확하게 모델링 되는지를 수치예제 해석을 통해서 확인한다.

2. 계면을 고려한 무요소 근사화

2.1 초평면과 계면특이함수

영역 Ω 와 이중재료사이의 계면 Γ 를 포함하는 영역경계 $\partial\Omega$ 로 구성된 해석대상체를 고려해보자 (Figure 1참조). 이 때 이중재료사이의 계면 Γ 에서 발생하는 변위함수 및 그 도함수의 불연속성을 수치적으로 모델링하기 위해서는 초평면(hyperplane) 및 계면특이함수(interfacial jump function)의 도입이 필요하다. 이를 위해 먼저 국부적 초평면을 나타내는 함수 $H_{\bar{x}}^{\Gamma}(x)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다(Kim 등, 2005).

$$H_{\bar{x}}^{\Gamma}(y) := n_{\Gamma}(\bar{x}) \cdot (y - \bar{x}_{\Gamma}), \quad \bar{x} \in \Omega^S \tag{1}$$

여기서, $\bar{x}_{\Gamma} = \text{proj}_{\Gamma} \bar{x}$ 로서 국부기준점 \bar{x} 가 이중재료사이의 계면에 투영되는 점을 의미하며, $n_{\Gamma}(\bar{x})$ 는 법선벡터의 방향을 나타내는 함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$n_{\Gamma}(y) := \frac{y - y_{\Gamma}}{|y - y_{\Gamma}|}, \quad y \in \Omega^S \setminus \Gamma \tag{2}$$

실제적으로 $H_{\bar{x}}^{\Gamma}(y)$ 는 y 로부터 \bar{x} 에 종속되어 있는 초평면까지의 최소거리를 의미하는 거리함수이다. 초평면을 도입하는 이유는 계면에서의 변위함수를 미분할 때 요구되는 $n_{\Gamma}(\bar{x})$ 와 \bar{x}_{Γ} 에 대한 복잡한 미분 계산과정을 피하기 위해서이다. 즉, $n_{\Gamma}(\bar{x})$ 와 \bar{x}_{Γ} 는 변수벡터 x 에 대해서 독립적이기 때문에 초평면함수를 미분할 때 $n_{\Gamma}(\bar{x})$ 와 \bar{x}_{Γ} 의 미분은 수행되지 않는다.

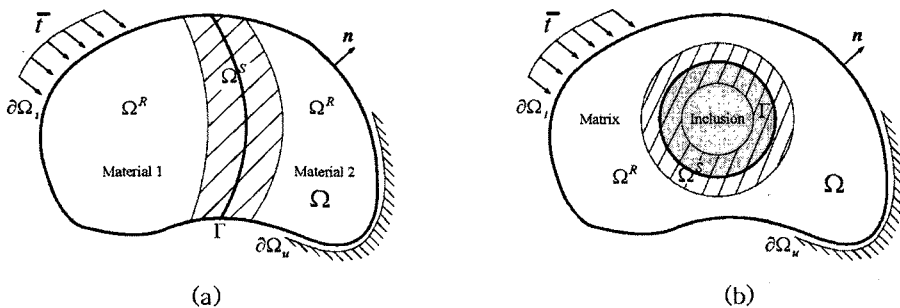


Figure 1 Bodies with interface, which consists of interfacial domain Ω^S and the regular domain Ω^R bounded by $\partial\Omega_u$ $\partial\Omega$, (a) Bimaterial body (b) Composite material body

이중재료사이 계면의 불연속성을 표현하기 위한 계면특이함수는 다음과 같이 정의된다.

$$b_{\Gamma}(x, \bar{x}) := H_{\bar{x}}^{\Gamma}(x), \quad \bar{x} \in \Omega^S \tag{3}$$

이때, 초평면함수 $H_{\bar{x}}^{\Gamma}(\mathbf{y})$ 는 선형함수이기 때문에 계면특이함수 또한 1차 미분만 가능하며 다음과 같이 표현된다.

$$D_{\bar{x}}^{\alpha} b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = (n_{\Gamma}(\bar{\mathbf{x}}))^{\alpha}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Omega^S \setminus \Gamma \text{ and } |\alpha| = 1 \quad (4)$$

여기서, $D_{\bar{x}}^{\alpha}$ 는 미분연사자를 의미한다.

2.2 내재적으로 계면처리가 포함된 무요소 근사화

Figure 1에 도시된 바와 같이 영역 Ω 는 일반영역 Ω^R 와 계면영역 Ω^S 로 나눌 수 있으며, 계면영역 Ω^S 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega^S := \{ \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) < \rho_{\bar{x}} \} \quad (5)$$

자연스럽게 일반영역 Ω^R 는 전체영역 Ω 중 계면영역 Ω^S 를 제외한 영역이 된다.

변위장 $u(\mathbf{x})$ 는 일반영역과 불연속성이 포함된 계면영역으로 나눌 수 있으며 이는 다음과 같이 표현된다.

$$u(\mathbf{x}) := u^R(\mathbf{x}) + u^S(\mathbf{x}) \quad (6)$$

여기서, $u^R(\mathbf{x})$ 은 기존의 무요소 근사화에서 사용되던 이동최소제곱근사화에 기반한 다음과 같은 다항식으로 표현될 수 있으며,

$$u_{\bar{x}}^R(\mathbf{x}) := \mathbf{p}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho_{\bar{x}}} \right) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Omega^R \quad (7)$$

여기서 $\mathbf{p}_m^T(\mathbf{x})$ 는 다항식으로 된 기저함수이며, $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = (a_0(\bar{\mathbf{x}}), a_1(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{K})$ 및 $\rho_{\bar{x}}$ 는 각각 미지계수벡터와 영향영역의 크기를 나타내는 함수이다. 한편 $u^S(\mathbf{x})$ 는 앞에서 정의한 계면특이함수와 미지계수의 곱으로 표현이 가능하며 아래와 같다.

$$u_{\bar{x}}^S(\mathbf{x}) := b_s(\bar{\mathbf{x}}) b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (8)$$

여기서, $b_s(\bar{\mathbf{x}})$ 는 물성치 차이에서 비롯되는 계면 불연속성의 강도를 나타내는 미지계수이며 $b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 는 식 (3)에서 정의된 계면특이함수이다. 식 (7) 및 식 (8)을 식 (6)에 대입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_{\bar{x}}(\mathbf{x}) := \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) + b_s(\bar{\mathbf{x}}) b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Omega^S \quad (9)$$

일반영역 Ω^R 속하는 변위장 $u^R(\mathbf{x})$ 은 불연속성을 포함하고 있지 않기 때문에, 식 (9)를 불연속성을 나타내는 $n_{\Gamma}(\bar{\mathbf{x}})$ 로 미분하는 경우 식 (9)는 다음과 같이 표현된다.

$$b_s(\bar{\mathbf{x}}) \left[\frac{\partial b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial n_{\Gamma}(\bar{\mathbf{x}})} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_{\Gamma}(\bar{\mathbf{x}})} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \quad (10)$$

이때, 식 (3)과 같은 계면특이함수의 정의로부터 식 (10)의 좌변은 다음과 같이 되며

$$\left[\frac{\partial b_\Gamma(x, \bar{x})}{\partial n_\Gamma(\bar{x})} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} = 2 \quad (11)$$

이로 인해 미지계수 $b_s(\bar{x})$ 가 다음과 같이 구해진다.

$$b_s(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n_\Gamma(\bar{x})} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} \quad (12)$$

식 (12)를 식 (9)에 대입하면 근사화된 변위함수는 다음과 같이 표현된다.

$$u_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n_\Gamma(\bar{x})} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} b_\Gamma(x, \bar{x}) + p_m^T(x, \bar{x}) a(\bar{x}) \quad (13)$$

식 (13)과 같이 표현된 근사변위함수를 널리 알려진 바와 같이 이동최소제곱근사법에 의한 수식전개과정을 거치면 최종적으로 다음과 같은 무요소 근사변위함수를 얻을 수 있다.

$$u_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n_\Gamma(\bar{x})} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} b_\Gamma(x, \bar{x}) + p_m^T(x, \bar{x}) M^{-1}(\bar{x}) \sum_{I \in \Lambda_{\bar{x}}} w \left(\frac{x - \bar{x}}{\rho} \right) p_m(x, \bar{x}) u^*(x_I) \quad (14)$$

여기서, 모멘트행렬 $M(\bar{x})$ 및 미지변위함수 $u^*(x_I)$ 는 각각 식 (15)와 식 (16)과 같이 정의된다.

$$M(\bar{x}) = \sum_{I \in \Lambda_{\bar{x}}} p_m(x, \bar{x}) w \left(\frac{x - \bar{x}}{\rho} \right) p_m^T(x, \bar{x}) \quad (15)$$

$$u^*(x_I) := u(x_I) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n_\Gamma(\bar{x})} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} b_\Gamma(x_I, \bar{x}) \quad (16)$$

근사변위함수에 대한 1차도함수는 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathfrak{D}^\alpha u(x) = \sum_{I \in \Lambda_x} \Phi_I^{[\alpha]}(x) u(x_I) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\bar{x}}} \right]_{x=\bar{x}_\Gamma} \Psi_\Gamma(x) \quad (17)$$

여기서 $\Psi_\Gamma^\alpha(x)$ 는 다음과 같다.

$$\Psi_\Gamma^\alpha(x) = D_x^\alpha b_\Gamma(x, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=x} - \sum_{I \in \Lambda_x} \Phi_I^{[\alpha]}(x) b_\Gamma(x_I, x) \quad (18)$$

3. 지배방정식 이산화

3.1. 고체역학문제의 지배방정식

고체역학 문제에서 지배방정식은 변위 u 및 체적력 b 를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{b} \text{ in } \Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \partial\Omega_u; \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \partial\Omega_t, \quad (20)$$

$$[\mathbf{u}] = 0 \text{ on } \Gamma; [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] = 0 \text{ on } \Gamma \quad (21)$$

여기서 $\nabla^2 (= \nabla \cdot \nabla)$ 는 Laplace 연산자이며, \mathbf{n} 은 경계 $\partial\Omega_t$, 또는 Γ 에서의 단위수직벡터이고, $\bar{\mathbf{t}}$ 은 규정된 표면력이다. 이 때 구성방정식 등을 적용하면 트렉션관련 조건식은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} + \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \partial\Omega_t, \quad (22)$$

$$[2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}) + \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma \quad (23)$$

여기서 $\mathbf{I} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 이며, λ 및 μ 는 Lamé 상수이고, $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 변형율텐서의 trace를 의미한다.

앞 장에서 기술한 바와 같이 계면에서의 불연속성을 모델링하는 성분은 이미 무요소 근사화 과정에 내재되어 있지만, 식(21)과 같은 트렉션조건을 만족시키기 위한 불연속성이 추가적으로 고려되어야 한다. 이 종재료간 계면에서의 트렉션 불연속성을 처리하기 위해서 다음과 같은 곱셈법칙을 정의한다.

$$[fg]_\Gamma = [f]_\Gamma \langle g \rangle_\Gamma + \langle f \rangle_\Gamma [g]_\Gamma \quad (24)$$

여기서 $[f]_\Gamma = f^+ - f^-$ 및 $\langle g \rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(g^+ + g^-)$ 를 의미한다. 식(26)을 이용하여 식(25)를 표현하면 다음과 같이 불연속성이 고려된 트렉션 조건을 얻을 수 있다.

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] = \langle \mu \rangle \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma + 2[\mu] \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle + (\langle \lambda \rangle [\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}] + [\lambda] \langle \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + \langle \mu \rangle [\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n}] \quad (25)$$

불연속조건을 나타내는 항 $\left[\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma$ 을

수치적으로 계산하기 위해서는 아래와 같이 기존의 유한요소형상함수를 이용한 근사화가 이용된다 (Figure 2 참조)

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} \right] = \sum_{I=1}^2 N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}_I \quad (26)$$

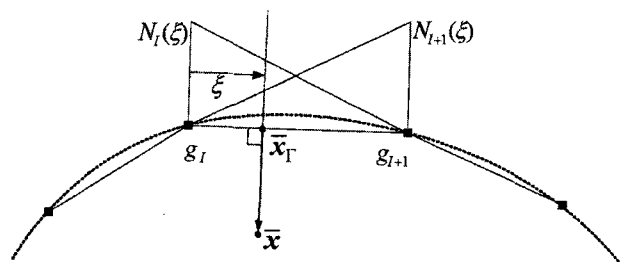


Figure 2 Discretization of interface

여기서 \mathbf{g}_I 는 각 세그먼트에서 양 끝점으로 그 점에서의 불연속 강도를 나타낸다. 불연속조건은 각각의 \mathbf{g}_I 에 할당되어 있으므로 방정식 수와 미지계수 수가 일치하게 되어 미지계수 값을 구할 수 있게 된다.

3.2 콜로케이션법에 의한 이산화

기존의 Galerkin법을 이용한 약형식에서의 이산화와는 달리 본 연구에서는 콜로케이션법을 이용하여 지

배방정식을 강형식으로 이산화한다. 강형식으로 이산화하는데 있어서 문제가 되는 점은 근사변위함수의 2차도함수까지 계산해야 된다는 점인데, 이러한 단점은 미분근사화기법을 통하여 효율적이면서도 빠르게 해결할 수 있다. 이에 대한 보다 자세한 내용은 이상호와 김효진(2003)을 참조할 수 있다.

식 (19)-(21)의 지배방정식을 콜로케이션법에 의해서 이산화하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\|\mathcal{L}u^h(x_I) + b(x_I)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0, \quad I \in \Lambda_{in} \text{ and } x_I \in \Omega^R \cup \Omega^S \quad (27)$$

$$\|\mathcal{B}_t u^h(x_J) - \bar{f}(x_J)\|_{L^\infty(\Gamma_t \cup \Gamma_C)} = 0, \quad J \in \Lambda_t \cup \Lambda_C \text{ and } x_J \in \Gamma_t \cup \Gamma_C \quad (28)$$

$$\|\mathcal{B}_u u^h(x_K) - \bar{u}(x_K)\|_{L^\infty(\Gamma_u)} = 0, \quad K \in \Lambda_u \text{ and } x_K \in \Gamma_u \quad (29)$$

4. 수치 예제

4.1. 2차원 이종재료 막대

서로 다른 물성을 가지는 두개의 재료로 구성된 막대를 해석대상으로 고려해보자 (Figure 3 참조) 시편의 길이 $L=12$, 높이 $h=48$ 이다. 재료 1의 E_1 및 ν_1 은 각각 10.0 및 0.3이며, 재료 2의 E_2 및 ν_2 는 각각 100.0 및 0.3 이다. 이종재료간 계면 Γ_1 은 시편을 정확하게 둘로 나누며, $y=0$ 일 때 $u_y = 0$ 이며 $y=h$ 에서 $\sigma_y = \bar{\sigma}$ 의 조건을 갖는다. 이 문제의 이론해는 다음과 같다.

$$u_x(x,y) = \begin{cases} -\nu_1 u_y(x,y), & 0 \leq y \leq \frac{h}{2} \\ -\nu_2 u_y(x,y), & \frac{h}{2} \leq y \leq h \end{cases} \quad (30a)$$

$$u_y(x,y) = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}}{E_1} y, & 0 \leq y \leq \frac{h}{2} \\ \frac{\bar{\sigma}}{E_2} (y - \frac{h}{2}) + \frac{\bar{\sigma}h}{2E_1}, & \frac{h}{2} \leq y \leq h \end{cases} \quad (30b)$$

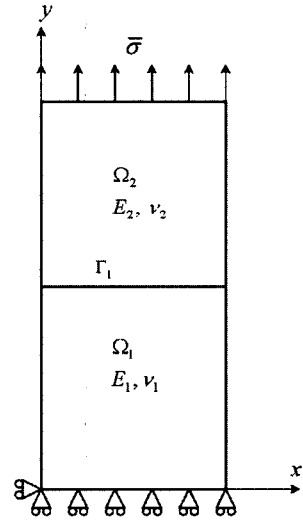


Figure 3 Schematic drawing of bimaterial bar

식 (30)에서 구해진 정해와 본 연구에서 제안된 방법에 의해서 계산된 수치해를 비교한 결과가 Figure 4에 도시되었다. 그림 4에 도시된 바와 같이 수치해석결과와 이론해가 거의 일치함을 알 수 있다. 한편, Figure 5에는 x방향 변형율의 수치해석결과를 이론해와 비교하였는데, 재료간 계면의 불연속성의 날카로운 부분을 정확하게 모사하고 있는 것을 확인할 수 있다. 이는, 기존의 무요소법에서는 얻기 쉽지 않은 결과이다.

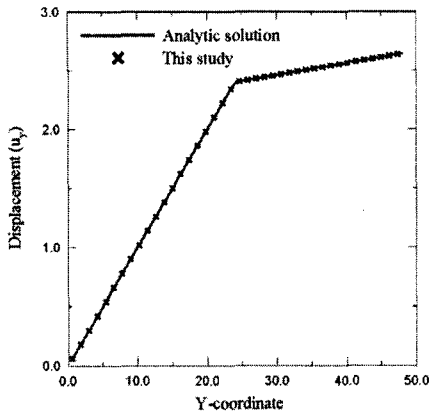


Figure 4 Comparison of displacements in bimaterial bar

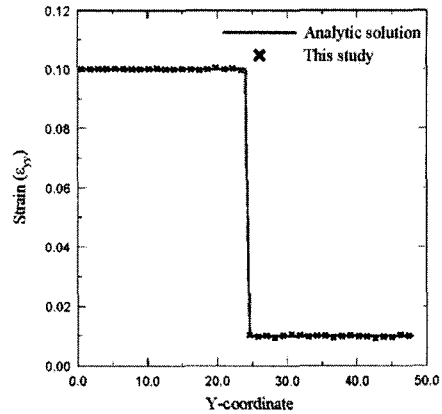


Figure 5 Comparison of strains in bimaterial bar

4.2. 원형형태의 이종재료가 매입된 평판

해석대상체의 크기는 $(-5, 5) \times (-5, 5)$ 이며, 평판을 구성하는 재료 1의 물성치는 $\lambda_1 = \mu_1 = 0.4$, $E_1 = 1$ 및 $\nu_1 = 0.25$ 이며 원형형태로 매입된 재료 2의 물성치는 $\lambda_2 = 5.7692$, $\mu_2 = 3.8461$, $E_2 = 10$ 및 $\nu_2 = 0.3$ 이다. 계면경계 Γ_2 에서 미리규정된 변위장은 $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$ 이다($u_r = r, u_\theta = 0$). 이때, 원형의 반지름 r 은 0.125이다. Figure 6 은 σ_{yy} 의 분포를 도시한 것이다. Figure 6 도시된 바와 같이 이종재료간의 불연속성이 아주 정확하게 묘사되고 있는 것을 확인할 수 있다.

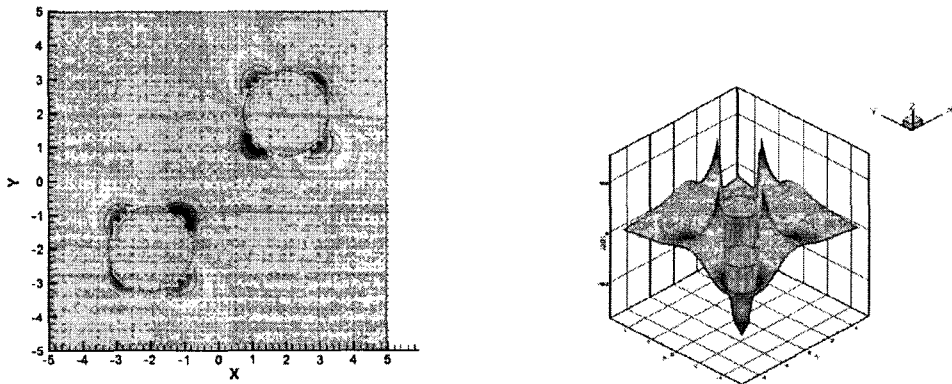


Figure 6 Surface plot of stress σ_{yy} in a bimaterial plate with two circular inclusions

5. 결 론

본 연구에서는 이종재료간 계면에서의 불연속성을 표현할 수 있도록 계면특이성이 고려된 확장항이무

요소 근사변위함수에 내재적으로 추가되는 무요소 콜로케이션법을 제안하였다. 먼저 법선벡터에 대한 미분의 복잡함을 피하기 위해서 초평면 및 계면특이함수를 제안하였고, 이 함수를 무요소 변위함수에 내재적으로 확장하였다. 이렇게 확장된 무요소 변위함수는 내재된 계면특이함수의 도함수 계산이 분산미분근사에 의해서 정확하게 이루어 지는지 여부와 제안된 기법에 의해서 계면특이성이 정확하게 반영되고 있는지를 몇 가지 수치예제를 통해서 검증하였다. 수치해석결과, 본 연구에서 제안된 방법이 이중재료간 계면에서의 변위 및 응력특이성을 효율적이고 정확하게 묘사하고 있음을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었으며(KRF-2004-042-D00189), 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 2005년도 첨단융합건설기술개발사업(C105D1010001-05D0101-0010)의 부분지원에도 감사를 드립니다.

참고문헌

- 이상호, 김효진 (2003) 도함수 근사화 기반의 점별무요소법을 이용한 탄성체 해석, 대한토목학회 논문집, 제23권, 제5A호, pp. 889-899.
- Aluru, N.R. (2000) A point collocation method based on reproducing kernel approximations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1083-1121.
- Kim, D.W. and Kim, Y.-S. (2003) Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp.1445-1464.
- Kim, D.W., Yoon, Y.-C., Liu, W.K., and Belytschko, T. (2005) Intrinsic meshfree approximation using asymptotic expansion for interfacial discontinuity of derivative, *Submitted for publication in Journal of Computational Physics*.
- Lee, S.-H. and Yoon, Y.-C. (2004) Meshfree point collocation method for elasticity and crack problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, pp. 22-48.
- Zhang, X., Liu, X.-H., Song, K.-Z., and Lu, M.-W. (2001) Least-squares collocation meshless method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, pp. 1089-1100.