

# 사다리꼴 핀의 최적 성능과 설계

강형석\*

## Optimum Performance and Design of a Trapezoidal Fin

Hyungsuk Kang\*

### ABSTRACT

A trapezoidal fin with various lateral surface slopes is designed optimally by using one-dimensional analytic method. For four different convection characteristic numbers, the trend of heat loss as a function of fin tip length is shown. The optimum heat loss is somewhat arbitrarily chosen as 92% of the maximum heat loss. The optimum fin length corresponding to this optimum heat loss versus convection characteristic number is presented. The optimum effectiveness and specific effectiveness is presented as a function fin shape factor.

### 초 록

측면 기울기가 변하는 사다리꼴 핀이 일차원 해석적 방법에 의하여 최적으로 설계된다. 각기 다른 네 경우의 대류특성계수에 대하여 핀 끝 길이를 따른 열손실의 변화경향이 보여 진다. 최적의 열손실은 다소 임의적으로 최대열손실의 92%로 선택된다. 이러한 최적의 열손실이 발생할 때의 최적의 핀 길이 대 대류특성계수의 변화가 나타내진다. 최적의 유용성과 특정한 경우의 유용성이 핀 형상 계수의 함수로 보여 진다.

Key Words: Trapezoidal fin(사다리꼴 핀), Effectiveness(유용성), Heat loss(열손실), Fin shape factor (핀 형상계수)

### 부호표기

$h$ : 핀 주위의 열대류계수 [ $W/m^2 \cdot ^\circ C$ ]  
 $I_0$ : 수정된 제1종 zero-order Bessel 함수  
 $I_1$ : 수정된 제1종 first-order Bessel 함수  
 $k$ : 열전도율 [ $W/m \cdot ^\circ C$ ]  
 $K_0$ : 수정된 제2종 zero-order Bessel 함수

$K_1$ : 수정된 제2종 first-order Bessel 함수  
 $l$ : 핀 바닥 높이의 반 [m]  
 $L$ : 무차원 핀 바닥 높이의 반,  $l/r_c$   
 $M$ : 핀 주위 대류특성계수,  $hr_f/k$   
 $q$ : 단위 폭 당 핀으로부터의 열손실 [ $W/m$ ]  
 $Q$ : 핀으로부터의 무차원 열손실,  $q/k\phi_i$   
 $r_b$ : 핀 바닥 길이 [m]  
 $r_c$ : 특성 길이 [m]  
 $r_e$ : 핀 끝 길이 [m]

\* 강원대학교 기계·메카트로닉스공학부  
 연락처, E-mail: hkang@kangwon.ac.kr

$R_b$ : 무차원 핀 바닥 길이,  $r_b/r_c$   
 $R_c$ : 무차원 핀 끝 길이,  $r_c/r_c$   
 $s$ : 핀 측면 기울기,  $(1-\xi)\ell/(r_c-r_b)$   
 $T$ : 온도 [°C]  
 $T_i$ : 내벽 온도 [°C]  
 $T_\infty$ : 핀 주위 온도 [°C]  
 $x$ : 길이 방향 좌표 [m]  
 $X$ : 무차원 길이 방향 좌표,  $x/r_c$   
 $y$ : 높이 방향 좌표 [m]  
 $Y$ : 무차원 높이 방향 좌표,  $y/r_c$

그리스 문자

$\theta$ : 무차원 온도,  $(T-T_\infty)/(T_i-T_\infty)$   
 $\xi$ : 핀 형상계수  
 $\epsilon$ : 핀 유용성  
 $\phi_i$ : 변형된 온도,  $T_i-T_\infty$  [°C]

상첨자

\* : 최적

하첨자

$b$ : 핀 바닥  
 $e$ : 핀 끝  
 $i$ : 내벽  
 $w$ : 외벽  
 $\infty$ : 핀 주위

## 1. 서 론

우리를 주위에서 열전달을 증가시키기 위해 다양한 형상의 핀들이 사용되고 있으며, 그 사용 범위는 일반 가정의 간단한 주방기구에서부터 최첨단 항공기까지 매우 광범위하다. 이러한 핀에 대한 연구들은 끊임없이 이루어져 왔으며 가장 보편적인 핀의 형상들은 삼각, 사각 또는 사다리꼴 등이다. 이러한 형상의 핀에 대한 연구의 예를 들면, Chung 및 공동저자들은 대류가

일어나는 사다리꼴 형상의 긴 핀의 최적화를 다루었고[1] Kang과 Yoon은 3차원 해석적인 방법을 사용하여 사다리꼴 핀의 성능을 해석 하였다 [2]. 또한 Abrate와 Newnham은 유한차분법을 사용하여 전열 면에 붙어 있는 삼각 핀에 대한 해석을 수행한 반면[3], Kang과 Look은 열적, 기하학적으로 비대칭인 사다리꼴 핀의 최적화를 연구하였다[4].

이와 같은 연구에서는 핀 바닥 경계조건으로 일정한 온도를 가정하였다. 따라서 본 연구에서는 사각 핀부터 삼각 핀으로 형상이 변화되는 사다리꼴 핀에 대하여 핀 내벽의 온도를 기준으로 내벽으로부터 핀 바닥까지의 전도 열전달을 고려하면서 최적의 열손실, 핀 길이 그리고 유용성 등을 해석하였다. 최적의 열손실은 핀 길이의 변화에 따른 열손실의 변화를 고려하여 최대 열손실의 92%로 설정하였다.

## 2. 1차원 해석

### 2.1 온도분포와 열손실

Figure 1에서 보여 지는 핀 위아래 면의 기울기가 변하는 사다리꼴 핀에 대한 무차원 형태의 1차원 지배방정식이 식 (1)에서 주어진다.

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{-s}{L-s(X-R_b)} \frac{d\theta}{dX} - M \frac{\sqrt{1+s^2}}{L-s(X-R_b)} \theta = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 주어진 핀 위 아래측면 기울기  $s$ 는 부호표기에서 나타나 있는데  $s$  값에서 보여 지는  $\xi$ 는 핀 형상계수로 범위는 0과 1사이로 주어지며 값이 1일 때는 형상이 사각 핀을 의미하며  $\xi$ 값이 작아질수록 핀 바닥 높이와 핀 끝 높이의 차이가 커지는 사다리꼴 핀이 되며  $\xi$ 값이 0이 되면 형상이 삼각 핀을 의미한다. 주어진 지배방정식 (1)을 풀기 위한 두 개의 무차원 경계조건들은 식(2)와 식(3)으로 주어진다.

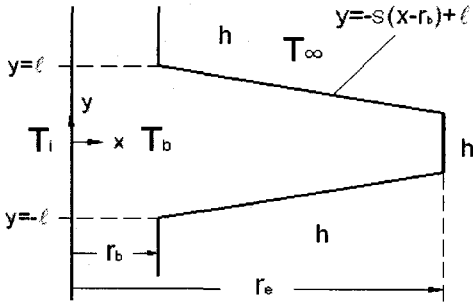


Fig. 1 Geometry of a trapezoidal fin

$$-\frac{d\theta}{dX}\Big|_{X=R_b} = \frac{1-\theta|_{X=R_b}}{R_b} \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dX}\Big|_{X=R_e} + M \cdot \theta|_{X=R_e} = 0 \quad (3)$$

경계조건 식들 (2)와 (3)과 함께 지배방정식 (1)을 풀면 사다리꼴 핀 내의 온도분포 식 (4)를 구할 수 있다.

$$\theta(X) = \frac{1}{W} [A \cdot I_0\{f(X)\} + B \cdot K_0\{f(X)\}] \quad (4)$$

여기서,

$$W = A\{I_0(E) + D \cdot I_1(E)\} + B\{K_0(E) - D \cdot K_1(E)\} \quad (5)$$

$$A = F \cdot K_1(G) + M \cdot K_0(G) \quad (6)$$

$$B = F \cdot I_1(G) - M \cdot I_0(G) \quad (7)$$

$$f(X) = 2P\sqrt{L-s(X-R_b)} \quad (8)$$

$$D = (P \cdot s \cdot R_b) / \sqrt{L} \quad (9)$$

$$E = 2P\sqrt{L} \quad (10)$$

$$F = \frac{P \cdot s}{\sqrt{L-s(R_e-R_b)}} \quad (11)$$

$$G = 2P\sqrt{L-s(R_e-R_b)} \quad (12)$$

$$P = \sqrt[3]{M^2 \cdot (1+s^2)} / s \quad (13)$$

핀으로부터의 무차원 열손실은 식 (14)를 사용하여 계산할 수 있다.

$$Q = \frac{2Ps\sqrt{L}\{A \cdot I_1(E) - B \cdot K_1(E)\}}{W} \quad (14)$$

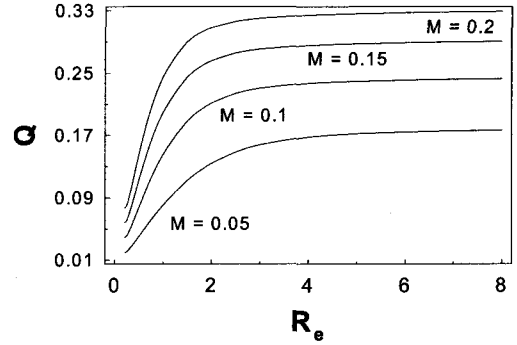


Fig. 2 Heat loss vs. fin tip length ( $R_b=0.2$ ,  $L=0.2$ ,  $\xi=0.5$ )

## 2.2 핀 유용성

핀 유용성은 식 (15)로 정의된다.

$$\epsilon = Q/Q_w \quad (15)$$

식 (15)에서 보여 지는 핀이 없을 경우의 단순 외면으로부터의 무차원 열손실  $Q_w$ 는 식 (16)을 사용하여 구할 수 있다.

$$Q_w = \frac{q_w}{k\phi_i} = \frac{2L \cdot M}{1 + M \cdot R_b} \quad (16)$$

## 3. 결과 및 고찰

Figure 2는 네 경우의 대류특성계수에 대하여 다른 변수들이 고정되었을 때 핀 끝 길이의 변화에 따른 열손실의 변화를 나타낸다. 핀 길이가 증가함에 따라 열손실은 처음에 급격히 증가하다가 그 이후 서서히 증가하여 최대 값에 이르게 됨을 보여준다. 핀 길이가 증가함에 따라 최대열손실의 약 90%~98%까지는 지속적으로 열손실이 증가한다. 따라서 본 연구에서는 다소 임의적으로 최대열손실의 92%를 최적의 열손실로 선택하였다.

Figure 3은 각각 핀 바닥 두께와 핀 바닥 높이가 같이 변하는 경우에 대하여 대류특성계수 값에 따른 최적의 열손실과 핀 끝 길이의 변화를 보여준다. 대류특성계수가 증가함에 따라 최적의 열손실은 지속적으로 증가하는 반면 최적의

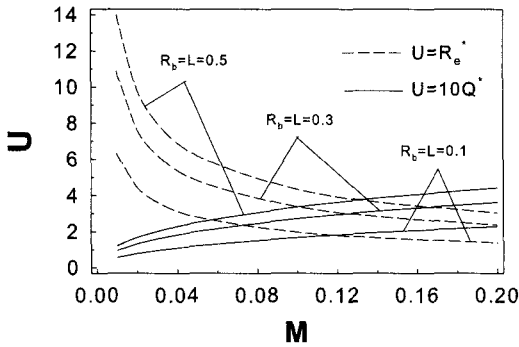


Fig. 3 Optimum values vs. convection characteristic number ( $\xi=0.5$ )

핀 끝 길이는 처음에는 현저히 감소하다 그 이후에는 서서히 감소함을 보여준다.

Figure 4는 핀 형상계수의 변화에 따른 최적의 유용성과 핀 길이가 1.8일 때의 유용성의 변화를 나타낸다. 핀 형상계수가 0부터 1까지 변함에 따라 (i.e. 형상이 삼각 핀에서 사각 핀으로 변함에 따라) 핀 길이가 1.8일 때의 유용성은 지속적으로 증가하는데 이는 전열면적의 증가에 기인한다. 반면 최적의 열손실은 영향을 받지 않는데 이는 최대 열손실이 핀의 형상에 영향을 받지 않을 만큼 긴 핀 길이에서 발생하기 때문이다.

#### 4. 결 론

본 연구 결과, 다음과 같은 결과를 얻는다. 다른 변수들이 일정하게 주어졌을 때 대류특성 계수가 작아짐에 따라 최적의 열손실은 작아지는 반면 최적의 핀 길이는 길어진다. 짧은 핀 길이에서는 핀 형상계수가 커짐에 따라 유용성은 커진다. 최적의 유용성은 핀 형상계수의 변화에 전혀 영향을 받지 않는데, 이는 최대 열손

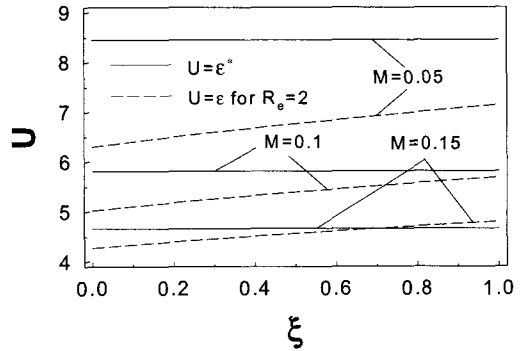


Fig. 4 Optimum effectiveness and effectiveness for  $R_e=2$  vs. fin shape factor ( $R_b=0.2, L=0.2$ )

실이 너무 긴 핀 길이에서 일어나기 때문에 핀의 형상이 최대 열손실 값에 영향을 주지 않기 때문이다.

#### 참 고 문 헌

1. Chung, B. T. F., Abdalla, M. H. and Liu, F., "Optimization of Convective Longitudinal Fin of Trapezoidal Profile," Chem. Eng. Comm., Vol. 80, 1989, pp. 211~223
2. 강형석, 윤세창, "열교환 향상을 위한 경사각이 다른 사다리꼴 핀에 대한 성능해석," 한국추진공학회지, 제3권 3호, 1999, pp. 16-24
3. S. Abrate and P. Newnham, "Finite Element Analysis of Triangular Fins Attached to a thick Wall", Computer & Structures vol. 57, no. 6, 1995, pp. 945~957
4. H. S. Kang and D. C. Look Jr., "Optimization of Thermally and Geometrically Asymmetric Trapezoidal Fins," AIAA J. of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 18, No. 1, 2004, pp. 52-57