시간지연 특이시스템의 비약성 보장비용 제어

Non-fragile guaranteed cost control of delayed descriptor systems

김 종 해
(Jong Hae Kim)

Abstract – This paper is concerned with non-fragile guaranteed cost state feedback controller design algorithm for descriptor systems with time-varying delay and static state feedback controller with multiplicative uncertainty. The considered uncertainties are norm-bounded and time delay is time-varying. Under the condition of controller gain variations, conditions for the existence of controller satisfying asymptotic stability and non-fragility and controller design method are derived via LMI approach. Moreover, the measure of non-fragility and the upper bound to minimize guaranteed cost function are given.

Key Words : Descriptor systems, non-fragile control, guaranteed cost control, time delay, LMI

1. 서 론

특이현상은 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 상태변수와 물리적 현상사이의 제약조건 등의 상태공간 모델이 해석하지 못하는 회로시스템의 임펄스나 히스테리시스 등의 해석을 가능하게 한다. 특이시스템의 특징들로 인하여 대규모 시스템이나 제약조건을 가지는 기계적 시스템 등에 많은 관심을 가지면서 다양한 연구결과들[1,2]이 나왔다.

H_∞ 제어문제와 더불어 보장비용 함수를 최적화하는 보장비용 제어기 설계문제는 최근까지 다양한 연구결과[3,4,5]를 제시하고 있다. 뿐만 아니라 특이시스템에 대한 다양한 제어기 설계 알고리듬의 개발로 인하여 그동안 해결하지 못했던 문제들의 최적화문제를 해결하였다. 하지만 지금까지 대부분의 제어기 설계 문제들이 시스템의 불확정성이나 섭동에 대한 연구가 주를 이루어 왔다. 플랜트의 변수에 대하여 강인성을 가지도록 설계하거나 하나의 성능지수를 최적화하도록 설계한 궤환시스템은 매우 정확한 제어기 구현이 요구되어진다. 일반적인 제어기 설계방법은 제어기의 정확하게 구현되어진다는 가정하에 이루어진다. 따라서, 제작하는 제어기는 이득변수의 변화에도 불구하고 불확실성에 잘 견딜 수 있도록 설계하여야 한다. 제어기의 약성(fragility)은 기본적으로 제어기를 구현할 때 시스템의 부정확성으로 인하여 궤환시스템의 성능저하를 유발하므로 중요한 문제로 고려되고 있다. 또한, 정확한 제어기의 구현이 가능하다 하더라도 현장에서는 제어기의 이득 조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기의 비약성에 대한 연구[6-9]가 필요하다.

본 논문에서는 시변 시간지연과 제어기에 곱셈형 섭동을 가지는 특이시스템에 대하여 보장비용 성능지수를 최소화하는 비약성 제어기 설계 알고리듬에 대한 방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제안한다. 보장비용 함수의 상한치의 최소값 뿐만 아니라 제어기의 비약성 척도를 제시한다.

김 종 해: 鮮文大學校 電子工學部 助敎授 · 工博

2. 문제설정

시간지연을 가지는 선형 특이시스템

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t) \quad (1)$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [\bar{d}, 0]$$

을 다룬다. 여기서, $x(t) \in R^n$은 상태, $u(t) \in R^m$는 제어입력, E는 $rank(E) = r \le n$를 만족하는 특이행렬이고, 시변 시간지연은 $0 \le d(t) \le d$, $\dot{d}(t) \le \bar{d} < 1$, $\phi(t)$는 초기 연속함수이고, 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 비록 설계할 제어기의 형태는

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

와 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 곱셈형 섭동(multiplicative uncertainty)을 가지는

$$u(t) = [I + \alpha\Phi(t)]Kx(t) \quad (3)$$

의 형태라고 가정한다. 여기서, K는 제어기 이득(controller gain), α는 양의 실수이고, $\alpha\Phi(t)K$는 제어기 이득의 변동을 나타낸다. 그리고, $\Phi(t)$는 유계(bound)를 가지는

$$\Phi(t)^T\Phi(t) \le I \quad (4)$$

와 같이 정의한다. 또한, α는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성 척도(the measurement of non-fragility)를 나타낸다. 시간지연을 가지는 특이시스템 (1)과 실제 약성을 포함하는 제어

기 (3)으로 구성되는 폐루프 특이시스템은

$$E\dot{x}(t) = [A+B(I+\alpha\Phi(t)K)]x(t) + A_d x(t-d(t)) \tag{5}$$

와 같이 주어진다. 또한, 보장비용 성능지수는

$$\int_0^\infty [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)]dt \tag{6}$$

이다. 따라서, 제안하는 제어기 설계의 목적은 구현할 때 발생하는 제어기 이득의 변동과 시간지연에도 불구하고 폐루프 특이시스템이 보장비용 성능지수 (6)을 최소화하고 제어기 이득 변동을 반영하는 비약성 척도 α 범위이내에서 점근적 안정성을 보장하는 것이다.

3. 비약성 보장비용 제어기 설계

본 장에서는 시간지연을 가지는 특이시스템의 비약성 보장비용 제어기가 존재할 조건과 설계 방법을 제안한다.

정리 1: 다음의 행렬부등식

$$E^T P = PE \geq 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &A^T P + P^T A + Q + Z + K^T RK + K^T B^T P + PBK \\ &+ \alpha\epsilon_1 K^T RR^T K + \frac{\alpha}{\epsilon_1} K^T K + \alpha K^T K + \frac{\alpha}{\epsilon_2} K^T K \\ &+ \alpha\epsilon_2 BB^T P < 0 \end{aligned} \tag{8}$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P, 궤환이득 K, 양정의 행렬(positive-definite matrix) Z가 존재하면, 제어기 (3)은 시간지연과 제어기의 약성의 존재에도 불구하고 안정성과 비약성 및 보장비용 함수의 최소화를 보장하는 비약성 보장비용 제어기이다. 여기서, 수식전개를 위하여 $R < I$과 $\alpha < 1$로 정의하고, 보장비용함수의 상한치(upper bound)는

$$J \leq \phi(0)^T E^T P\phi(0) + \int_{-d(0)}^0 \phi(\tau)^T Z\phi(\tau)d\tau \tag{9}$$

이다.

증명: 폐루프시스템의 점근적 안정성을 위하여, (7)을 만족하는 리아푸노프 방정식

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T Px(t) + \int_{t-d(t)}^t x(t)^T Zx(t)dt \tag{10}$$

을 잡고, 시간에 대한 미분을 구하면

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}_a(x(t)) = x(t)^T E^T Px(t) + x(t)^T P^T E x(t) \\ &+ x(t)^T Zx(t) - (1-\bar{d})x(t-d(t))^T Zx(t-d(t)) < 0 \end{aligned} \tag{11}$$

와 같고 보장비용 성능지수 (6)과 아래의 관계

$$\dot{V}_a(x(t) < x(t)^T[Q + K^T(I+\alpha\Phi(t))^T R(I+\alpha\Phi(t))K]x(t) \tag{12}$$

와 몇 가지 보조정리를 이용하면 식 (8)을 얻을 수 있다. 식 (12)의 양변을 초기조건을 사용하여 0에서 T_f까지 적분하면

$$\begin{aligned} &-\int_0^{T_f} x(t)^T[Q + K^T(I+\alpha\Phi(t))^T R(I+\alpha\Phi(t))K]x(t) \\ &> x(T_f)^T E^T Px(T_f) - x(0)^T E^T Px(0) \\ &+ \int_{T_f - d(T_f)}^{T_f} x(\tau)^T Zx(\tau)d\tau - \int_{-d(0)}^0 x(\tau)^T Zx(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

과 같고, 점근적 안정성의 성질을 이용하면 식 (9)를 얻을 수 있다. ■

정리 1의 조건은 구하려는 변수의 견지에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식 형태가 아니고 (7)에 등호 조건을 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 정리 2에서 적절한 방법을 사용하여 등호조건을 제거하고, 변수의 측면에서 볼록최적화 조건으로 변형한다.

정리 2: 다음의 최적화문제

mimimize $(\rho + tr(G))$ subject to

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & X_1 & X_3^T & X_1 & X_3^T & Y_1^T & \Psi_4 \\ * & \Psi_3 & 0 & X_4 & 0 & X_4 & Y_2^T & \Psi_5 \\ * & * & -S_1 & -S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -T_1 & -T_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -T_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma\Psi_6 \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} -\rho I & \phi_{01}^T \\ * & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} -G & N_1^T & N_2^T \\ * & -T_1 & -T_2 \\ * & * & -T_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

$$\gamma > 1 \tag{17}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 X_1, T_1, T_4, G, 역행렬이 존재하는 행렬 X_4, 행렬 X_3, Y_1, Y_2 및 양의 실수 ρ, γ가 존재하면, 아래의 형태

$$K = YP = [\,Y_1 P_1 + Y_2 P_3 \;\; Y_2 P_4\,] \tag{18}$$

로 표현되는 제어이득은 시간지연과 제어기의 이득 변화에도 불구하고 폐루프 특이시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 및 보장비용 성능지수를 최소화하는 비약성 보장비용

제어기이다. 여기서 변수들은 아래와 같다.

$$\Psi_1 = A_1X_1 + X_1A_1^T + Y_1^TB_1^T + B_1Y_1 + \eta^{-1}(A_{d1}T_1A_{d1}^T + A_{d2}T_2^TA_{d1}^T + A_{d1}^TT_2A_{d2}^T + A_{d2}T_4A_{d2}^T)$$
$$\Psi_2 = X_3^TA_4^T + Y_1^TB_2^T + B_1Y_2 + \eta^{-1}(A_{d1}^TT_1A_{d3}^T + A_{d2}^TT_2^TA_{d3}^T + A_{d1}T_2A_{d4}^T + A_{d2}T_4A_{d4}^T)$$
$$\Psi_3 = A_4X_4 + X_4A_4^T + Y_2^TB_2^T + B_2Y_2 + \eta^{-1}(A_{d3}^TT_1A_{d3}^T + A_{d4}T_2^TA_{d3}^T + A_{d3}T_2A_{d4}^T + A_{d4}T_4A_{d4}^T)$$
$$\Psi_4 = [Y_1^TB_1],\quad \Psi_5 = [Y_2^TB_2]$$
$$\Psi_6 = \begin{bmatrix} \epsilon_1RR^T + (1/\epsilon_1 + 1 + 1/\epsilon_2)I & 0 \\ * & 1/\epsilon_2I \end{bmatrix}$$
$$Q^{-1} = S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ * & S_4 \end{bmatrix},\quad Z^{-1} = T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ * & T_4 \end{bmatrix}$$
$$\gamma = 1/\alpha,\ P_1 = X_1^{-1},\ P_4 = X_4^{-1},\ P_3 = -P_4X_3P_1$$
$$\tilde{Z} = (1-\bar{d})Z = \eta Z,\ \tilde{T} = \tilde{Z}^{-1}.$$

증명: 행렬부등식 (8)은 슈어 여수정리와 변수치환, $X = P^{-1}$와 $Y = KP^{-1} = KX$를 이용하면

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & X^T & X^T & Y^T & \Pi_2 \\ * & -S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -T & 0 & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma\Psi_6 \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

를 얻는다. 여기서, 변수들은 아래와 같다.

$$\Pi_1 = AX + X^TA^T + Y^TB^T + BY + A_d\tilde{T}A_d^T$$
$$\Pi_2 = [Y^TB]$$

구하려는 변수의 견지에서 선형행렬부등식의 조건으로 표현하고 정리 1의 등호 조건을 없애기 위하여 특이치 분해 방법 (singular value decomposition)을 이용한다. 일반성을 상실함 없이, 특이시스템 행렬은

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ \phi(0) = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

의 구조로 분해[1,2]된다고 가정한다. 그리고, 구하려는 해를

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix},\ Y = [Y_1\ Y_2] \tag{21}$$

과 같이 두고, (20)과 (21)을 (19)에 대입하면 변수의 견지에서 선형행렬부등식인 조건 (14)를 얻는다. 또한, 식 (9)의 우변의 첫째 항은

$$\phi(0)^TE^TP\phi(0) < \rho \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho I & \phi_{01}^T \\ * & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

으로 식 (15)와 같이 변형된다. 식 (9)의 우변의 둘째 항은 아래의 관계를 가진다.

$$\int_{-d(0)}^{0} \phi(\tau)^TT^{-1}\phi(\tau)d\tau = tr(NN^TT^{-1}) = tr(N^TT^{-1}N) < tr(G). \tag{23}$$

따라서, $-G + N^TT^{-1}N < 0$은 식 (20)을 이용하면 식 (16)으로 변형된다. 여기서, $\int_{-d(0)}^{0} \phi(\tau)^T\phi(\tau)d\tau = NN^T$. 식 (17)은 $\alpha < 1$과 $\gamma = 1/\alpha$로부터 유도된다. ■

4. 결 론

제안한 제어기 설계 알고리듬은 특이시스템의 시간지연과 설계 할 제어기의 변동성분이 승산섭동의 형태를 가지는 경우에 대하여 보장비용 성능지수의 상한치를 최소화하고 안정성을 보장하는 비약성 보장비용 제어기이다. 또한, $E = I$인 경우의 일반적인 상태공간 문제는 선형행렬부등식 (19)로부터 직접 구할 수 있다. 따라서, 제안한 시간지연 특이시스템의 비약성 보장비용 제어기는 비특이시스템에도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이다.

참 고 문 헌

[1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp.669-673, 1997.
[2] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems," *IEEE TR. Automat. Cont.*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.
[3] I. R. Petersen, "Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems," *IEE Proc.-D*, vol. 142, pp. 95-102, 1995.
[4] L. Yu and J. Chu, "An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time delay system," *Automatica*, vol. 35, pp. 1155-1159, 1999.
[5] J. H. Kim, "Guaranteed cost control of parameter uncertain systems with time delay," *Trans. Control, Automat., and Syst. Eng.*, vol. 2, pp.19-23, 2000.
[6] P. Dorato, C. T. Abdallah, and D. Famularo, "On the design of non-fragile compensator via symbolic qualifier elimination," *World Automation Congress*, pp. 9-14, 1998.
[7] L. H. Keel and P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, pp. 1098-1105, 1997.
[8] A.Jadbabie, C. T. Abdalah, D. Famularo, and P. Dorato, "Robust non-fragile and optimal controller design via linear matrix inequalities," *Proc. American Control Conference*, pp.2842-2846, 1998.
[9] J. H. Kim, S. K. Lee, and H. B. Park, "Robust and non-fragile H_∞ control of parameter uncertain time-varying systems," *SICE in Morioka*, pp. 927-932, 1999.
[10] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.