

전자기 전달관계 해석기법을 이용한 영구자석형 동기전동기의 자계특성해석

장석명, 고경진, 조한욱, 최장영
충남대학교

Magnetic Field Analysis of Permanent Magnet Synchronous Motor using Transfer Relations of Magnetic Vector Potential

Seok-Myeong Jang, Kyoung-Jin Ko, Han-Wook Cho, Jang-Young Choi
Chungnam National University

Abstract - This paper presents an analytical solution to predict magnetic field distribution of permanent magnet synchronous motor equipped with surface-mounted magnet by using transfer relations in terms of two-dimensional model in polar coordinates. The analytical results are validated by comparison with finite element analyses (FEA).

1. 서 론

전자기 에너지 변환기의 전자기 특성해석의 방법은 크게 수치해석법과 전자기 이론에 의한 해석적 기법으로 구분되어 있다. 수치해석법은 전자기 에너지 변환기기의 복잡한 기하학적 형상의 정밀 해석에 유용하며 전자기 이론에 의한 해석적 기법은 초기 설계 시 설계 변수에 따른 기기의 특성을 분석·파악 하는데 이점이 있다. 전자기 이론 해석법 중에서 미국 MIT 대학의 Melchel 교수가 제안한 전자기 전달관계 해석법은 해석 영역의 지배 방정식으로부터 자기벡터자위를 구하는 기존의 공간 조조파법과 유사하나 매질의 각 경계면에서 자기 벡터자위를 구하여 전달관계 행렬을 유도하여 사용한다는 점에서 다르고, 해석하고자 하는 계의 전달관계 행렬의 유도를 한번 시행함으로써 각 영역에 대해서 지배방정식을 풀어야 하는 수고로움을 덜어주기 때문에 둘 이상의 계자 시스템에 적용하면 매우 편리하다[1][2]. 따라서 본 논문에서는 전자기 전달관계 해석법을 사용하여 영구자석형 동기전동기의 자계 특성예측을 위한 해석 해로 제시하였고 그 해석 결과는 Maxwell을 사용한 유한요소해석 결과와 비교되어 그 타당성을 증명하였다.

그림 1은 축 영역과 고정자 영역이 철심으로 구성되고 전자기 코일을 current sheet로 가정한 영구자석형 동기전동기의 간이화된 극좌표 해석 모델이다. 이 해석모델에서 영구자석은 평행자화 패턴을 갖는 영구자석을 고려하였다. 그리고 α, β, γ 는 각각 영구자석 외반경, 영구자석 내반경, 고정자의 내반경을 나타낸다.

2. 영구자석 영역에서의 전달관계

그림 2는 영구자석의 경계면 d 와 e 에서 자기적 상호 전달관계를 해석하기 위해 극좌표 모델을 도시한 것이다. 극좌표 해석 모델에 대하여, 자기벡터자위 A 는 θ 방향으로 np 와 m 의 공간조조파 계수에 따른 분포특성을 갖고 있으며, 크기는 r 방향으로 시간 t 에 대하여 변화율을 갖는 함수로 식 (1)과 같이 정의된다.

$$A = \text{Re} A(r, t) e^{-j(np\theta + mt)} \mathbf{i}_z \quad (1)$$

그림 2에서 영구자석 영역에는 전류원이 존재하지 않으므로 맥스웰 방정식으로부터 식 (2)가 성립한다.

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

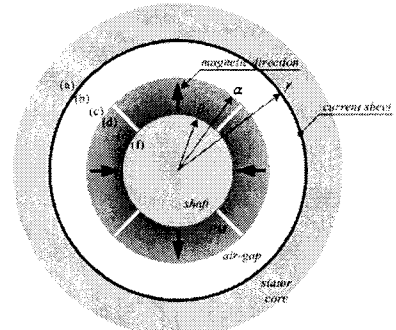


그림 1. 영구자석형 동기전동기의 극좌표 해석모델

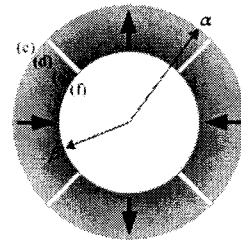


그림 2. 영구자석 영역에 대한 극좌표 모델

또한, 영구자석 영역의 자속밀도 B , 자계의 세기 H , 및 자화의 세기 M 은 식 (3)의 관계가 성립한다.

$$B = \mu_0(H + M) \quad (3)$$

식 (3)의 양변에 curl을 취한 후 식 (2)를 적용하면 식 (4)가 성립한다.

$$\nabla \times B = \mu_0 \nabla \times M \quad (4)$$

또한 식 (4)는 $B = \nabla \times A_n$ 의 관계 및 Coulomb Gauge를 적용하면 식 (5)와 같은 푸아송 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 A_n = -\mu_0(\nabla \times M) \quad (5)$$

한편, 식 (5)의 우변에서, $\nabla \times M$ 을 정리하기 위하여 자화 M 을 정의하면 식 (6)과 같다.

$$M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{M_n e^{-jnp\theta} \mathbf{i}_r + M_{\theta n} e^{-jnp\theta} \mathbf{i}_\theta\} \quad (6)$$

그림 3의 (1), (2)는 각각 반경방향 자화패턴(M_n), 원주 방향 자화패턴($M_{\theta n}$)을 모델링한 것이다. 그리고 식 (6)에 의해 자화 M 은 그림 3의 (3)과 같다.

식 (5) 좌변의 편미분 방정식을 풀면 A_m 은 식 (7)과 같다.

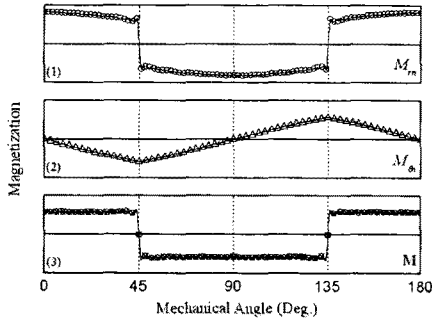
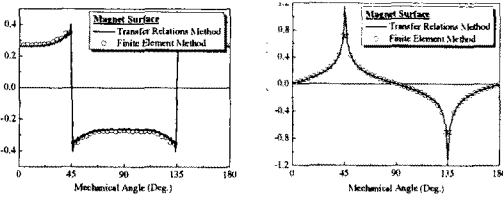


그림 3. 해석모델의 자화 모델링



(a) 수직성분, B_{rn}^c (b) 수평성분, $B_{\theta n}^c$

그림 4. 영구자석에 의한 자계 특성 해석결과(영구자석의 표면)

$$A_{zn} = \frac{\left(\frac{\beta}{r}\right)^{np} - \left(\frac{r}{\beta}\right)^{np}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{np} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{np}} (A_{zn}^d - A_{znp}(\alpha)) + \frac{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{np} - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{np}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{np} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{np}} (A_{zn}^e - A_{znp}(\beta)) + A_{znp}(r) \quad (7)$$

식 (7)에서 A_{znp} 는 특수해로 식 (8)과 같다.

$$A_{znp} = \sum_{n=-\infty, \text{odd}}^{\infty} \frac{j r \mu_0 n p M_n}{(np)^2 - 1} e^{-jnp\theta} \quad (8)$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 에 의해 r 방향 및 θ 방향의 자속밀도는 각각 식 (9)과 같다.

$$B_{rn} = -\frac{jnp}{r} A_{zn} e^{-jnp\theta} \quad (9)$$

$$B_{\theta n} = -\frac{\partial}{\partial r} A_{zn} e^{-jnp\theta}$$

식 (9)에서 $B_{\theta n}$ 을 계산하면 식 (10)과 같다.

$$B_{\theta n} = \frac{np}{r} \frac{\left(\frac{\beta}{r}\right)^{np} + \left(\frac{r}{\beta}\right)^{np}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{np} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{np}} (A_{zn}^d - A_{znp}(\alpha)) - \frac{np}{r} \frac{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{np} + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{np}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{np} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{np}} (A_{zn}^e - A_{znp}(\beta)) - \frac{j\mu_0 np M_n}{(np)^2 - 1}$$

여기서, 경계면 d 와 e 에 대해 식 (11)을 정의한다.

$$\begin{cases} B_{\theta n} = B_{\theta n}^d & \text{at } r = \alpha \\ B_{\theta n} = B_{\theta n}^e & \text{at } r = \beta \end{cases} \quad (11)$$

따라서, 경계면 d 와 e 에 대한 전자기 전달관계식은 식

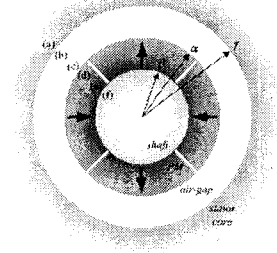
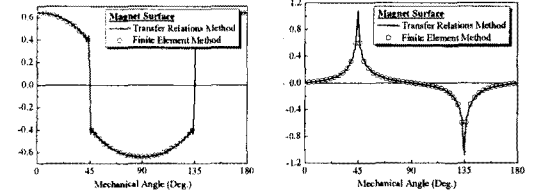


그림 5. 고정자와 회전자 축의 철심을 고려한 극좌표 모델



(a) 수직성분, B_{rn}^c (b) 수평성분, $B_{\theta n}^c$

그림 6. 고정자 및 회전자 축의 철심을 고려한 영구자석에 의한 자계 특성 해석결과(영구자석의 표면)

(12)로 도출된다.

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^d \\ B_{\theta n}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0(\beta, \alpha) & G_0(\alpha, \beta) \\ G_0(\beta, \alpha) & F_0(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^d \\ A_{zn}^e \end{bmatrix} - \frac{j\mu_0 np M_n}{(np)^2 - 1} \begin{bmatrix} \alpha F_0(\beta, \alpha) + \beta G_0(\alpha, \beta) + 1 \\ \alpha G_0(\beta, \alpha) + \beta F_0(\alpha, \beta) + 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서, $F_0(x, y)$ 와 $G_0(x, y)$ 는 각각 식 (13)에서 정의된다.

$$F_0(x, y) = \frac{np}{y} \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{np} + \left(\frac{y}{x}\right)^{np}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{np} - \left(\frac{y}{x}\right)^{np}}$$

$$G_0(x, y) = \frac{2np}{x} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^{np} - \left(\frac{y}{x}\right)^{np}}$$

식 (9)에서 도출된 식에 의한 자계해석결과를 그림 4에서 보여지는 바와 같이 FEA에 의한 해석결과와 일치함을 확인할 수 있다.

3. 고정자 및 축의 철심을 고려한 전달관계

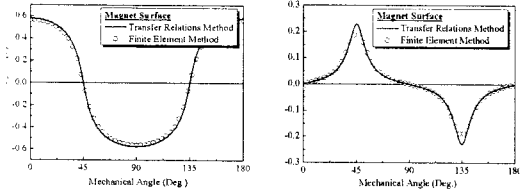
그림 5는 실제 전동기에 존재하는 고정자와 회전자 축의 철심을 고려한 해석모델이다. 공극에서 자기벡터자위의 전달관계는 식 (14)와 같다.

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^b \\ B_{\theta n}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0(\alpha, \gamma) & G_0(\gamma, \alpha) \\ G_0(\alpha, \gamma) & F_0(\gamma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^b \\ A_{zn}^c \end{bmatrix} \quad (14)$$

영구자석의 자화와, 철심에서의 투자율을 고려한 경계 b 와 경계 c 에서의 경계조건은 각각 식 (15)와 같다. 단, 철심의 투자율은 무한대로 가정한다.

$$\begin{cases} B_{\theta n}^c = \mu_0 M_{\theta n} \\ B_{\theta n}^b = 0 \end{cases} \quad (15)$$

따라서, $B_{\theta n}^c$ 는 식 (16)과 같다.



(a) 수직성분, B_{rn}^Y (b) 수평성분, $B_{\theta n}^Y$

그림 7. 고정자 및 회전자 축의 철심을 고려한 영구자석에 의한 자계 특성 해석결과(임의의 공극면)

$$B_{\theta n}^c = \left\{ -\frac{G_0(\alpha, \gamma)G_0(\gamma, \alpha)}{F_0(\alpha, \gamma)} + F_0(\gamma, \alpha) \right\} A_{zn}^c \quad (16)$$

$$A_{zn}^c = A_{zn}^d \quad (17)$$

$$B_{\theta n}^c = B_{\theta n}^d - \mu_0 M_{\theta n} \quad (18)$$

식 (17)과 식 (18)의 벡터자위의 연속조건과 영구자석면에서의 경계조건을 고려하면 A_{zn}^c 를 구할 수 있고 그로부터 식 (16)에 의해 $B_{\theta n}^c$ 를 구할 수 있다. 고정자 및 회전자 축의 철심을 고려한 영구자석에 의한 자계해석결과는 그림 6와 같다.

공극 임의의 경계면 Y 에서의 자계해석을 위해서 식 (19)와 같은 공극 영역의 전달 관계를 정의한다.

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^Y \\ B_{rn}^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0(\alpha, Y) & G_0(Y, \alpha) \\ G_0(\alpha, Y) & F_0(Y, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^Y \\ A_{rn}^Y \end{bmatrix} \quad (19)$$

경계면 c 에서의 자속밀도 B_{rn}^c 와 A_{zn}^c 를 알고 있으므로 A_{rn}^c 은 식 (20)과 같이 쓸 수 있다.

$$A_{rn}^c = \frac{B_{rn}^c - F_0(Y, \alpha)A_{zn}^c}{G_0(\alpha, Y)} \quad (20)$$

따라서 B_{rn}^Y 과 $B_{\theta n}^Y$ 은 각각 식 (21)로부터 구할 수 있다.

$$B_{rn}^Y = -\frac{jnp}{Y} A_{zn}^Y \quad (21)$$

$$B_{\theta n}^Y = -\frac{\partial}{\partial r} A_{zn}^Y$$

고정자 및 회전자 축의 철심을 고려한 영구자석에 의한 임의의 공극면에서의 일반화된 자계해석결과는 유한요소 해석 결과와 비교되어 그림 7에서 보여지는 바와 같이 두 해석결과가 일치함을 알 수 있다.

4. 전기자 코일에 의한 전달관계

전기자 코일에 의한 공극에서의 자계해석은 그림 8과 같이 코일에 의한 전류를 current sheet로 가정하여 공극과 고정자의 경계조건에 이 전류밀도를 고려하여 해석한다. 따라서 그림 8의 해석 모델의 공극에서는 식 (22)가 성립한다.

$$\nabla^2 A_n = 0 \quad (22)$$

식 (22)의 좌변의 편미분을 계산하여 A_n 을 구하면 식 (23)과 같다.

$$A_{zn} = \frac{\left(\frac{\gamma}{r}\right)^{np} - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^{np}}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{np} - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{np}} A_{zn}^e + \frac{\left(\frac{r}{\beta}\right)^{np} - \left(\frac{\beta}{r}\right)^{np}}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{np} - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{np}} A_{zn}^b \quad (23)$$

여기서, 경계면 b 와 e 에 대해 식 (24)를 정의한다.

$$\begin{cases} B_{\theta n} = B_{\theta n}^e & \text{at } r = \beta \\ B_{\theta n} = B_{\theta n}^b & \text{at } r = \gamma \end{cases} \quad (24)$$

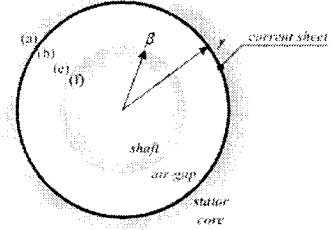
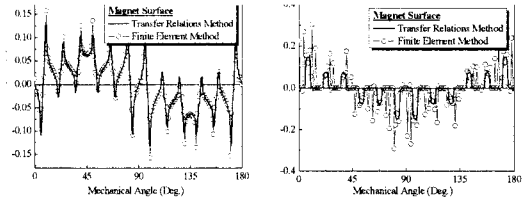


그림 8. 전기자 코일에 의한 극좌표 모델



(a) 수직성분, B_{rn}^b (b) 수평성분, $B_{\theta n}^b$

그림 9. 고정자 및 회전자 축의 철심을 고려한 전기자 코일에 의한 자계 특성 해석결과(고정자 표면)

따라서, 경계면 b 와 e 에 대한 전기자 전달 관계식은 식 (25)로 도출된다.

$$\begin{bmatrix} B_{\theta n}^e \\ B_{rn}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0(\gamma, \beta) & G_0(\beta, \gamma) \\ G_0(\gamma, \beta) & F_0(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{zn}^e \\ A_{rn}^e \end{bmatrix} \quad (25)$$

그리고 경계 b 와 e 에서의 경계조건은 식 (26)과 같다.

$$\begin{aligned} B_{\theta n}^e &= 0 \\ B_{\theta n}^b &= \mu_0 J \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25)와 식 (26)에 의해 구하고자하는 A_{zn}^b 는 식 (27)과 같다.

$$A_{zn}^b = \frac{\mu_0 J}{G_0(\gamma, \beta)} \left(\frac{F_0(\beta, \gamma)}{G_0(\gamma, \beta)} - \frac{G_0(\beta, \gamma)}{F_0(\gamma, \beta)} \right) \quad (27)$$

식 (8)의 자기벡터자위와 자속밀도의 관계식으로부터 B_{rn}^b 와 $B_{\theta n}^b$ 를 구할 수 있으며 그 해석 결과는 그림 9과 같이 유한요소해석법과 비교되어 잘 일치됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 영구자석형 동기전동기의 영구자석과 전기자 코일에 의한 자계 분포를 자기벡터자위의 전달관계를 이용하여 예측·해석 하였고 그 해석결과를 유한요소해석법을 이용한 해석결과와 비교하여 그 타당성 및 신뢰성을 입증하였다. 향후 본 논문에서 제시된 해석방법 및 결과를 이용하여 역기전력, 정토크, 쇄교자속 및 인덕턴스 등의 전자기 parameter를 예측하는데 적용할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] 이성호, 자기회로 구성조건에 따른 직선형 전기자 에너지 변환기의 정특성 해석, 충남대학교 박사학위논문, 2003
- [2] David L. Trumper, Won-Jong Kim, Mark E. Williams, "Design and analysis framework for linear permanent magnet machines," IEEE Trans. IAS., vol 32, no. 2, pp. 371-379, March/April 1996.