

움직임을 고려한 전기기기의 유한요소 기법에 관한 연구

배재남, 임승빈, 김기찬, 정대성, 이성구, 이주  
한양대학교 전기공학과 에너지변환연구실

A study on Moving Surface Method to consider a motion  
of electrical machine with Finite Element Method

Jaenam Bae, Seungbin Lim, Kichan Kim, Daesung Jung, Sunggu Lee, Ju lee  
Energy Conversion Lab., Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University.

**Abstract** - 유한요소법을 사용한 전기기기의 해석에서는 움직임을 고려한 해석이 필수적이다. 본 논문에서는 전기기기의 유한요소 해석시 움직임을 고려하기 위한 방안으로써 Moving Surface기법을 소개하고 이 기법의 적용방법 및 장단점에 관하여 논하였다. 또한 이 기법을 검증하기 위하여 Moving Surface기법을 적용한 유한요소해석 프로그램을 개발하고, 개발한 프로그램을 사용하여 실제 모델을 해석해 그 결과치를 실험치와 비교함으로써 타당성을 입증하였다.

1. 서 론

전기기기의 유한요소해석에 있어 움직임의 고려는 필수적이다. 변압기를 제외한 회전기 혹은 선형기는 고유의 동특성을 가지고 있으며, 동특성 해석을 하지 못한다면 전기기기의 특성을 제대로 파악하지 못한다. 이러한 이유로 유한요소법이 전기기기에 적용된 이래 움직임을 고려하기위한 여러 가지 방안이 제시되었으며 현재 가장 많이 쓰이고 있는 방법으로 Moving Band기법이 있다. Moving Band기법은 움직임에 의해 일그러짐이 발생하는 공극요소를 대상으로 과도한 일그러짐이 발생했을 경우 요소를 적절히 재구성 해주는 방법으로 요소 재분할 시간을 줄일 수 있다[1]. 하지만 Moving Band기법을 사용하게 되면 몇 요소분할을 할 때 몇 가지 제약이 생기게 되며 후처리 과정에서도 문제점이 발생할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 Moving Band기법이 가지는 단점을 해결하고 요소재분할이 필요치 않은 Moving Surface기법에 대해 서술하고자 한다.

2. Moving Surface 기법

2.1 Moving Surface기법이란

Moving Surface기법은 Moving Band기법과 같이 공극에서 요소의 재분할 혹은 재설정 과정이 필요하지 않으며, 공극요소기법[2]과 같이 복잡한 수학적 기법도 필요치 않은 아주 간단한 방법이며 적용하기도 용이하다.

그림 2는 Moving Surface기법을 이용했을 경우 요소의 형상을 보여주고 있다. 그림 2(a)은 초기요소형상으로써 고정자와 이동자 그리고 경계면으로 이루어져 있다. 여기서 경계면은 이동하는 영역과 그렇지 않은 영역을 분리하는 면으로써 이 경계면을 기준으로 해석영역을 둘로 나누게 된다. 즉, 경계면상에 있는 절점들은 초기요소 형상에서는 같은 좌표를 가지지만 고정자 측의 번호와 이동자 측의 번호를 따로 부여받게 된다. 그림 3.3에서는 절점번호에 프라임(')을 붙여 이동자 절점번호와 고정자 절점번호를 분리해 두었다.

이제 이동자가 이동을 하면 그림 2(b)처럼 변하게 되는데 이 경우 Moving Surface에 존재하는 이동자와 고정자의 절점들이 서로 일치하지 않게 되며 일반적인

유한요소 해석수준을 따라 어셈블리과정을 거치게 되면 고정자와 이동자의 해석 영역이 독립적으로 분리되어 각 영역을 따로 풀어주는 결과를 낳는다. 따라서 Moving Surface기법을 사용하기 위해서는 고정자 영역과 이동자 영역을 이어줄 방안이 필요한데 Moving Surface상에 존재하는 절점들의 포텐셜 관계를 이용하면 된다.

한 요소 내의 포텐셜 값은 1차 선형방정식으로 근사했기 때문에 요소를 이루는 절점  $i$ 에서의 포텐셜 값과 보간함수  $N_i$ 의 곱으로 나타난다. 따라서 Moving Surface상에 있는 절점 중 회전자 측에 해당하는 절점에서의 포텐셜 값은 Moving Surface상의 절점 중 고정자 측의 절점에서의 포텐셜 값들의 조합으로 나타낼 수 있다.

예를 들면, 그림 2의 절점 3'에서의 포텐셜 값을  $A_{3'}$ 이라 하면  $A_{3'}$ 은 다음과 같이 나타 낼 수 있다[3].

$$A_{3'} = N_1 A_2 + N_2 A_3 + N_3 A_9 \quad (1)$$

여기서  $N_1, N_2$  그리고  $N_3$ 는 각각 절점 2, 3, 9에서의 보간함수이다.

또한 보간함수  $N_i$ 는 절점  $i$ 에서만 1이고 나머지 점에서는 0이 되므로  $N_3$ 은 항상 0이 됨을 알 수 있고,  $N_1$ 과  $N_2$ 는 기준점 3'과 절점 2와 3의 거리의 비로 나타남을 알 수 있다.

2.2 Moving surface기법을 위한 시스템 방정식

이제 Moving Surface기법을 사용했을 경우 각 요소 방정식을 하나로 묶어주는 어셈블리(Assembly)과정을 거치면 통합된 시스템 행렬 방정식이 어떤 식으로 표현되는지 알아보겠다.

앞 절에서 언급한 바와 같이 Moving Surface기법을 사용하면 고정된 영역의 절점들과 이동하는 영역의 절점들이 완전히 분리되고 이 경우 요소방정식들을 연속성에 의거해 어셈블리하면 독립된 행렬 방정식 2개가 나오게 된다. 즉,

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $S_{ij}$ 와  $R_{ij}$ 는 각각 고정된 영역과 이동하는 영역에 대한 시스템 행렬 방정식의 계수이며 첨자 2와 3은 각각 고정된 영역의 Moving Surface상의 절점과 움직이는 영역의 Moving Surface상의 절점을 의미하고 공극에서는 구동 소스가 없으므로  $F_2 = F_3 = 0$ 이 된다. 또한 포텐셜  $A_2$ 와  $A_3$ 는 Moving Surface상의 절점이라도 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$A_3 = bA_2 \quad (4)$$

여기서  $b$ 는 사각행렬로써  $A_3$  벡터 크기를  $n$ ,  $A_2$  벡터 크기를  $m$ 이라고 했을 때,  $n \times m$ 의 크기를 갖는 계수행렬이다.

식(3)에 식(4)을 대입하고 식(2)과 식(3)을 풀어주게 되면,

$$S_{11}A_1 + S_{12}A_2 = F_1 \quad (5)$$

$$S_{21}A_1 + S_{22}A_2 = 0 \quad (6)$$

$$R_{11}bA_2 + R_{12}A_4 = 0 \quad (7)$$

$$R_{21}bA_2 + R_{22}A_4 = F_4 \quad (8)$$

식(6)과 (7)을 더해 하나의 식으로 표현하고 이를 행렬식으로 나타내면,

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} + R_{11}b & R_{12} \\ 0 & R_{21}b & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

어셈블리 결과식인 식(9)을 보면 어셈블리 과정이 Moving Surface기법을 쓰지 않았을 때 보다 더 복잡하다는 사실을 알 수 있으며, 계수행렬의 경우 대칭성을 상실하는 것을 알 수 있다. 일반적으로 비대칭 행렬 방정식을 푸는 알고리즘은 대칭행렬 방정식을 푸는 알고리즘보다 복잡하며 더 많은 시간을 요구한다. 따라서 대칭성의 상실은 Moving Surface기법의 단점으로 볼 수 있다.

### 3. 결과비교

본 논문에서는 제시한 기법의 타당성을 입증하기 위해 4극 BLDC의 실험치와 해석치를 비교하였다. 모터의 기본사양과 재질은 각각 표 1과 표 2에 나타내었으며

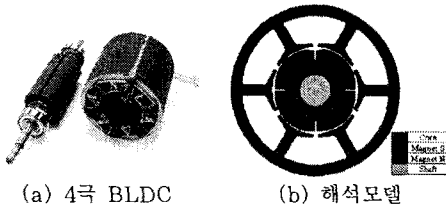


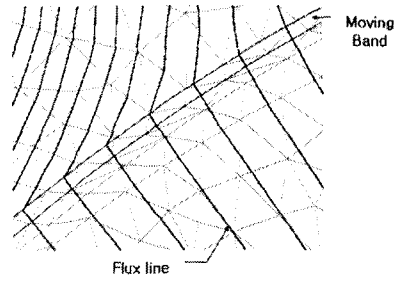
그림 3. 실험모델

표 1. 모터 기본 스펙

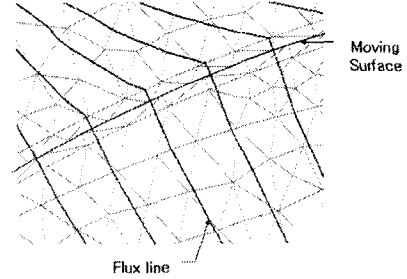
고정자외경 [mm]	80
고정자 내경 [mm]	41
회전자 외경 [mm]	40.5
축방향 길이 [mm]	70
극수	4
슬롯수	6

표 2. 재질

영구자석	잔류자속밀도 [T]	0.4
	보자력 [A-turn]	303152
	비투자율	1.05
	자화방향	parallel
코어		S23



(a) Moving Band주위의 플럭스도



(b) Moving Surface주위의 플럭스도

그림 4. 공극에서의 매쉬와 플럭스도

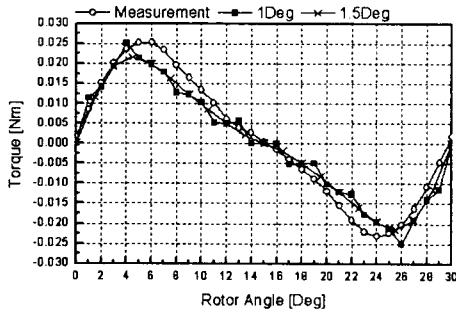
그림 3에 실제 전동기와 해석모델을 나타내었다.

그림 4는 공극 주변의 요소형상과 공극을 지나는 플럭스 라인을 보여주고 있다. 그림 4(a)는 Moving Band 기법을 썼을 경우 공극에서의 요소 형상인데, Band 아래의 요소들이 약간 일그러져 있음을 알 수 있다. 또한 그림 4(b)에서와 같이 Moving Surface기법을 쓰게 되면 Surface를 기준으로 요소가 분리됨을 알 수 있으며 요소가 분리되더라도 플럭스 라인의 굵기는 없다.

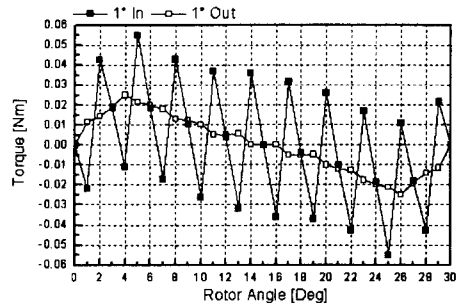
그림 5는 Moving Band기법을 사용했을 경우와 Moving Surface기법을 사용했을 경우 스텝각이 Moving Line상의 절점간격과 같을 때와 다를 때 코깅토크의 결과를 실험치와 비교한 그래프이다. 두 경우 모두 Moving Line상의 절점 간격은 1.5°로 일정하다. 여기서 코깅토크는 Maxwell Stress Tenser법을 이용해 구하였으며 [4] 이때 적분경로는 Moving Surface에 인접해 있는 요소 중 정지한 영역에 포함된 요소들을 대상으로 하여 요소의 중앙을 가로지르는 원으로 하였다. Maxwell Stress Tenser법을 이용해 토크를 구할 경우에는 적분경로상의 요소들의 형상이 일정하게 유지되어야 오차가 발생하지 않는데 Moving Surface기법을 사용했을 경우 위치에 따른 요소형상변화는 일어나지 않으므로 Maxwell Stress Tenser법을 사용하는데 큰 무리가 없다. 하지만 Moving Band기법을 사용할 경우 스텝각이 Moving Line상의 절점간격과 일치하지 않으면 요소가 일그러지므로 결과의 외곡이 발생할 수 있다.

코깅토크의 주기는 극수와 슬롯수의 최소공배수로 정해지는데 BLDC의 경우 슬롯이 6, 극수가 4이므로 코깅토크의 주기는 기계각 30°가 되며 두 경우 모두 코깅토크의 주파수가 정확히 30°인 것을 알 수 있다. 그림 5(a)는 Moving Band기법을 사용해 코깅토크를 구한 것인데 스텝각이 Moving Line상의 절점 간격과 일치하지 않았을 경우의 토크 파형은 일치할 경우와 비교해 고조파 성분이 눈에 띄게 증가함을 알 수 있다. 하지만 그림 5(b)의 Moving Surface기법을 사용했을 경우는 스텝각이 Moving Line상의 절점 간격과 일치하지 않아도 큰 외곡은 보이지 않음을 알 수 있다.

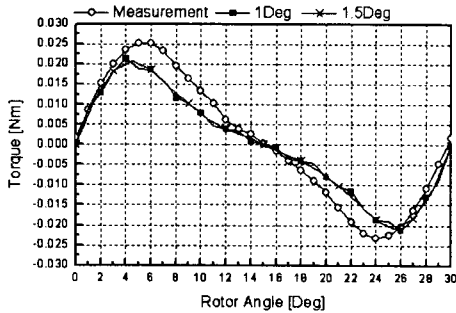
그림 6은 동일한 해석모델과 해석 조건하에 Maxwell Stress Tenser법의 적분경로를 달리하여 토크를 구해본 것인데 In은 Moving Surface 혹은 Moving Line



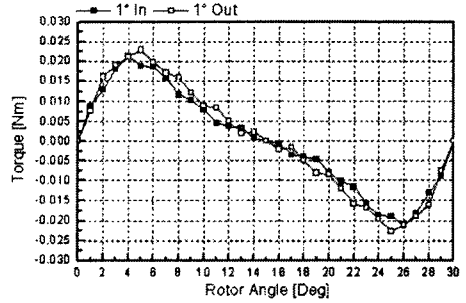
(a) Moving Band기법을 사용한 토크계산



(a) Moving Band기법을 사용한 토크계산



(b) Moving Surface기법을 사용한 토크계산  
그림 5. 스텝각에 따른 토크비교



(b) Moving Surface기법을 사용한 토크계산  
그림 6. 적분경로에 따른 토크 비교

에 접해 있는 요소들 중 Moving Line 안에 접한 요소들의 중앙을 지나는 원을 적분경로로 택한 경우이고, Out은 Moving Line 밖에 접한 요소들의 중앙을 지나서 원을 적분경로로 택한 경우이다. Moving Band기법으로 해석한 결과는 적분경로를 어떻게 잡느냐에 따라 그 결과가 완전히 달라지는데 변형이 일어나는 요소들을 통과하는 적분경로 즉, In의 경우는 토크계산을 위한 적분경로로 사용할 수 없을 정도로 결과 외곡이 심하다. 반면 Moving Surface기법을 사용했을 경우는 요소의 변형이 일어나지 않기 때문에 결과가 적분경로의 영향을 크게 받지 않음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

Moving Surface기법은 이론적으로 아주 간단해 이해하기 쉬우며 아주 명쾌한 방법이라는 것에는 의심의 여지가 없다. 하지만 실제 구현 시에는 전처리 과정이 Moving Band기법과 같이 요소관계를 재설정해 주는 방법에 비해 약간 복잡해 질 수 있다. 우선 Moving Surface기법을 사용하려면 이동영역이 요소와 그렇지 않은 영역의 요소를 분리해 독립적으로 관리해야 하며 Moving Surface상의 절점들의 관계를 부가적으로 저장하고 있어야 한다. 또한 어셈블리 과정에서는 Moving Surface상의 절점들에 대한 관계식을 찾고 이를 연결해 주는 부가적인 작업이 필요하게 된다. 또한 결과 식으로 나온 시스템 행렬 방정식의 계수행렬이 일반적으로 비대칭으로 나오기 때문에 계산속도면에서 불리한 면이 있다. 그럼에도 불구하고 Moving Surface기법은 큰 장점을 가질 수 있는데, 해석 영역을 분리해 두었기 때문에 상대 영역의 요소 정보가 바뀌어도 해당 영역의 요소정보는 바뀔 필요가 없어 Maxwell Stress Tensor법의 적용이 용이하고 Adaptive요소를 사용한 과도상태의 해석에 적용할 수 있을 것으로 기대된다.

#### 감사의 글

이 논문은 에너지관리공단에서 시행한 프리미엄급 단상 고효율 유도전동기 설계 해석 위탁과제로 수행된 논문입니다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] 정인성, "개선된 수치해석 기법을 이용한 영구자석형 선형기의 특성해석", 한양대학교 박사학위논문, 1999
- [2] Ki-sik Kim, "Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electric machines", 1991
- [3] 임달호, "電氣系의 有限要素法", 1986
- [4] Sheppard J.Salon, "Finite element analysis of electrical machines", 1995