

비정렬 격자를 이용한 LES 기법 개발

이 경 세¹, 백 제 현²

DEVELOPMENT OF A LARGE EDDY SIMULATION METHOD ON UNSTRUCTURED MESHES

K.S. Lee¹ and J.H. Baek²

A large eddy simulation with explicit filters on unstructured mesh is presented. Two explicit filters are adopted for reducing the aliasing error of the nonlinear convective term and measuring the level of subgrid scale velocity fluctuation, respectively. The developed subgrid scale model is basically eddy viscosity model which depends on the explicitly filtered fields and needs no additional ad hoc wall treatment such as van Driest damping function. As a validation problem, the flows around a sphere at several Reynolds numbers, including laminar and turbulent regimes, are calculated and compared to experimental data and numerical results in the literature.

Key Words: 큰에디모사기법(Large Eddy Simulation), 비정렬격자(Unstructured mesh), 외재적 필터링(Explicit Filtering), 구 주위 유동(Flow around a Sphere)

1. 서 론

난류유동은 레이놀즈수가 증가하면서 큰 구조와 작은 구조의 크기 차이가 현격하게 벌어지기 때문에, Navier-Stokes 방정식이 유체 운동을 완전히 모사할 수 있다고 하더라도 난류 유동에 대한 정확한 수치해를 얻는 것은 전산자원의 한계로 인해 그 응용성에 제한을 받게 된다. 이런 문제점을 해결하기 위해 상대적으로 경계조건에 영향을 많이 받아 일반적인 모델링이 어려운 큰 구조와 등방적 성질을 가져 단순한 모델링으로도 쉽게 근사할 수 있는 작은 구조로 유동장을 분리하여 큰 구조는 효율적인 수치기법으로 정확하게 계산하는 반면, 작은 구조는 모델링을 사용하여 그 영향만을 고려하는 큰에디모사기법(large eddy simulation, LES)이 기존의 RANS 난류 모델의 대안으로 본격적으로 연구되고 있다.

그러나 비교적 최근까지도 단순한 형상(채널유동, 실린더 주위 유동)에서의 난류 유동장에 대한 연구가 주로 연구되었으며 점차 실질적인 공학적인 응용을 위해 복잡한 형상에서의 LES 기법에 대한 연구가 늘고 있는 추세이다.

본 연구에서는 복잡한 형상에서의 난류유동해석을 위해 비정렬격자를 사용한 새로운 LES 기법을 제안하고 구 주위의 비압축성 층류 및 난류 유동장에 적용하여 그 타당성을 검증한다.

2. 수치해석 기법

2.1 시공간 차분

본 연구에서는 공간차분을 위해 셀중심 유한차분법을 사용하였으며 셀의 벡터에서 주위 셀 값들의 선형보간을 통해 변수를 재구성하고 이를 기반으로 완전한 이차 정확도를 보장하는 기법을 개발하여 공간차분에 사용하였다. 보다 상세한 설명은 참고문헌[1]를 참조한다.

유동장의 시간전진을 위해서는 fractional step 방법을 사용하였다. 공간차분과 같은 2차 시간 전진을 위해 점성항은 Crank-Nicolson 방법으로 차분하고 비선형 항은 Adams-Bashforth 방법을 사용한 준내재적 기법을 사용하였다

2.2 LES 기법

2.2.1 LES 방정식

LES를 위한 방정식은 일반적으로 Navier-Stokes 방정식에 적절한 필터링을 가하여 스케일을 분리 후 얻게 되며 제거되

1 학생회원, 포스텍 기계공학과 대학원

2 정회원, 포스텍 기계공학과

* Corresponding author E-mail: jhbaek@postech.ac.kr

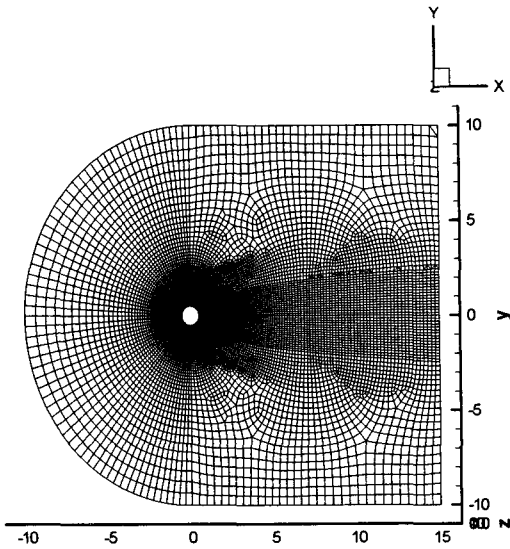


Fig. 1 Unstructured mesh used in the simulations

는 작은 사이즈의 유동 스케일은 흔히 국소적인 격자크기 정도로 설정된다. 무차원화된 Navier-Stokes 방정식에 grid filter (2Δ cutoff)를 적용했을 때 필터링과 미분연산자 사이에 교환이 본 연구에서와 같이 이차 정확도 내에서의 오차를 가지면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

비선형항을 4Δ cutoff 필터로 스케일 분리한 유동성분으로 표현하면 다음과 같이 4Δ 성분간의 상호작용과 4Δ 성분과 그 이하 크기의 상호작용, 그리고 4Δ 이하 성분들 간의 세 부류의 항으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} + \overline{\hat{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \hat{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

4Δ 성분간의 상호작용의 결과는 격자 상에서 표현될 수 있는 2Δ 성분 이상의 크기이므로 grid filter에 의해 제거되지 않으므로 필터효과를 무시할 수 있다. 즉

$\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} \approx \hat{u}_i \hat{u}_j$ ($\hat{u}_i, \hat{u}_j \sim 4\Delta$) 라고 볼 수 있다. 이와 함께 큰 크기와 작은 크기의 상호작용은 작은 크기의 유동성분의 랜덤 워크에 의한 빠른 혼합으로 인한 큰 유동 성분의 구배완화 효과를 표현하기 위해 잘 알려진 혼합길이 모형 가정을 써서 난류점성으로 모델링하고 작은 스케일간의 상호작용은 혼합길이 모형에서의 속도스케일을 격자 크기에 비례하다고 가정하여 작은 스케일 간의 난류점성이 격자크기에만 의존하도록 모델링하였다. 따라서 전자는 유동장과 격자의 국소적 특성에 의존하고 후자는 단순히 국소적 격자 특성에만 의존하게 된다. 비선형항 및 각 스케일간의 상호작용에 대한 모델링을 가하여 최종 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \left[\frac{1}{\text{Re}} + \nu_i^{gs} + \nu_i^{ss} \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

여기에서 각 난류 점성항은

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\hat{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \hat{u}_j}) &\approx \nu_i^{gs} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \nu_i^{gs} &= C_1 \alpha |u'|_{gs} \end{aligned} \quad (4)$$

과

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) &\approx \nu_i^{ss} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \nu_i^{ss} &= C_1 \left(\frac{1}{2} \alpha \right) |u'|_{ss} = C_2 \alpha^2 \end{aligned} \quad (5)$$

로 모델링하였으며 여기에서 각 항의 계수는 본 연구에서 C_1 은 1, C_2 는 0.52를 사용하였다. 작은 스케일간의 상호작용 효과는 국소적 격자크기에 의존하는 이차 수치점성을 삽입하는 효과를 지니며 본 연구에서 단순히 2차 중심차분을 사용하고 후류 및 구에서 근거리 영역을 제외한 지역에서 비물리적인 해의 진동을 억제하고 안정된 해석을 할 수 있게 한다.

2.2.1 필터

본 연구에서는 비물리적인 운동에너지 증대를 완화하기 위하여 매 시간간격 마다 외재적으로 필터링된 속도장을 사용하여 대류항을 계산하며(식(3)) 이 때 필터링은 다음과 같이

미분형 필터인 diffusion type의 필터를 사용한다.

$$\bar{\phi} = \phi + \alpha^2 \nabla^2 \phi \tag{6}$$

여기에서 α 는 필터 크기를 결정하는 상수로서 길이 dimension이며 필터링 형태가 갖는 온도장의 외재적 시간전진 기법과의 유사성에서 유추 가능하듯이 안정적인 필터링을 위한 한계값을 갖는다. 본 연구에서 사용한 α 는 ∇^2 의 이산화 과정에서 도출되는 계수들의 절대값의 총합을 체적으로 스케일링한 값의 제곱근으로 정해지며 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha^2 = \frac{V_{cell}}{\sum |c_i|} \tag{7}$$

이와 같이 정의되면 일차원상에서는 2Δ 의 작은 스케일을 완전히 제거할 수 있는 필터 사이즈가 되나 삼차원상에서는 대략 일차원상에 비해 반 정도의 필터링 효과를 가져 큰 구조에 과도한 영향을 주지 않는다. 또한 필터링이 선형적인 유동장을 보존하기 때문에 commutation 에러 및 필터링을 가져야 생기는 에러가 이산화 에러인 이차를 유지한다.

$|u_i|$ 는 대류항에 적용한 필터를 사용하면 격자크기에 비해 과소한 필터링 효과를 가지므로 벡터스에 재구성된 유동장을 셀 중심에서 최소자승법으로 선형 재구성하여 이를 본래의 유동장과의 차이로부터 구한다. 이 필터는 이전에 설명한 diffusion 필터와 같이 필터링으로부터 야기 되는 에러가 이차로 유지된다. 그러나 상대적으로 필터 크기가 크고 격자의 스트레칭에 따라서 비등방적인 필터링이 될 수 있기 때문에 두 종류의 필터를 각기 다른 용도로 사용한다.

3. 구 주위 유동장 해석

3.1 해석 대상 및 계산 조건

개발된 LES 기법을 검증하기 위해 형태가 비교적 단순하나 유동 구조가 복잡하고 기존의 정렬격자 방식으로 해석이 어려운 구 주위에 대한 유동해석에 적용하였다. 격자는 약 57만개의 육면체 셀로만 이루어져 있다.

계산 조건은 충분한 해상도를 유지하는 DNS에서의 모델

Table 1 Comparison of mean drags at various Re

	100	300	1000	10000
present	1.09	0.657	0.472	0.405
computations	1.09 ^[3]	0.655 ^[2]	0.47 ^[4]	0.393 ^[2]
experiments	1.087	0.63 ^[5]	N/A	0.4 ^[5]

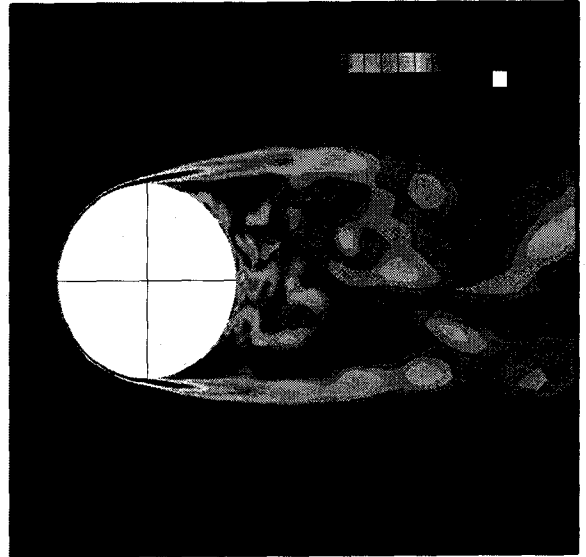


Fig. 2 Instantaneous vorticity magnitude plot at Re=10000

성능에 대한 평가를 위해 작은 스케일이 격자크기보다 충분히 큰 층류해석을 포함하여 약한 난류 유동에 속하는 레이놀즈수 1000, 후류가 난류로 완전히 발달되었다고 볼 수 있는 레이놀즈수 10000에 대한 해석을 하였다. 모든 계산은 공히 같은 격자와 같은 무차원 시간간격 0.005를 사용하였으며 최대 CFL수는 0.5를 넘지 않았다. 난류유동해석의 경우 평균유동량 및 RMS값을 얻기 위해 무차원시간 100-200 정도의 초기 발달 구간을 버리고 무차원 시간 400 정도 동안의 해석을 평균하였다.

3.2 계산결과

Table 1에 층류 및 난류 영역의 레이놀즈수들에 대한 계산들의 항력 결과들을 문헌과 비교 정리하였으며 Table 2에는 Re 10000에서의 유동 특성치들을 참고문헌 [2]와 비교하였다. 고해상도 층류 유동의 경우는 LES 모델의 점근적인 특성을 의미한다고 볼 수 있는데 매우 정확한 정도로 실험 및 여타 계산 결과에 잘 일치하고 있어 격자가 충분히 확보되면 LES 해석결과가 DNS 결과에 접근하게 될 것으로 예측할 수

Table 2 Comparison of characteristic quantities at Re=10000

	present	LES ^[2]	DES ^[2]
separation length	1.90	1.98	2.05
max $u'_{x,rms}$	0.27	0.25	0.24
recirculation center	1.23/0.42	1.22/0.41	1.21/0.39
max negative u_x	-0.38	-0.4	-0.35

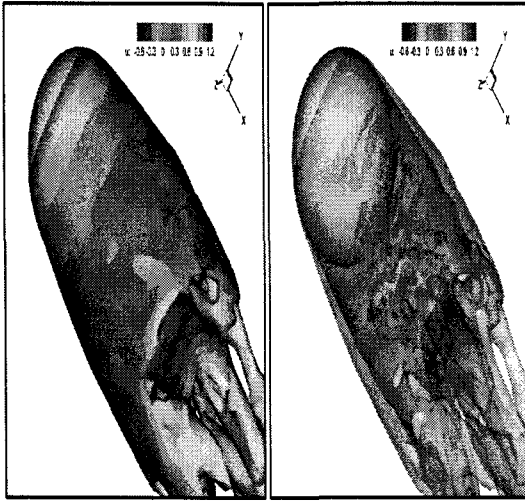


Fig. 3 Visualization of the near wake region. Colored by streamwise velocity

있다. $Re=10000$ 일 때의 난류해석의 결과는 특수한 정렬격자를 사용하여 dynamic 모델을 사용한 참고문헌 [2]의 결과와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 단 후류 영역의 난류 강도를 일관되게 더 크게 예측하고 있는 점은 Fig. 2, 3에서 볼 수 있는 것처럼 작은 스케일을 잘 포착하는 데서 오는 것인지에 관하여는 추가적인 난류 구조 분석 등의 연구가 필요할 것으로 보인다.

4. 결 론

비정렬 격자를 이용한 새로운 형태의 LES 기법을 제안하였다. 비정렬 격자에서의 이차 정확도를 유지하는 공간차분법을 개발하여 유동장 해석에 적용하였으며 운동에너지의 비물리적인 발산을 억제하기 위한 필터링 기법 및 외재적 필터링에 기반한 난류점성 모델을 개발하였다. 제안된 LES 기법을 구주위의 층류 및 난류 유동장 해석에 적용하여 그 타당성을 검증하였다. 제안된 기법은 층류 및 난류 유동장에서 SGS 모델을 활성화시킨 후 모델계수 및 모델의 형태, 벽조건 등에 대한 수정없이 적용되어도 기존 결과와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 향후 보다 상세한 검토 및 다양한 유동 문제에서의 검증과정 및 모델 수정에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 이경세, 2004, "2차 정확도를 가지는 비정상 비압축성 유동장 해석을 위한 비정렬 유한 체적법의 개발," 한국전산

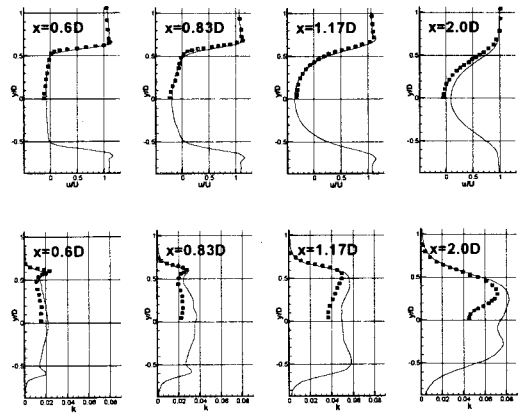


Fig. 4 Comparison of mean streamwise velocity and turbulent kinetic energy profiles at $Re=10000$. Symbols from ref. [2](LES results with a dynamic model on a dedicated special structured grid)

유체공학회 춘계 학술대회 논문집, p. 71-76

[2] Constantinescu, G. and Squires, K., 2003, "LES and DES Investigation of Turbulent Flow over a Sphere at $Re=10000$," *Flow, Turbulence and Combustion*, 70, p. 267-298

[3] Mittal, R., 1999, "A Fourier-Chebyshev Spectral Collocation Method for Simulating Flow Past Spheres and Spheroids," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30, p. 921-937

[4] Mittal, R., Wilson, J. and Najjar, F., 2001, "Symmetry Properties of the Transitional Sphere Wake," *AIAA Journal*, vol. 40, p. 579

[5] Schlichting, H., 1979, *Boundary Layer Theory*, 7th edition, McGraw-Hill, New York