

# 비정렬 격자계에서 격자점 중심과 격자 중심 유한체적법의 수치적인 거동에 관한 비교 연구

김 주 성<sup>1</sup>, 이 희 동<sup>2</sup>, 권 오 준<sup>\*3</sup>

## NUMERICAL BEHAVIOR OF VERTEX-CENTERED AND CELL-CENTERED FINITE-VOLUME METHODS ON UNSTRUCTURED MESHES

J.S. Kim<sup>1</sup>, H.D. Lee<sup>2</sup>, and O.J. Kwon<sup>\*3</sup>

*This paper presents an assessment of vertex-centered and cell-centered finite-volume methods on unstructured meshes. The results indicate that the vertex-centered method is more reliable than the cell-centered method.*

**Key words:** 격자점 중심 기법(vertex-centered method), 격자 중심 기법(cell-centered method), 정확도(order of accuracy), 수렴성(convergence), 안정성(stability)

### 1. 서 론

최근 비정렬 격자를 사용하는 유동 해석 기법은 Euler 방정식 및 Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) 방정식 뿐만 아니라, Large-Eddy Simulation (LES) 분야에도 폭넓게 적용되고 있다. 비정렬 격자를 사용하는 유동 해석 기법을 개발하는 과정에서 가장 처음 고려되어야 할 사항은 미지수를 저장하는 위치를 결정하는 것이며, 일반적으로 격자점에 저장시키는 격자점 중심 기법(vertex-centered method)과 격자의 중심에 저장시키는 격자 중심 기법(cell-centered method)이 대부분 사용되고 있다. 이러한 두 기법은 사각형이나 육면체가 사용되는 정렬 격자에 적용될 때는 거의 차이가 없다. 하지만 삼각형이나 사면체가 사용되는 비정렬 격자에 적용되면, 격자점과 격자수의 많은 차이에 의해서 두 기법은 심각하게 다른 수치적인 거동을 보일 수 있다. 현재까지 비정렬 격자계에 대해서 이러한 두 기법의 세부적인 수치적인 거동 비교는 거의 이루어지지 않았다. 이 논문에서는 이차원의 비정렬 격자를 사용하는 유한체적법에서 격자점 중심 기법과 격자 중심 기법의

정확성, 안정성, 수렴성을 비교 연구하였다.

### 2. 유한 체적법

지배방정식으로 이상 기체 가정이 포함된 이차원 압축성 Reynolds-averaged Navier-Stokes 방정식이 사용되었으며, 이 방정식은 제어체적  $\Omega$ 에 대해서 적분형태로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dA + \oint_{\partial\Omega} f(Q) d\Omega - \oint_{\partial\Omega} g(Q) d\Omega = 0 \quad (1)$$

여기서  $\partial\Omega$ 는 제어체적 경계면을 표현한다.  $Q$ 는 보존변수이며,  $f$ 와  $g$ 는 비점성 플럭스와 점성 플럭스를 각각 나타낸다. 시간에 대해 내재적 방법이 적용되었으며, 선형 방정식은 point Gauss-Seidel 방법으로 계산되었다.

격자 중심 기법에서는 변수가 격자의 도심에 저장되며, 격자면 자체가 제어체적 경계면으로 인식된다. 반면에 격자점 중심 기법에서의 변수는 격자점에 저장되며, 제어체적은 해당 격자점을 둘러싸는 방법으로 구성된다. 격자점 중심 기법에서는 다양한 제어체적 구성 방법이 존재하며, centroidal-dual, median-dual, containment-dual 등이 대표적인 방법이다. 이 연구에서는 가장 널리 사용되는 median-dual 방법으로 구성된

1 학생회원, 한국과학기술원 기계기술연구소

2 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원

3 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 교수

\* Corresponding author E-mail: ojkwon@kaist.ac.kr

Table. 1 Order of accuracy for quadrilateral grids

	Vertex-centered		Cell-centered		
	1st	LS	1st	Frink	LS
L1	0.9316	2.2049	0.9498	2.2260	2.3783
L2	0.9189	2.1529	0.9248	2.2596	2.3357

제어체적만을 고찰하였다.

이차원의 이상적인 삼각형 격자에 대해서 격자의 수는 격자점의 수의 약 두 배이므로, 같은 격자에 대해서 격자 중심 기법이 더 작은 제어체적을 가지며 약 두 배 더 많은 해상점을 (resolution point) 가진다 [1]. 동시에 각각의 격자점에 연결된 주변 격자점은 여섯 개인 반면에 각각의 격자에 연결된 격자의 수는 세 개이므로, 격자점 중심 기법이 식 (1)의 제어체적 경계면에서의 선적분 과정에서 두 배 더 많은 적분점을 가진다. 여기서 격자점 중심 기법은 edge-data 구조, 격자 중심 기법은 face-data 구조로 계산되며, 이차원에서는 edge와 face가 동일해지므로, 같은 격자에 대해서 두 기법의 계산량은 거의 같음을 예측할 수 있다.

공간에 대한 일차정확도는 제어체적 경계면 양옆의 값을 해당 격자점의 값(격자점 중심 기법) 또는 해당 격자의 값(격자 중심 기법)으로 놓을 때 구현된다. 고차 정확도는 테일러 시리즈를 사용하여 제어체적 내에서 제어체적 경계면으로 내삽하여 얻을 수 있다. 테일러 시리즈에 사용되는 해의 구배의 계산을 위해 Green-Gauss 정리, least-square 방법 등이 사용될 수 있으며, 구배의 계산을 위해 사용되는 근접 격자점들의 정의에 따라 다양한 방법이 존재한다. 이 연구에서는 공력 계산에서 널리 사용되는 이차정확도 까지만 고려하였으며, 자료 구조의 간결성을 위해 첫 번째 근접 격자점만을 사용하였다. 또한 구배의 계산을 위해 least-square 방법을 고려하였다. Frink는 격자 중심 기법에서 격자와 격자점의 값을 동시에 사용하여 고차정확도를 구현하는 방법을 제안하였다. 여기서 격자점의 값은 pseudo-Laplacian 방법으로 구해진다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 Supersonic vortex flow

두 기법의 정확도의 정량적인 검증을 위해 해석해가 존재하는 supersonic vortex 유동이 계산되었다. 이 유동은 속도가 반경에 반비례하는 등엔트로피 유동이며, 밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$\rho = \rho_i \left[ 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \Lambda_i^2 \left( 1 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2)$$

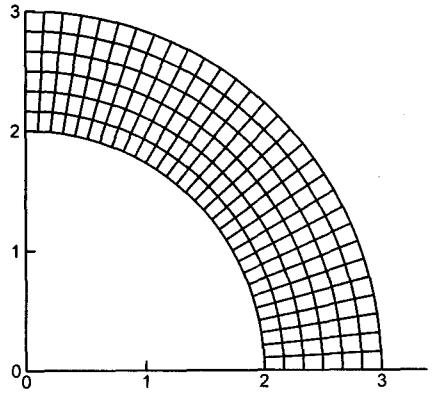


Fig. 1 Coarse quadrilateral grid

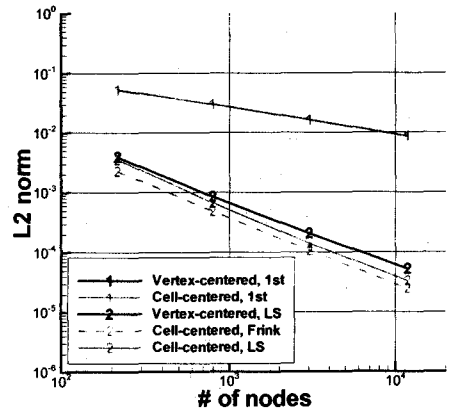
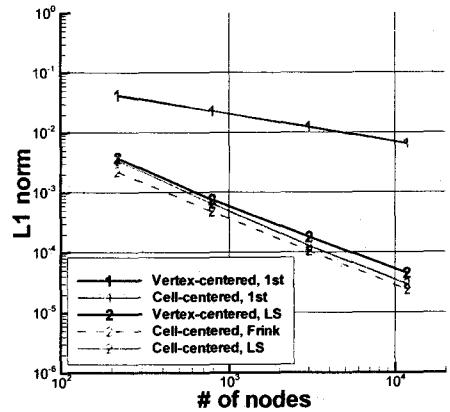


Fig. 2 L1 and L2 norms for quadrilateral grids

Table. 2 Order of accuracy for triangular grids

	Vertex-centered		Cell-centered		
	1st	LS	1st	Frink	LS
L1	0.7300	2.2223	0.8730	2.1367	2.0419
L2	0.7105	2.0320	0.8676	2.1220	2.0616

여기서 하첨자  $i$ 는 가장 안쪽 반경에서의 값을 표현한다. 이 연구에서는  $r_i = 2, M_i = 2$ 가 사용되었으며, 최대 반경은 3이 사용되었다.

두 기법이 사각형 격자에 적용되면, 경계면 처리 부분을 제외하고 거의 일치하는 수치적인 거동을 보인다. 해석 기법의 검증에 위해 사각형 격자에 대해서 두 기법의 정확도를 먼저 조사하였다. 그림 1은 계산에 사용된 가장 성긴 격자를 보이고 있으며, 성긴 격자를 기본으로 하여 조밀한 격자가 생성되었다. 격자의 차원은  $31 \times 7, 61 \times 13, 121 \times 25, 249 \times 49$ 이다. 일차 정확도에 대해서는 격자점 중심 기법과 격자 중심 기법의 L1과 L2 오차가 모든 격자에 대해서 거의 완전히 같은 것을 그림 2에서 볼 수 있다. 이차 정확도에 대해서도 Frink 방법이 적용된 격자 중심기법이 조금 낮은 오차를 보이지만, 차이는 매우 적은 것을 볼 수 있다. 표 1은 각 기법의 order of accuracy를 보이고 있으며, 격자점 중심 기법과 격자 중심 기법은 사각형 격자에 대해서 매우 비슷한 정확도를 가짐을 확인할 수 있다.

같은 방법으로 삼각형 격자에 대한 정확도 검증이 수행되었다. 그림 3은 가장 성긴 삼각형 격자를 보이고 있으며, 격자점의 수는 139, 505, 1909, 7425 이다. 일차정확도에 대해서는 분명하게 격자 중심 기법이 더 낮은 오차를 보이고 있다. 하지만 이차정확도에 대해서는 두 기법의 오차의 차이는 매우 미미한 것을 볼 수 있으며, 이는 같은 격자에 대해서 격자점 중심 기법과 격자 중심 기법의 정확도가 거의 같음을 의미한다. 표 2에서 볼 수 있듯이 이차정확도에 대한 두 기법의 order of accuracy는 비슷하므로, 격자의 밀집도에 상관없이 이러한 경향을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그림 5는 격자의 질의 저하에 따른 각 기법의 거동을 보이고 있다. 초기의 등방성 격자에 대해서 임의적인 격자점의 교란을 통해서 질이 저하된 격자를 얻을 수 있었으며, 이러한 교란을 반복적으로 적용하여 더욱 심하게 질이 저하된 격자를 얻을 수 있었다. Least-square 방법이 적용된 격자 중심 기법은 어느 정도 질이 저하되면 정확도가 급격히 저하되는 것을 볼 수 있다. 반면에 격자점 중심 방법과 Frink 방법이 적용된 격자 중심 방법은 격자질의 저하에 강건하게 반응하는 것을 볼 수 있다. 하지만 지속적으로 격자점 중심 방법이 낮은 질의 격자에 대해서 낮은 오차를 보이고 있는 것을 확인할 수 있다.

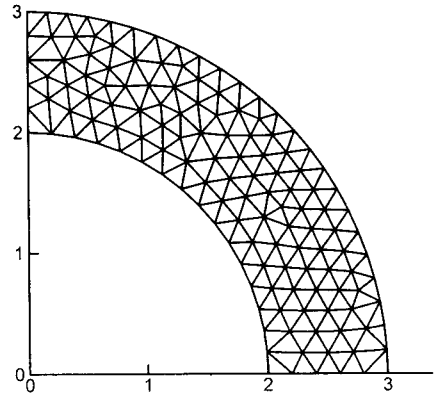


Fig. 3 Coarse triangular grid

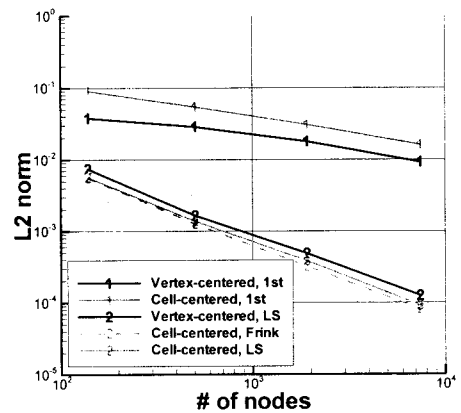
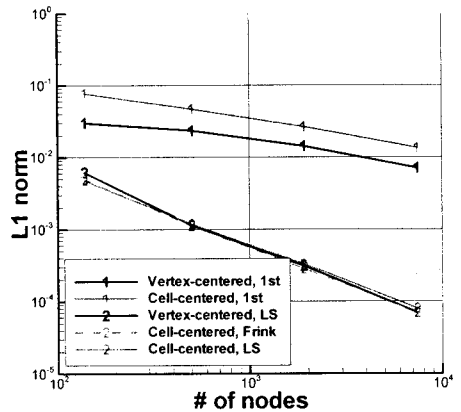


Fig. 4 L1 and L2 norms for triangular grids

Table. 3 Stability and convergence characteristics for subsonic bump flow (second order accuracy)

		Vertex-centered		Cell-centered	
		LS	Frink	LS	
154 nodes	max CFL	$10^4$	$10^2$	$5 \times 10^1$	
	iterations	170	253	295	
942 nodes	max CFL	$10^4$	$5 \times 10^1$	$5 \times 10^1$	
	iterations	312	698	761	
1922 nodes	max CFL	$10^4$	$10^1$	$10^1$	
	iterations	420	5,839	5,787	
7340 nodes	max CFL	$10^4$	*	*	
	iterations	720	DNC	DNC	

### 3.2 Subsonic bump flow

두 번째 검증 경우로 입구 마하수 0.5이며, 10% 두께를 가지는 원형 범프 유동에 대한 계산을 수행하였다. 범프 표면에서의 마하수 및 압력 분포의 비교 결과, 일차 정확도에 대해서는 격자 중심 기법이 높은 정확도를 보였다. 하지만 이차 정확도에 대해서는 해석해를 통한 검증 경우에서 확인한 것과 같이 두 기법은 거의 같은 정확도를 보였다.

표 3은 다양한 격자 밀집도에 대한 안정성 및 수렴성을 보이고 있다. 격자점 중심 기법이 더 좋은 수렴성을 보이며, 두 기법의 수렴성의 차이는 격자가 조밀해 질수록 더욱 커지는 것을 볼 수 있다. 이차 정확도에 대해서 같은 격자에 대해서 격자점 중심 기법과 격자 중심 기법이 거의 같은 정확도를 보이는 것을 고려할 때, 격자점 중심 기법이 훨씬 더 효율적인 계산을 가능하게 함을 판단할 수 있다.

## 4. 결 론

비정렬 삼각형 격자에 적용된 격자점 중심과 격자 중심 유한 체적법의 정확도, 수렴성, 안정성이 평가되었다. 같은 격자에 대해서 이차 정확도의 두 기법의 정확도는 거의 같음을 확인하였다. 하지만 격자점 중심 기법은 훨씬 뛰어난 안정성 및 수렴성을 보였다. 따라서 격자점 중심 기법이 격자 중심 기법보다 더욱 신뢰성 있고 강건한 기법임을 판단할 수 있다.

## 참고문헌

[1] Barth, T.J. and Jespersen, D.C. 1989, 'The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes,' *AIAA Paper 89-0366*, 1989

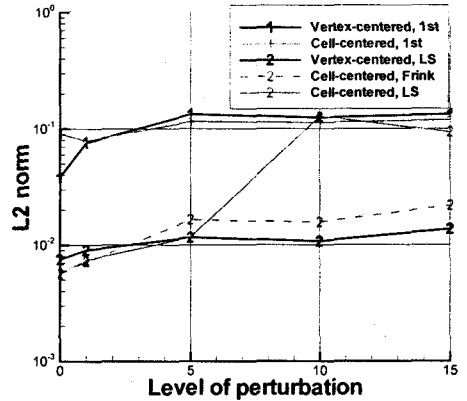
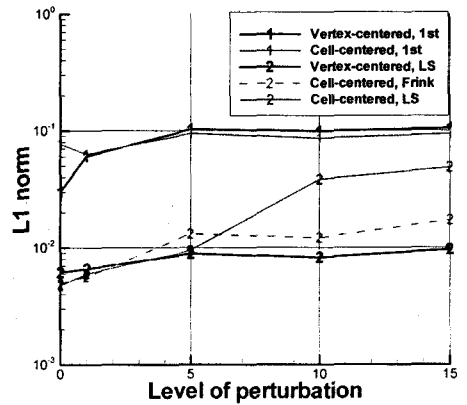


Fig. 5 L1 and L2 norms for randomly perturbed triangular grids