

비정렬격자계를 사용하는 경계면포착법에서 HR도식에 관한 연구

김 종 은¹, 명 현 국²STUDY ON HIGH RESOLUTION SCHEMES
IN INTERFACE CAPTURING METHODS WITH UNSTRUCTURED GRIDSJ.E. Kim¹ and H.K. Myong²

Several high resolution schemes such as OSHER, MUSCL, SMART, GAMMA, WACEB and CUBISTA are applied to two typical test cases of a translation test and a collapsing water column problem for the accurate capturing of fluid interfaces. It is accomplished by implementing the high resolution schemes in the in-house CFD code(PowerCFD) for computing 3-D flow with an unstructured cell-centered method, which is based on the finite-volume technique and fully conservative. The calculated results are found to show that SMART scheme gives the best performance with respect to accuracy and robustness.

Keywords: HR도식(High-Resolution Scheme), 비정렬 격자(Unstructured Grid), 자유표면유동(Free Surface Flow), 경계면포착법(Interface Capturing Method), 댐붕괴(Collapsing Water Column)

1. 서 론

자유표면유동은 기포나 액적이 포함된 이상(two-phase) 유동 및 대형선박, 연료탱크 내부 및 해양구조물 주변에서 발생하는 복잡한 유동현상에서 나타난다. 따라서 자유표면유동에 대한 물리적인 현상을 해석하기 위해 실험과 함께 수치해석적 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히 지난 20여 년 동안 CFD 분야에서는 자유표면을 포함한 이류현상이 지배적인 유동형태를 모사하기 위한 강력한 HR (High-Resolution) 도식들 [1-3]이 지속적으로 개발되어왔다. 이들 HR도식들의 대부분은 정렬격자계에 적합한 형태로 FVM에 기초하고 있다. 또한 이들 HR도식들의 공통적인 핵심적 요소는 셀 평균값으로부터 셀 면에서의 값을 재구성하기 위한 단조성기준(monotonicity criterion) 또는 한정성기준(boundedness criterion)이 결합된 고차보간법(high-order interpolation profile)에 있다. 일반적으로 고차 재구성과정은 고차보간법에 기초하나, 단조성을 만족시키기 위해 다양한 새로운 개념들이 제안되고 있

다. 일례로, Boris and Book [4,5]은 1차 정확도를 가지는 도식에 반확산플럭스의 제한된 양을 추가시킨 FCT(Flux Corrected Transport)라는 HR도식을 제안하였다. Harten[6]은 해석영역에서 유한한 변화의 척도로서 단조성을 나타내고, 기준이 Sweby[7]에 의해 제안된 플럭스 제한자(flux limiter)로 표현되는 TVD(Total Variational Diminishing) 도식을 제안하였다. 그리고 Leonard[8,9]는 셀 면에서와 상류 셀에서의 정규화된 변수값 사이의 관계를 사용하여 단조성기준인 CBC(Convective Boundedness Criterion)를 제시하였다. 이와 같이 일반적으로 고차도식에 기초한 HR도식들은 CBC 및 TVD와 같은 한정성 기준을 채용하고 있다. 즉 이는 한정되어 있지 않지만 선형적인 고차도식을 비선형이지만 한정된 HR도식으로 전환한다.

한편 앞에서 언급한 것과 같이 대부분의 HR도식은 정렬격자계에 적합한 형태로 개발되었기 때문에 정렬격자계에 실제로 적용하는데 있어서 어려움은 없다. 그러나 상대적으로 비정렬격자계에 적합한 형태로 제안된 방법들은 거의 존재하지 않는다. 따라서 정렬격자계에 사용되는 방법들을 비정렬격자계에 적용하는 것은 가능하나 더 복잡해질 뿐만 아니라 정렬격자계에서와 같이 향상된 결과를 제공하지 않을 수도 있다. 이는 비정렬격자계에서는 계산과정 중에 추가적인 상류점에서의 보간과 같이 유동방향에 따라 이웃하는 셀들의 정보에

1 학생회원, 국민대학교 대학원 기계공학과

2 정회원, 국민대학교 기계자동차공학부

* Corresponding author E-mail: myong@kookmin.ac.kr

의존하는 한정성(단조성)기준의 적용이 어렵기 때문이다.

본 연구의 목적은 이상유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 해석할 수 있는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법을 개발하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 Myong and Kim[10]이 개발한 비정렬 셀 중심방법을 채용하고 있는 3차원 유동해석코드(PowerCFD)에 비정렬격자계에 적합한 형태로 제안된 다양한 HR도식(OSHER, MUSCL, SMART, GAMMA, WACEB & CUBISTA)[1-3]을 적용한다. 그리고 새롭게 적용된 수치해석방법의 검증에 위해 간단한 2차원 Translation test[11]에 대해 각각의 도식에 따른 계산결과들을 서로 비교함으로써 각 방법의 정확성, 타당성 및 도식들 간의 비교우위성을 확인한다. 또한 수치해석방법의 견고함(robustness)을 확인하기 위해 널리 활용되고 있는 회기파(return wave)를 동반하는 댐붕파 문제[12]에 대한 각각의 수치 계산결과들을 비교한다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식

유동을 비압축성이라고 가정하면, 기상-액상 모든 영역에 적용되는 질량보존, 운동량보존 및 액상의 체적비(VOF) α 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 적분형태로 표현할 수 있다.

$$\int_S \underline{v} \cdot d\underline{S} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_S [\rho \underline{v} \otimes \underline{v}] \cdot d\underline{S} = \int_S \underline{T} \cdot d\underline{S} - \int_S p d\underline{S} + \int_V \underline{s} dV \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \int_S \alpha \underline{v} \cdot d\underline{S} = 0 \quad (3)$$

그리고 국소물성치인 밀도와 점성계수는 다음과 같이 계산한다.

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \quad (4)$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \quad (5)$$

여기서 아래첨자 1과 2는 다른 종류의 유체를 각각 나타내며, 격자 내에 자유표면이 위치하고 있을 때와 같은 일반적인 경우를 모두 고려하면 α 는 0과 1 사이의 값을 가진다.

2.2 VOF α 에 대한 이산화방정식

식(3)을 셀(체적 V_p)에 대해 이산화하고 시간변화가 충분히 작다면, 일반적으로 셀 면에서의 체적유량 F_p 는 α_f 에 비

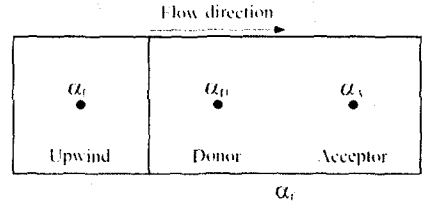


Fig. 1 One dimensional control volume.

해 무시할 정도의 미소변화량을 가지기 때문에 일정하다고 가정할 수 있다. 따라서 액상 체적비 α 에 대한 최종 이산화식은 다음과 같다.

$$\alpha_p^{t+\delta t} = \alpha_p^t + \frac{\delta t}{V_p} \sum_{f=1}^n \alpha_f^* F_f \quad (6)$$

위식을 정확하게 계산하기 위해서는 셀 면에서의 α_f^* 를 수치확산을 최소화시키며 구할 수 있는 이유 알고리즘, 즉 해의 한정성(boundedness)을 보장하면서도 급격한 기울기를 가지는 경계면을 유지하도록 인접한 셀 중심값을 사용하여 적절히 보간하여 α_f^* 를 구하는 방법이 필요하다.

2.3 HR도식

본 연구에서는 셀 면에서의 α_f^* 를 구하기 위해 기존의 경계면포착법에 적용된 여러 차분도식들이 가지고 있는 경계면의 번짐현상과 같은 물리적으로 부적합한 변형과 수치확산 등의 문제점 및 정렬사각형 격자계에만 제한되는 한계점을 극복하기 위해 HR도식을 사용한다. 여기서 HR도식은 다양한 방법으로 재구성 될 수 있으나, 본 연구에서는 식(6)에 나타난 이산화 방정식의 형태에 한정성기준을 적용하기에 가장 적절한 NVF(Normalized Variable Formulation)에 기초한 형태로 나타낸다.

2.3.1 NVF(Normalized Variable Formulation)

Leonard의 NVF개념[9]을 활용하여 국소변수들은 다음과 같은 형태의 정규화변수로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} \quad (7)$$

여기서 α_A 는 Fig. 1에 나타난 것과 같이 연속하여 이웃하는 세 개의 셀에서 하류셀(Acceptor 셀)의 값을 나타내고, α_D 는 상류셀(Donor 셀)의 값을 나타내고, α_U 는 상류류셀(Upwind 셀)의 값을 나타낸다. 그리고 정규화변수 $\tilde{\alpha}_A$ 와 $\tilde{\alpha}_U$

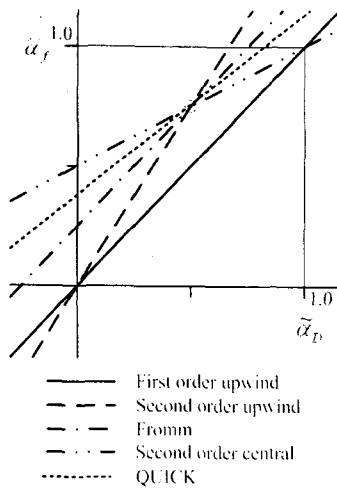


Fig. 2 Normalized variable diagram for each scheme.

는 각각 1과 0의 값을 가진다. 참고로 이러한 NVF 개념은 HR도식의 함수적인 관계를 쉽게 정의할 수 있고, 함수적인 관계가 한정성과 안정성의 특성을 나타내기 위해 꼭 만족해야 하는 상태를 정의하는데 유용하다.

Table 1은 몇몇 도식에 대한 함수적인 관계를 NVF개념을 사용하여 $\tilde{\alpha}_D$ 의 선형방정식의 형태로 나타낸 것이다. 그리고 Fig. 2는 Table 1에 나타난 도식에 대한 NVD(Normalized Variable Diagram)로, 이는 도식의 함수적인 관계를 $\tilde{\alpha}_f$ 와 $\tilde{\alpha}_D$ 에 의한 NVD개념을 활용하여 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 NVD는 도식의 정확성과 상대적인 확산성을 평가하기 위한 효과적인 도구임을 알 수 있다.

Table. 1 Functional relationships for the different linear schemes.

| Scheme | Functional Relationship | Functional Relationship (NVF) |
|------------------------|--|--|
| First order upwinding | $\alpha_f = \alpha_D$ | $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_D$ |
| Second order upwinding | $\alpha_f = \frac{3\alpha_D - \alpha_U}{2}$ | $\tilde{\alpha}_f = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_D$ |
| Second order central | $\alpha_f = \frac{\alpha_A + \alpha_D}{2}$ | $\tilde{\alpha}_f = \frac{1 + \tilde{\alpha}_D}{2}$ |
| Fromm's method | $\alpha_f = \alpha_D + \frac{\alpha_A - \alpha_U}{4}$ | $\tilde{\alpha}_f = \frac{1}{4} + \tilde{\alpha}_D$ |
| QUICK | $\alpha_f = \frac{\alpha_D + \alpha_A}{2} - \frac{\alpha_A - 2\alpha_D + \alpha_U}{8}$ | $\tilde{\alpha}_f = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\tilde{\alpha}_D$ (NVF) |
| | | |

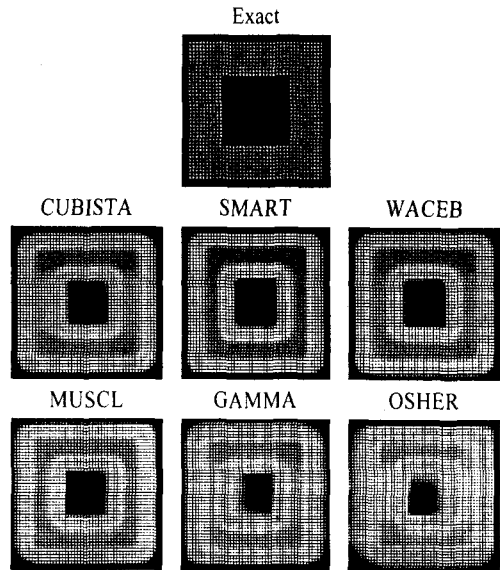


Fig. 3 Hollow square distribution after 1100 time steps.

2.3.2 CBC(Convective Boundedness Criterion)

CBC는 각각의 HR도식이 국소한정성기준을 항상 만족할 수 있는 정규화변수의 범위를 규정하는 것이다. 수치계산에 활용하기 위한 CBC는 NVD개념에 기초하여 Gaskell and Lau[8]에 의해 처음 공식화되었고, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} f(\tilde{\alpha}_D) & \text{continuous} \\ f(\tilde{\alpha}_D) = 1 & \tilde{\alpha}_D = 1 \\ \tilde{\alpha}_D < f(\tilde{\alpha}_D) < 1 & 0 < \tilde{\alpha}_D < 1 \\ f(\tilde{\alpha}_D) = 0 & \tilde{\alpha}_D = 0 \\ f(\tilde{\alpha}_D) = \tilde{\alpha}_D & \tilde{\alpha}_D < 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_D > 1 \end{cases} \quad (8)$$

위 식에서 알 수 있듯이 한정성의 특징을 가지기 위한 도식은 연속적인 함수 관계를 가져야 한다.

2.3.3 HR도식의 NVF

HR도식은 고차도식에 한정성기준을 강조함으로 유도되어진다. 즉 우선 고차도식을 기초로 하여 CBC기준이 이루어진 정성 영역내에 적합하도록 고차분포를 수정함으로써 이루어진다. 일반적으로 이러한 HR도식들에 대한 이류계수들은 비선형으로 나타난다. 따라서 이상유동과 같이 자유표면유동이 포함된 문제들에서 이는 내재적으로 결합된 방정식들의 여러 변수들이 셀 면에서 다른 계수값을 갖도록 할 수도 있다. 따라서 셀 중심의 값 혹은 셀 평균값에 의해 표현되는 대수적

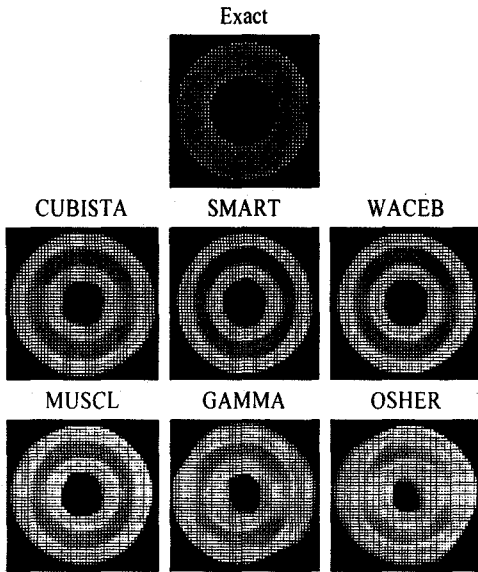


Fig. 4 Circle distribution after 1100 time steps.

관계는 검사체적면에서 더 이상 만족되지 않는다. 이러한 수학적 모순을 해결한 NVF형태의 HR도식은 Darwish and Moukalled[1], Song et al.[2] 및 Alves et al.[3]에 의해 OSHER, MUSCL, SMART, GAMMA, WACEB 및 CUBISTA 등과 같은 다양한 형태로 제안되었다.

3. 계산결과 및 고찰

3.1 Translation test

비정렬 셀 중심 방법을 채용하고 있는 3차원 유동해석코드 (PowerCFD)[10]에 적용된 각각의 HR도식의 수치해석방법의 적합성, 타당성 및 정확성을 검증하기 위해서 가장 널리 활용되고 있는 간단한 2차원 체적이류문제인 Rudman [11]의 Translation test를 실행하였다. 수치해석을 위한 전체 계산영역의 크기와 사용격자수는 각각 4×4 m²와 200×200 CVs이다. 그리고 일정한 두께를 가지는 속이 빈 원과 속이 빈 사각형이 포함된 모든 계산영역에 대해 일정한 속도장 (u, v) = (2, 1)을 주었으며, 주어진 형상의 크기는 바깥쪽으로 0.8 m이며 바깥쪽을 기준으로 두께는 0.2 m이다. 이와 같은 계산조건하에서 중력이나 표면장력에 의한 생성항이 전혀 존재하지 않고 일정 속도만이 존재한다면, 자유표면에 해당하는 경계선은 시간에 따른 변화 없이 그 형상을 유지하며 이동하여야 한다.

Figs. 3과 4는 초기의 형상과 주어진 속도장에 대해 시간이 1.1s 지난 후의 형상을 각각의 HR도식에 따라 나타낸 것으로,

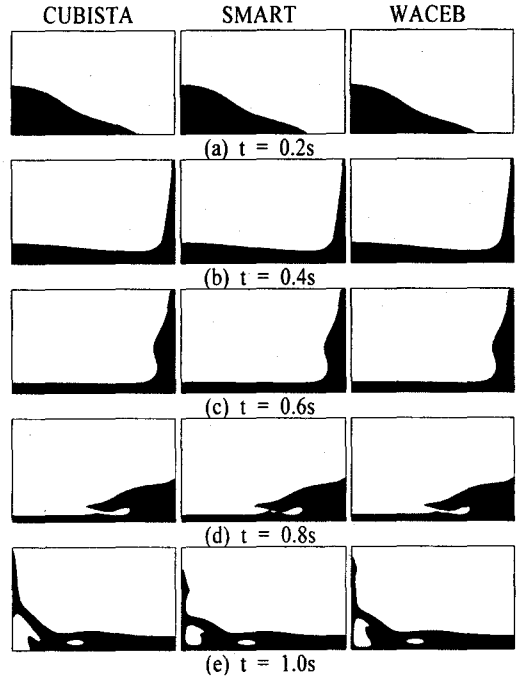


Fig. 5 Numerical results of the collapsing water column with a return wave.

적용된 HR도식과 초기형상에 따른 경계면의 이동결과를 확인할 수 있다. 즉, Fig. 3은 속이 빈 사각형의 이동결과로 모든 HR도식에 따른 최종적인 결과는 초기의 형상을 유지하나 전체적으로 번짐현상을 보여주고 있다. 특히, 2차 중심차분도식과 2차 상류차분도식에 기초한 고차도식을 활용한 GAMMA와 OSHER 도식은 모서리와 경계면에 걸친 전체적인 영역에서 일정한 간격의 번짐현상을 보여주는 다른 HR도식과 달리 비대칭적인 심한 불균형 번짐현상을 보여주고 있다. 전체적으로 QUICK 도식에 기초한 SMART 도식이 다른 도식에 비해 상대적으로 정확한 초기형상을 유지하고 있음을 확인할 수 있으며, 이는 SMART 도식이 다른 HR도식보다 상대적으로 우수함을 의미한다. 그리고 Fig. 4는 속이 빈 원으로 각각의 도식에 따른 번짐현상은 Fig. 3과 정성적으로 동일한 형태로 나타나지만, Fig. 3에서 상대적으로 눈에 띄는 불균형 번짐현상을 나타내는 GAMMA와 OSHER 도식은 Fig. 4에서도 최종적으로 찌그러진 형태의 도넛 형상을 나타내는 것을 확인할 수 있다. 이는 두 도식에 적용된 실제적인 경계면의 형상을 보장하기 위한 방법의 한계점 때문이라고 사료된다.

3.2 Dam-break problem

Figs. 5와 6은 자유표면유동과 이상유동의 수학적 모델에 대한 타당성을 확인하기 위해 자주 활용되는 회기파(return

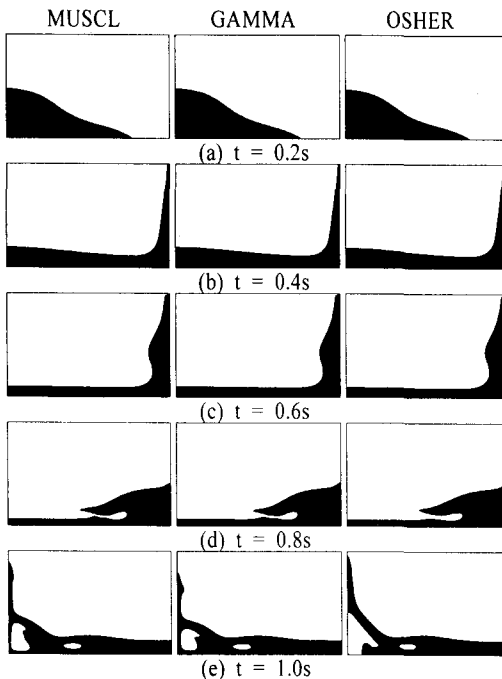


Fig. 6 Numerical results of the collapsing water column with a return wave.

wave)를 동반한 2차원 댐붕괴 문제에 대한 수치계산 결과를 0.2 sec 간격으로 각각의 HR도식에 따라 나타낸다. 여기서 수조의 전체영역과 일치하는 수치계산을 위해 활용한 전체계산 영역은 가로와 세로 0.584m × 0.365m로 Koshizuka et al.[12]의 실험조건과 같고, 초기상태에서 주어진 물의 높이와 너비는 0.292m × 0.146m로 일치한다. 그리고 기존의 연구를 통하여 시간간격 $\Delta t = 0.001$ 일 때 20 × 18, 40 × 36, 80 × 72 CVs의 세 가지 격자계로 격자수에 대한 수치해석결과와 비의존성을 확인하였고, 본 연구에서는 대표적인 격자계 80 × 72 CVs를 사용하여 수치해석한 결과를 Figs. 5와 6에 제시한다. 또한 자유표면은 VOF 값이 0.5인 등고선을 기준으로 나타낸다.

Figs. 5(a),(b),(c)와 6(a),(b),(c)에 나타낸 것과 같이 왼쪽 벽면에서 물기둥이 붕괴되어 마주보고 있는 벽면을 향하여 진행되는 자유표면의 형태는 각각의 HR도식에 따라 눈에 띄는 특별한 차이점을 발견할 수 없다. 즉 전체적인 댐 붕괴문제에 대한 자유표면유동의 형태는 HR도식에 특별히 의존하지 않음을 확인할 수 있다. 그러나 GAMMA와 OSHER 도식의 결과에서 큰 차이는 아니지만 자유표면 근처에서 발생하는 미세한 수치확산 및 번짐현상을 각각 확인할 수 있는데, 이러한 결과는 Figs. 3과 4에 이미 언급한 것과도 일치한다.

Figs. 5(d),(e)와 6(d),(e)는 왼쪽 벽면에서 붕괴되어 진행한 물이 오른쪽 벽면과 충돌한 후 다시 물의 진행방향으로 전향

하여 이동하는 자유표면의 형태를 나타낸다. 이미 앞에서 언급한 것과 같이 보통의 댐 붕괴 문제와 같이 단순히 물기둥이 붕괴되어 진행되는 모습은 각각의 HR도식에 따라 특별한 차이점을 확인할 수 없었지만, 벽면과 충돌하고 진행방향으로 전향하는 회기파로 인해 발생하는 자유표면의 분리와 결합이 반복되어 나타나는 부분에서는 각각의 도식에 따른 수치해석 결과가 다소 차이를 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 즉, Figs. 5(d)와 6(d)를 통해서 확인할 수 있듯이 SMART 도식을 제외한 모든 HR도식은 자유표면이 재결합하는 물리적으로 타당한 유동현상을 제대로 예측하지 못하고 있다. 따라서 이러한 재결합 영역에서의 물리적으로 타당하지 못한 유동형태로 인해 이후에 SMART를 제외한 다른 도식들을 활용하여 예측한 자유표면의 형태에서는 Figs. 5(e)와 6(e)에 나타낸 것과 같이 각각의 도식별로 두드러진 차이를 나타내고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 Myong and Kim[10]이 개발한 비정렬 셀 중심 방법을 채용하는 3차원 유동해석코드(PowerCFD)에 기존에 제안된 다양한 HR도식들을 비정렬격자계에 적합한 형태로 적용하여 이상유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 수치해석하기 위한 방법을 개발하고, 각각의 방법에 대한 특징을 비교분석함으로 장·단점 및 우수성을 확인하였다. 또한, Translation test와 회기파를 동반한 댐붕괴 문제[12]에 대한 본 연구의 HR도식에 따른 수치해석결과를 비교·검토함으로써 수치해석방법의 정확성 및 타당성을 검증함과 더불어 견고함(robustness)도 확인하였다.

연구결과, 비정렬격자계에 적합한 형태의 다양한 HR도식들 중에 SMART 도식을 적용한 본 수치해석방법(PowerCFD 코드)은 다른 HR도식을 적용하였을 때보다 간단한 자유표면 유동문제뿐만 아니라 자유표면의 분리와 혼합이 크게 발생하는 다소 복잡한 문제에 이르기까지 물리적으로 타당한 실제 현상을 적절하게 예측할 수 있음을 확인할 수 있었다. 즉 2차원 Translation test[11]와 회기파를 동반한 댐붕괴 문제[12]를 통해 QUICK 도식이 기초가 된 SMART 도식이 기타 도식들에 비해 경계면의 비물리적인 변형 및 수치확산면에서 개선된 결과를 나타내고 있음을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Darwish, M. and Moukalled, F., 2003, "The χ -schemes: a new consistent high-resolution formulation based on the normalized variable methodology," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, p. 1711-1730.



- [2] Song, B. et al., 2000, "On a Higher-Order Bounded Discretization Scheme," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 32, p. 881-897.
- [3] Alves, M.A. et al., 2003, "A convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 41, p. 47-75.
- [4] Zalesak, S., 1979, "Fully Multidimensional Flux Corrected Transport Algorithms for Fluids," *J. Comp. Phys.*, Vol. 31, p. 335-362.
- [5] Boris, J.P. and Book, D.L., 1976, "Flux Corrected Transport III, Minimal Error FCT Algorithms," *J. Comp. Phys.*, Vol. 20, p. 397-431.
- [6] Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comp. Phys.*, Vol. 49, p. 357-393.
- [7] Sweby, P.K., 1984, "High Resolution Schemes Using Flux-Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 21, p. 995-1011.
- [8] Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C., 1988, "Curvature Compensated Convective Transport: SMART, a New Boundedness Preserving Transport Algorithm," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 8, p. 671-641.
- [9] Leonard, B.P., 1991, "The ULTIMATE Conservative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Dimensional Advection," *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 88, p. 17-74.
- [10] Myong, H.K. and Kim, J.T., 2005, "Development of 3D Flow Analysis Code using Unstructured Grid System(1st Report, Numerical Method)," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 29, p. 1049-1056.
- [11] Rudman, M., 1997, "Volume-Tracking Methods for Interfacial Flow Calculations," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 24, p. 671-691.
- [12] Koshizuka, S. et al., 1995, "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation," *Comput. fluid Dynamics J.*, Vol. 4, p. 29-46.