

사각형 적응 격자 고차 해상도 수치 기법의 개발

장 세 명^{*1}, 필립 존 모리스²

DEVELOPMENT OF A HIGH-ORDER NUMERICAL METHOD IN THE QUADRILATERAL ADAPTIVE GRIDS

S.M. Chang^{*1} and P.J. Morris²

In the aeroacoustic application of computational fluid dynamics, the physical phenomena like the crackle in the unsteady compressible jets should be based on very time-accurate numerical solution. The accuracy of the present numerical scheme is extended to the fifth order, using the WENO filter to the sixth-order central difference computation. However, the computational capacity is very restricted by the environment of computational power, so therefore the quadrilateral adaptive grids technique is introduced for this high-order accuracy scheme. The first problem is the multi-dimensional interpolation between fine and coarse grids. Some general benchmark problems are solved to show the effectiveness of this method.

Key words: 비정상유동(Unsteady Flow), 적응격자(Adaptive Grid), WENO법(WENO Scheme)

1. 서 론

2. 다차원 내삽법

초음속의 압축성 제트류에서 발생하는 ‘크랙클(crackle)’과 같은[1], 많은 공력음향학 문제들에서 신뢰할 수 있고 적절한 계 사용될 수 있는 전산유체역학 코드를 개발하는 일은 매우 중요하다[2]. 그러나 어느 시대나 계산기의 용량 한계로 기인한 계산 격자수 제한이 있기 때문에, 적응 격자법과 같이 격자수를 절약할 수 있는 방법들이 고안되고 실천되어 왔다 [3].

본 연구에서는 적응 격자법에 기반한 다차원 내삽법을 개발하고, 여기에 WENO 필터링 기법을 적용하여 효과적으로 충격파와 같은 불연속면을 포함한 비정상 압축성 유동에 대한 해석 코드를 개발하였다. 먼저 유한 차분법에 기반한 다차원 내삽법에 대해 연구하였고, 표준적인 WENO 기법을 적응 격자에 적용하는 방법을 연구해 보았다. 또한 이를 기반으로 지금까지 여러 문헌에서 다루어 왔던 몇 가지 표준적인 검증 문제를 풀이하고 격자의 절감 효과에 대해 논하였다.

2.1 유한 차분법에 기반한 다차원 내삽법

예컨대 2 차원 카테시안 좌표계에서 격자 도심 값에 대한 격자 평균값은 테일러 정리에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) \\ = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} u(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) \\ &+ \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^n \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \Big|_{(x_0, y_0)} (x-x_0)^{n-k} (y-y_0)^k \\ &+ O(\Delta^{N+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

1 정희원, 군산대학교 공과대학 기계공학부

2 Dept. Aerospace Eng., Penn State University

* Corresponding author E-mail: smchang@kunsan.ac.kr

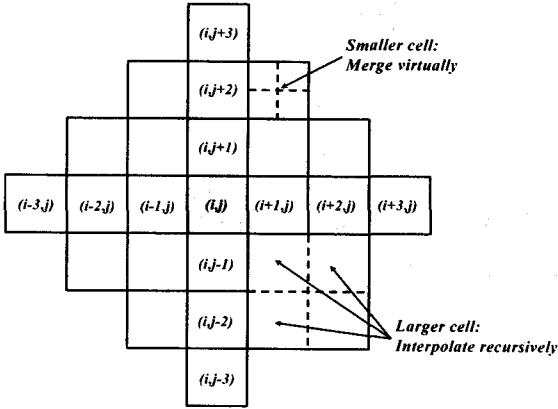


Fig. 1 Neighbor cells for the finite difference.

위 식 (1),(2)로부터 최종적으로 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$u(x_0, y_0) = \bar{u}(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) + O(\Delta^2) \quad (3)$$

식 (3)으로부터, 격자 도심값과 격자 평균값은 2 차 이내의 정확도에서는 서로 같다고 봐도 되지만, 그 이상의 정확도에서는 고차항들 만큼의 오차가 발생한다. 짝수 차수의 오차항은 식 (1)의 적분을 통해 상쇄되지 않기 때문에 추가적으로 고려해 주어야 한다.

예컨대 적용 격자에서 한 격자를 네 개의 작은 격자로 분할하였을 경우, 그중 제 1 사분면에 속하는 중속 격자의 격자 평균값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_0 + \frac{\Delta x}{4}, y_0 + \frac{\Delta y}{4}; \frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}) \\ = \bar{u}(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) \\ + \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^n C_{n,k} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \Big|_{(x_0, y_0)} (\Delta x)^{n-k} (\Delta y)^k \\ + O(\Delta^{N+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서

$$C_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } n, k : \text{even, all} \\ \frac{1}{2^n (n-k+1)! (k+1)!} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

식 (4)에서 고차 미분 계수 값들은 Fig. 1과 같이 계산 스텐실을 구성하여 유한 차분법으로 계산한다. 격자의 크기가 제각각 균일하지 않으므로, 큰 격자는 재귀적으로 분할 서브루틴을 적용하고, 작은 격자는 병합시킨다. 병합은 단순히 네 격자의 산술 평균을 취하면 된다.

2.2 WENO 필터링의 적용

일반적인 중앙 차분법에 기반한 고차 수치 해법들은 선형 파동에 대해서는 설계된 정확도만큼의 고해상도의 결과를 보여 준다. 그러나 충격파와 같은 불연속면이 존재하는 유동장에서는 비선형 파동의 소산 (dissipation)에 의해 불필요한 수치적 진동이 발생한다. 따라서 불연속면 근방에서는 정확도를 낮추어 이를 효과적으로 제거해 주는 필터가 필요하다.

본 연구에서는 Riemann 근사 해법의 일종인 Roe 방법을 사용하였다. 이 방법에서 단순히 좌우의 불연속 값 (+/-)을 WENO 법으로 재건 (reconstruction)하는 것이다. 이 방법을 예컨대 1 차 미분 항에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i = \frac{\bar{u}_{i+1/2} - u_i^+ - \bar{u}_{i-1/2}^+}{\Delta} + O(\Delta^5) \\ \in (\bar{u}_{i-2}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}) \end{aligned} \quad (6)$$

이웃한 다섯 개의 점으로 1 차 미분 항을 나타낼 수 있는 최대 정확도는 6 차이지만, 다음과 같은 WENO 필터를 사용하면 정확도는 5 차가 된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1/2} = g(\bar{u}_{i-2}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}) \\ = w_1 u^{(1)} + w_2 u^{(2)} + w_3 u^{(3)} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서 각각 가중치를 적용한 각각의 저 정확도 재건 값을 정의하는 방법은 참고 문헌 [4]에 잘 나와 있다.

3. 수치 기법의 구성

3.1 지배방정식의 이산화

본 연구에서 사용한 지배방정식은 점성 항이 없는 오일러 방정식이다. 이 방정식은 물리량들에 대해 다음과 같은 보존 법칙의 계를 형성한다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (8)$$

식 (8)을 유한 체적법 (또는 유한 차분법)을 이용하여 이산화하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta} (\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) \\ \approx -\frac{1}{\Delta^2} \sum_{p=1}^2 \{ \hat{f}(u_{i\pm 1/2}^+, u_{i\pm 1/2}^-) \Delta_{i\pm 1/2} (-1)^p \} \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 공간 이산화에 따른 수치 유량 (numerical flux) 의 계산은 앞절에서 설명한 다차원 내삼법을 따른다.

3.2 시간 적분법

시간에 대한 적분법은 단순 양해법 (explicit method)으로 다음과 같은 Runge-Kutta 법을 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= L(\bar{u}) \\ \bar{u}^{(0)} &= \bar{u}^n \\ \bar{u}^{(j)} &= \bar{u}^n + \frac{\Delta t}{p+1-j} L(\bar{u}^{(j-1)}); \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \bar{u}^{n+1} &= \bar{u}^{(p)} \end{aligned} \tag{10}$$

본 연구에서는 공간 정확도와 시간 정확도를 맞추기 위해 5 차 정확도의 시간 적분법을 사용하기로 한다.

4. 벤치마크 검증

4.1 수렴 테스트

많은 선행 연구 [4]에서 다루고 있는 본 시험은 초기에 사인 함수로 초기 조건을 준 다음, 10 주기 후에 그 왜곡 정도를 측정하여 격자수를 증가시켰을 때 오차의 수렴도를 검사하는 방법이다.

Table 1은 이러한 수렴 검사 결과이고, 목표한 정확도보다는 약간 성능이 떨어지지만, 대략 4 차 이상 정확도에 근접한 해의 수렴 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

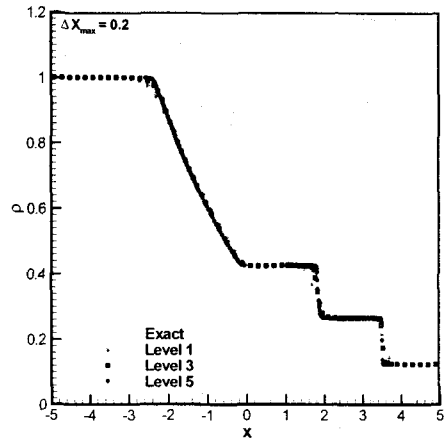
4.2 충격파관 문제

많은 참고문헌에서 다루고 있는 1 차원 충격파관 문제는 크게 Sod 문제 (Fig. 2(a))와 Lax 문제 (Fig. 2(b))로 분류하고 있다. 본 연구에서 개발한 수치 기법은 적응 격자의 단계를 높일수록 더 정밀한 해를 제공하는 것을 알 수 있다.

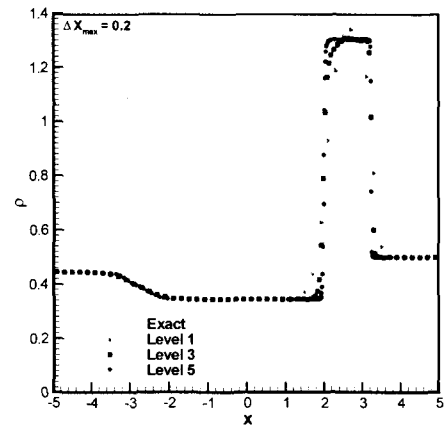
4.3 충격파엔트로피장 간섭

Table. 1 The convergence test.

level	N	Nbase	L1 error	L1 order	L _∞ error	L _∞ order
2	16	10	2.16E-03	-	4.19E-03	-
3	32	10	1.37E-04	3.98	5.65E-04	2.89
4	60	10	8.67E-06	4.39	7.59E-05	3.19
5	116	10	4.73E-07	4.41	4.39E-06	4.32



(a)



(b)

Fig. 2 Shock tube problems: (a)Sod's, (b) Lax's.

참고문헌 [5,6]에서 풀이한 이 문제는 사인 파형으로 주어진 엔트로피 장과 이동 충격파의 간섭을 보여준다. Fig. 3을 보면 일정 수준 이상의 적응 격자계에 대해 옳은 답을 내는 것으로 판단된다.

4.4 와류 전달

등엔트로피 장에 형성된 와류에 일정한 대류 속도를 주어 대각선 방향으로 흘러보냈을 때에 10 주기 이후 원래 와류 모양이 왜곡되는 정도를 측정하는 시험이다 [6]. Fig. 4를 보면, 일정 민감도 (sensitivity) 이상의 적응 격자계에 대해 바른

더 좋은 성과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 논문에서 수행한 연구는 한국학술진흥재단의 연구비 지원으로 이루어졌음을 밝힙니다(KRF-2005-214-D00009). 저자들은 이러한 학술 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] J.E. Ffowcs Williams, J. Simson, and V.J. Virchis, "Crackle: an annoying component of jet noise," *J. Fluid Mechanics*, vol. 71, part 2 (1957), p. 251-271
- [2] Colonius T. and Lele S.K., 2004, "Computational Acoustics: Progress on Nonlinear Problems of Sound Generation," *Progress in Aerospace Science*, Vol.40, p.345-416.
- [3] M.J. Berger and P. Colella, "Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics," *J. Computational Physics*, vol. 82 (1989), p.64-8
- [4] Jiang G. and Shu C.W., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *J. Computational Physics*, Vol. 126, p.202-228.
- [5] Pirozzoli S., 2002, "Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction Problems," *J. Computational Physics*, Vol.178, p.81-117.
- [6] Kim D. and Kwon J.H., 2005, "A High-Order Accurate Hybrid Scheme Using a Central Flux Scheme and a WENO Scheme for Compressible Flowfield Analysis," *J. Computational Physics*, Vol.210, p.554-583.

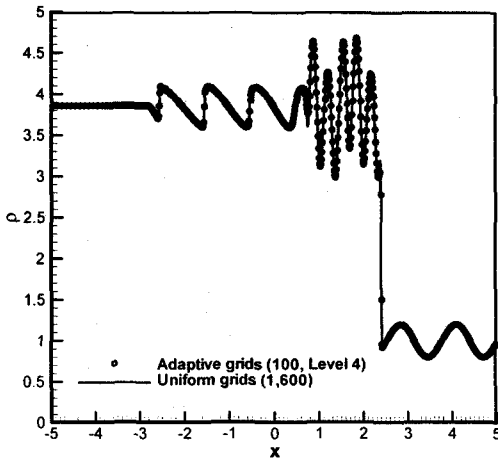


Fig. 3 Shock and entropy wave interaction.

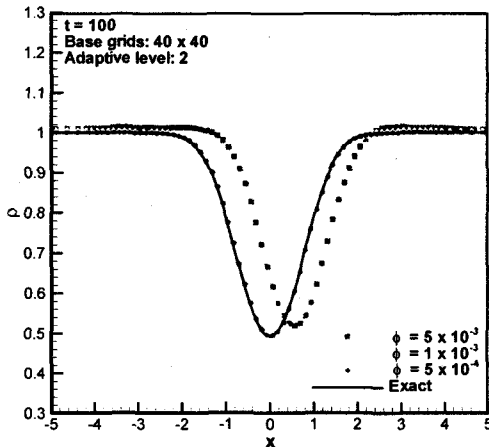


Fig. 4 Isentropic vortex advection problem.

해를 제공함을 알 수 있다.

5. 결 론

압축성 비정상 유동의 효율적인 해석을 위한 적응 격자법에 기반한 일련의 수치 기법을 개발하였다. 이상의 연구로부터 적응 격자에 WENO 법을 적용하였을 경우, 1 차원 문제의 경우 1/5, 2 차원 문제의 경우 1/20 이내 개수의 격자만을 적용하면서도 균일 격자일 때와 비슷한 질의 해를 얻을 수 있음이 확인되었다. 추후 연구에 본 개발 결과를 이용한다면,