

Euler 방정식의 Flux Function 특성 비교 연구

채 은 정¹, 이 승 수^{*2}

STUDY ON FLUX FUNCTIONS FOR THE EULER EQUATIONS

E.J. Chae¹ and S. Lee^{*2}

A comparative study on flux functions for the 2-dimensional Euler equations has been conducted. Explicit 4-stage Runge-Kutta method is used to integrate the equations. Flux functions used in the study are Steger-Warming's, van Leer's, Godunov's, Osher's(physical order and natural order), Roe's, HLLC, AUSM, AUSM+ and AUSMPW+. The performance of MUSCL limiters and MLP limiters in conjunction with flux functions are compared extensively for steady and unsteady problems.

Key words: 이차원 Euler 방정식(2D Euler Equations), 4차 Runge-Kutta 방법(4 stage Runge-Kutta Method), 유동 함수(Flux Function), MUSCL, 다차원 제한 과정(MLP: Multi-dimensional Limiting Process)

1. 서 론

풍상차분법에는 크게 Flux Vector Splitting (FVS)와 Flux Difference Splitting(FDS)로 나눌 수 있다. FVS은 Steger-Warming와 Van Leer가 대표적이며, 강건성과 효율성면에 장점을 가지고 있는데, 이 방법은 강한 충격파나 팽창파를 포함하는 유동 해석 시에도 Positivity 조건을 만족시킨다. 그에 비하여 제어면 기준으로 좌우 유동 상태 간에 정보교환이 전혀 이루어 지지 않는다. 그렇기 때문에 제어면과 음속 천이점 위치를 알 수 없어 물리 현상 등을 반영 못한다. 더불어 과도한 수치점성을 지니기 때문에 격자수를 크게 증가시켜도 경계층 내에서의 정확한 수치 계산은 불가능 하다.

FDS는 Roe와 Osher등이 있는데, 이들은 국소 Riemann 문제의 결과를 이용하여 Flux의 진행 방향을 제어면에서 모사함으로써 경계층 내에서 적은 격자수로도 정확한 계산을 할 수 있다. 그러나 엔트로피 조건을 만족시키지 못하여 팽창 충격파, Cabuncle 현상 등과 같은 비 물리적 결과를 발생시킨다. 또한 급격하게 팽창하는 영역과 같은 국소 선형화가 타당하지 않은 영역에서 강건성 문제가 나타난다. 이러한 풍상차분

법에서 FVS의 장점인 강건성과 FDS의 장점인 정확성을 이용하여 Liou 와 steffen은 AUSM을 개발하였다. 또한 Liou에 의해 AUSM+, AUSMD, AUSMDV이, Kim & Kim[5]에 의해 AUSMPW, AUSMPW+ 등으로 계속 발전되고 있다.

1차의 공간 정확도를 갖는 해석방법만 해의 단조성을 유지할 수 있다는 것을 잘 알려진 사실이다. 2차 공간 정확도를 가지면서 수치 진동 및 단조성을 유지하기위하여 TVD(Total Variation Diminishing)기법이 Harten에 의해 도입되었다. Van Leer의 MUSCL방법은 물리 변수를 외삽하여 정확성을 높이고, 제한자는 수치진동을 제거 하기위하여 진동이 발생하는 불연속지점에서 2차의 정확도를 1차로 떨어뜨리는 방법이다. 그러나 이 방법은 격자에 수직한 방향으로 외삽이 이루어져 다차원의 특성을 정확히 표현하지 못하고 있다. 최근 다차원 유동특성을 고려한 고차의 내삽기법인 MLP(Multi Dimensional Limiting Process)방법이 Kim & Kim[6]에 의해 개발되었다.

본 연구에서는 2차원 정상 및 비정상 유동문제에서 각각의 flux function의 특성을 비교하였다. 또한 MUSCL 방법과 MLP 방법의 다양한 제한자의 특성도 비교하였다.

2. 수치 해석 기법

2.1 지배 방정식

2차원의 Euler방정식은 보존형 형태로 다음과 같이 나

1 학생회원, 인하대학교 대학원 항공공학과

2 정회원, 인하대학교 항공공학과

* Corresponding author E-mail: slee@inha.ac.kr

타 낼 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

여기에서 conservative variable, inviscid flux vector와 viscous flux vector는 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\epsilon + p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ (\epsilon + p)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

이때 이상기체의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$p = (\gamma - 1) \left\{ \epsilon - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} \quad (3)$$

2.2 수치 기법

수치해석을 위하여 2차 Euler방정식은 양해유한체적법 (Finite Volume Discretization Explicit)을 사용하였다. Flux function으로는 풍산차분법 중에 Godunov 계열의 Godunov, HLLE, Roe, Osher scheme과 Steger-Warming, Van Leer scheme 같은 FVS방법 그리고 FDS와 FVS의 장점을 결합한 AUSM 계열의 수치기법인 AUSM, AUSM+, AUSMPW+ scheme을 사용하였다. 공간이산화법으로 일반적인 Upwind방법은 공간 정확도가 1차이므로, 정확성을 높이기 위해서 물리 변수를 외삽하는 경우인 MUSCL방법을 이용하였다. 이에 진동을 막고 단조성(monotonicity)을 유지하기위한 비선형 보정하기 위해 제한자인 Minmod Limiter, Van Albada Flux Limiter, Van Leer Limiter와 다차원 유효정보를 포함할 수 있는 MLP-Minmod Limiter, MLP-Vanleer Limiter, MLP-Superbee Limiter, MLP3, MLP5 등을 사용하였다.

시간 차분화법은 시간에 대해 4 stage Runge-Kutta Method를 사용하였다. 정상 해를 구하는 문제에는 국부적 시간전진 (Local Time Stepping)을 사용하고 비정상해에서는 같은 시간 간격을 사용하여 시간 정확도를 유지하도록 최소시간간격 (Minimum Time Stepping)을 사용하였다.

Solid wall 경계 조건은 slip boundary condition으로 2차의 공간 이산화 오차를 갖도록 처리했다. 그리고 Far field 경계 조건은 특성치 경계법을 적용하였다.

3. 수치 해석 결과

3.1 Double Mach Reflection

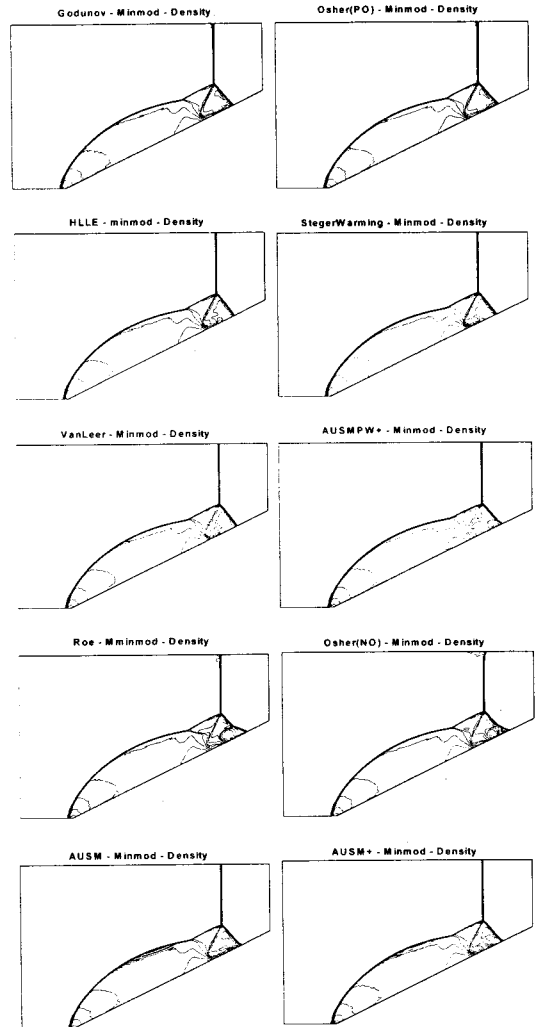


Fig. 1 Double Mach Reflection with Minmod Limier

첫 번째 문제는 Woodward[1]의 논문에서 처음 제기한 문제로 일부의 flux function을 사용하면 충격과가 벽면 근처에서 찌그러지는 현상인 Kinked mach stem이 발생하는 것으로 알려져 있다. Shock speed가 10이고 경사의 각은 30도이다. 수치특성의 비교하기 위해 0.4초 후의 density counter를 사용하였다. 이때 사용된 CFL수는 0.9이고 격자수는 300×251이다.

Fig1는 각각의 Flux functions에 Minmod limiter를 적용한 결과를 도시하였다. Godunov, Osher(Physical Order), HLLE, Steger-Warming, Van Leer, AUSMPW+에서는 Kinked Mach Stem현상이 나타나지 않는다. 또한 HLLE, Steger-Warming, AUSMPW+는 충격과 뒤에 수치 진동이 없다. 특히 AUSM 계열에서는 충격과 뒤에 진동커지나, AUSMPW+는 수치 진동을 제거하여 단조성을 유지하였다. 그러나 Roe, Osher(Natural

HLLS - Minmod - Density

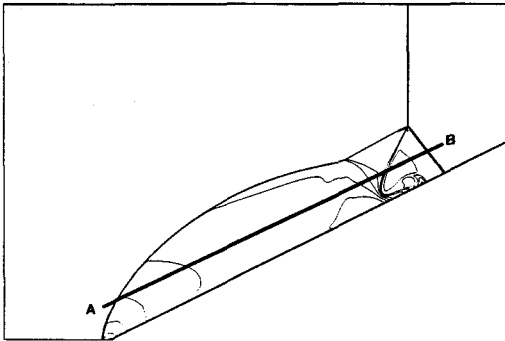


Fig. 2 Fine Grid Solution of Double Mach Reflection

Order)는 Kinked Mach Stem이 발생한다. AUSM과 AUSM+는 끝부분에 Kinked Mach Stem이 발생하지 않는 것처럼 보이나 이는 격자수를 늘리게 되면 Kinked Mach Stem이 생긴다.

Fig2은 격자수를 각 방향으로 4배 키운 Minmod Limiter를 이용한 HLLS scheme의 결과로 비교의 기준점으로 잡았다. 그 이유는 Fig1~5번을 통해 알 수 있다. 가장 기본적인 Minmod Limiters는 다른 다차원 제한자들과 비슷한 결과 값을 가져왔고 Flux function은 HLLS Scheme이 density contour에서는 Kinked mach stem이 나타나지 않았기 때문이다.

Fig3은 HLLS Scheme에 여러 가지 제한자를 적용하여 Fig2의 A-B부분과 이에 해당하는 Fig1부분에서의 밀도 분포를 도시하였다. Fine grid solution은 앞에서와 같이 격자수를 각 방향으로 4배 늘린 HLLS Scheme에 Minmod Limiter를 적용한 것이다. 모서리부분에서 약간의 차이는 보이지만 대체로 적은 격자수를 가지고도 Fine grid solution과 같은 현상을 보인다. 이를 더 정확하게 파악하기 위하여 Fig3의 C와 D부분을 확대한 그림은 Fig4와 Fig5 이다. 여기서 살펴보면 Van Leer limiter와 Van albada limiter는 약간의 Overshooting 현상이 보이고, 나머지 제한자들은 비슷한 해석 결과를 보여주고 있다.

3.2 Double shock reflection

Kim & Kim[6]이 제안한 정상 유동 문제로 자유류의 마하 수 2인 15도의 경사가 있는 물체의 flux function 특성을 비교하기 위하여 해의 Pressure counter를 도시하였다. 이때 CFL수는 0.9이고 100×30의 격자로 구성되었다.

Fig6는 각각의 Flux functions에 MLP Superbee limiter를 적용한 결과를 도시하였다. AUSM, AUSM+는 경사 충격파 뒤에 post shock oscillation이 발생하고 단조조건을 만족시키지 못 한다. Godunov, Roe, Osher(Natural Order), Osher(Physical Order), HLLS, Steger -Warming, Van Leer, AUSMPW+들은 격

HLLS Scheme

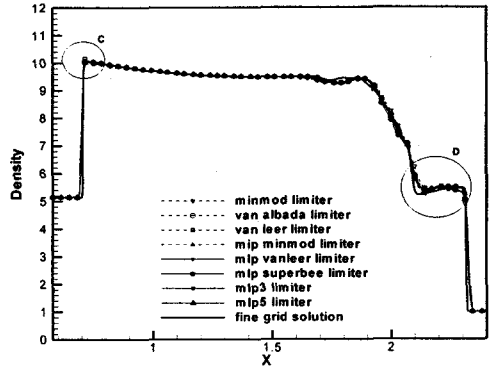


Fig.3 Density distribution of A-B line

HLLS Scheme

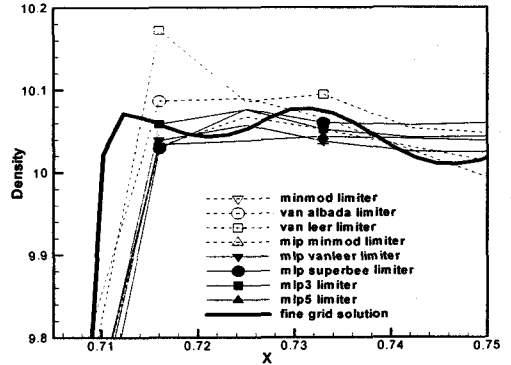


Fig.4 Density distribution of C

HLLS Scheme

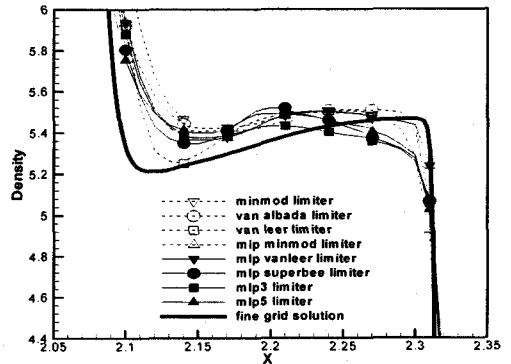


Fig.5 Density distribution of D

자수가 적은 이유로 충격파의 간격이 조밀하지 못하지만 경사 충격파의 단조성은 유지된다.

Fig7에는 격자수를 각 방향으로 4배 키운 Minmod Limiter와 Roe의 방법으로 구한 압력분포를 도시하였으며 비교의 기

준점이다. 기본적인 Minmod Limiter는 다른 다차원 제한자들과 비슷한 결과를 가져왔고 수렴성 역시 좋은 결과를 보여주기 때문이다. 또한 Flux function은 몇 몇 경우를 제외하고 결과 값이 대부분 비슷하여 현재 CFD분야에서 가장 많이 쓰이는 Roe Scheme을 사용하였다.

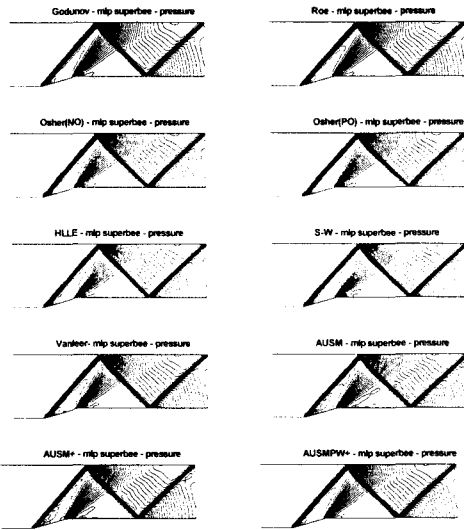


Fig.6 Double Shock Reflection with MLP Superbee

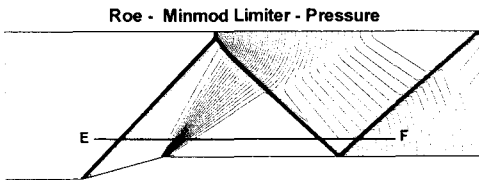


Fig. 7 Fine Grid Solution of Double Shock Reflection

Fig8은 Roe Scheme에 여러 가지 제한자를 적용하여 Fig7의 E-F부분과 이에 해당하는 Fig6부분에서의 압력 분포를 도시하였다. Fine grid solution은 앞에서와 같이 격자수를 각 방향으로 4배 늘린 Roe Scheme에 Minmod Limiter를 적용한 것이다. 꺾어지는 부분에서 Fine grid solution과 차이를 보이지만 대체로 같은 형태를 보이고 있다.

Fig9와 Fig10은 정확하게 파악하기 위하여 Fig8의 G와 H부분을 확대한 그림이다. Fig9에서 살펴보면 Van Leer limiter와 Van albadalimiter는 약간의 Overshooting현상이 보였다. Fig10에서 MLP 계열의 제한자들은 적은 격자수를 가지고도 Fine grid solution과 비슷하게 단조성을 유지하였다. 특히 MLP Superbee Limiter가 가장 fine grid solution과 유사한 형태를 나타냈다.

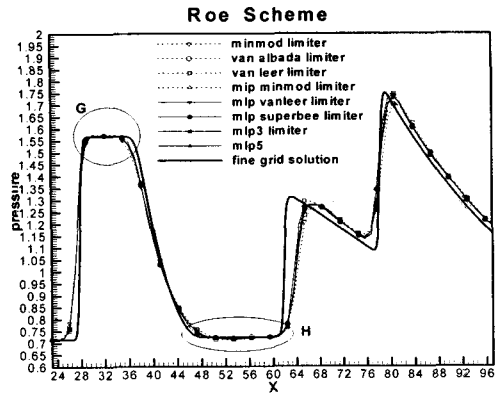


Fig.8 Pressure distribution of E-F line

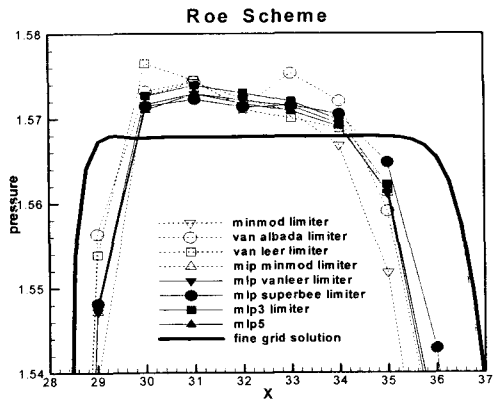


Fig.9 Pressure distribution of G

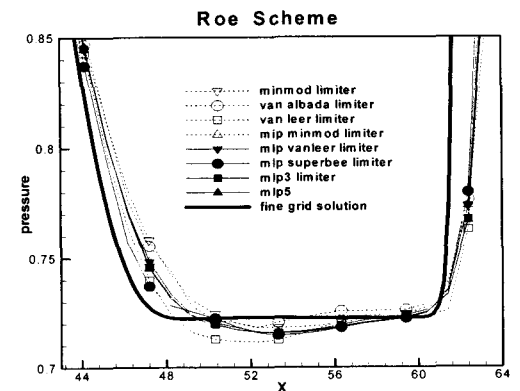


Fig.10 Pressure distribution of H

Fig11은 Roe Scheme에 여러 가지 제한자를 적용한 해의 수렴곡선을 도시하였다. Minmod limiter가 가장 수렴이 잘되지만 해의 수치진동이 약간 보였다. Van albadalimiter와 MLP

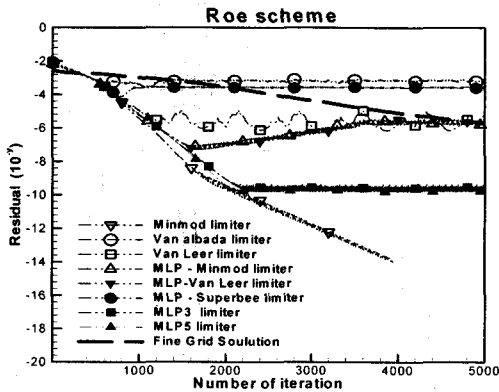


Fig.11 Roe Scheme Convergence

superbee limiter, Van Leer limiter, MLP Minmod limiter, MLP Van Leer limiter는 수렴성이 좋지 않고 해가 수치진동을 가지는 문제점이 발생하였다. 또한 MLP3 와 MLP5도 약간의 수치 진동을 지녔으나 어느 정도의 수렴성은 유지 되었다. Fine Grid solution은 5000번 돌렸을 때는 수렴이 좋지 않으나 해의 수치진동은 나타나지 않는다. 이는 격자수가 많기 때문에 반 복횡수를 늘리면 수렴가능성을 보이고 있다.

4. 결 론

정상 및 비정상유동을 각각 해석한 결과 flux function의 특 성과 그에 적합한 제한자들을 비교 연구 수행하였다. 몇 몇의 flux function들을 제외하고는 대부분 비슷한 결과 값을 나타 냈다. 그 중에서 MLP계열의 제한자들은 다른 제한자들보다 기준점으로 잡은 fine grid solution의 결과와 가장 비슷한 형상 을 나타냈다.

후 기

본 논문은 인하대학교 교수연구진흥비(신진)의 지원을 받 았으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Woodward, P. and Colella, P., 1984, "The Numerical Simulation of Two-dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Computational Physics J.*, Vol.54, p.115-173.
- [2] Quirk, James, J., 1994, "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate ," *Numerical Methods In Fluids J.*, Vol.18, p.555-574.

- [3] Liou, M.S., 1997, "Probing Numerical Fluxes: Mass Flux, Positivity, and Entropy-Satisfying Property," *AIAA Paper.*, 2035, p.943-954.
- [4] Gressier, J. and Moschetta, J.M., 1997, "On the Pathological Behavior of Upwind Schemes," *AIAA Paper.*, 0110, p.1-8.
- [5] Kim, K.H. and Kim, C., 2005, "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows Part 1: Spatial discretization," *Computational Physics J.*, Vol.208 p.527-569.
- [6] Kim, K.H. and Kim, C., 2005, "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows Part 1: Multi-dimensional limiting process," *Computational Physics J.*, Vol.208 p.570-615.