이중시간적분법을 이용한 순차적 유동해석 기법

김 종 태*[1], 탁 남 일[2], 김 상 백[1], 김 민 환[2], 이 원 재[2]

DELTA-FORMULATION OF A SEGREGATED NAVIER-STOKES SOLVER WITH A DUAL-TIME INTEGRATION

J. Kim*[1], N.I. Tack[2], S.B. Kim[1], M.H. Kim[2] and W.J. Lee[2]

The delta-formulation of the Navier-Stokes equations has been popularly used in the aerodynamics area. Implicit algorithm can be easily implemented in that by using Taylor series expansion. This formulation is extended for an unsteady analysis by using a dual-time integration. In the meanwhile, the incompressible flows with heat transfers which occur in the area of thermo-hydraulics have been solved by a segregated algorithm such as the SIMPLE method, where each equation is discretised by using an under-relaxed deferred correction method and solved sequentially. In this study, the dual-time delta formulation is implemented in the segregated Navier-Stokes solver which is based on the collocated cell-centerd scheme with un unstructured mesh FVM. The pressure correction equation is derived by the SIMPLE method. From this study, it was found that the Euler dual-time method in the delta formulation can be combined with the SIMPLE method.

Key words: 델타형(Delta-Form), 가상시간(Pseudo-Time), 이중시간전진법(dual-Time Marching), 비정상유동(Unsteady Flow), 음해법(Implicit Method)

1. 서 론

공기역학 분야에서는 지배방정식인 비정상 Navier -Stokes 방정식의 특성을 고려하여 시간전진기법을 많이 사용하여 왔다.[1] Runge-Kutta 법[2]과 같은 양해법은 적용하기 쉬우며, Euler 후향차분법[3]과 같은 음해법은 수렴안정성을 높여 수렴특성을 좋게 할 수 있다. 이와 같이 비정상항을 고려하여 지배방정식을 이산화하는 시간전진기법은 델타형(delta-form)으로 산술방정식을 구성하게 되며, 각 시간 단계에서 종속변수의 변화량(Δ)을 구하여 해를 개선해 나간다. 특히 음해법은 양해법에 비하여 수렴안정성을 크게 개선할 수 있기 때문에 정상 및 비정상 유동 해석에 많이 사용되고 있다. 정상해를 구하는 경우 비정상항은 가상의 시간에 대한 변화량으로 고려되어 여전히 시간전진기법이 유효하게 사용된다. 공기역학에서 많이 사용되는 Euler 음해법은 시간항을 제외한 나머지 항 즉 잔차(residual)을 Taylor 수열 전개를 통한 선형화를 함으로써 시간에 대한 변화량과 함께 델타형(delta-form)으로 수식을 이산화한다. 이 방법의 특징은, 좌변은 종속변수의 변화량과 잔차의 도함수(여기서는 자코비안)로 이루어진 계수의 곱으로 표현되고 우변은 이산화된 지배방정식의 잔차를 그대로 포함하고 있다. 해의 정확도는 우변의 이산화기법에 의해 지배를 받으며, 해의 수렴 특성은 좌변에 포함된 계수들에 의하여 영향을 받는다. 보통, 좌변은 이웃 제어체적간의 연결성을 단순화하기 위하여 1차의 정확도를 가지도록 이산화하는 반면, 우변은 해의 정확도를 높이기 위하여 고차의 이산화기법을 사용한다. Euler 음해법에서도 국소시간과 같은 수렴가속 기법을 사용하여 수렴속도를 향상시킬 수 있다. 그리고 시간항을 재배방정식에 더 첨가하여 이중시간전진법으로 비정상해를 구할 수 있다. 이와 같이 델타형으로 지배방정식을 이산화하는 방법은 좌변에 수렴기법이 적용되고 우변에서는 해의 정확도와 관련된 수치기법이 좌변과 독립적으로 적용될 수 있기 때문에 수식전개가 매우 명확하고, 또한 비정상해를 구하기 위해 이중시간전진법을 이용하여 수치 기법을 쉽게 확장할 수 있다.

1 정회원, 한국원자력연구소
2 한국원자력연구소
* Corresponding author E-mail: ex-kjt@kaeri.re.kr

한편 기계공학 분야의 열유동 해석에서는 SIMPLE 알고리즘에 기반한 순차적 해석기법이 많이 사용되고 있는데, 이 방법에서는 해의 정확도를 높이기 위하여 대류항과 확산항을 지연기법(deferred correction)으로 이산화하며, 또한 행렬식의 수렴특성을 개선하기 위하여 하향이완법을 사용하고 있다[4]. 본 연구에서는 공기역학에서 많이 사용되어온 델타형의 시간전진법을 SIMPLE 알고리즘에 도입하여 지배방정식을 선형화하였으며, 비정상해를 구하기 위하여 이중시간전진법을 사용하였다. 해석영역은 비정렬격자로 이산화하고 셀중심 유한체적법으로 이산화하였다.

2. 본 론

일반적으로 종속변수 ϕ에 대한 적분형 수송방정식은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\phi\, dV + \int \rho\phi\vec{v}\, d\vec{S} - \int \Gamma\nabla\phi\, d\vec{S} = \int q_\phi\, dV \tag{1}$$

여기서, ρ는 유체의 밀도, $\vec{v}$는 속도, Γ는 확산계수를 의미한다. 좌변의 첫째 항은 시간에 대한 변화량, 둘째 항은 대류항, 그리고 셋째 항은 확산항이며 우변은 체적에 따른 생성항을 나타낸다.

2.1 정상상태 해석을 위한 가상시간적분

정상상태 해를 구하기 위해서, t를 계산상의 시간 즉 가상시간 τ로 가정하여 Euler 내재적 방식을 이용한 시간적분을 하면 식 (1)은 식 (2)와 같이 표현된다.

$$\frac{\rho V}{\Delta\tau}\Delta\phi^m + \sum_f (C_f^{m+1} - D_f^{m+1})S_f = q_\phi V \tag{2}$$

식 (1)에서 면적적분으로 표현된 대류항과 확산항은 이산화된 제어체적의 각 면의 중심점에서 계산된 플럭스의 합으로 표현되며, 각 플럭스는 시간에 대하여 내재적인 방법으로 계산된다. 상첨자 m과 m+1은 이산화된 가상의 시간 τ를 따른 시간단계로, m은 현재 단계를 그리고 m+1은 예측 단계를 의미한다. 그리고 $\Delta\phi^m$은 ϕ의 변량(update)로서 $\Delta\phi^m = \phi^{m+1} - \phi^m$를 뜻한다. Euler 음해법을 이용한 델타형 구성은 시간 항을 제외한 모든 항을 Taylor 수열을 이용하여 1차 도함수와 그 변량의 형태로 시간에 대하여 선형화한다. m+1 단계에서 요구되는 제어체적의 각 면의 중심점에서의 대류 플럭스 C_f와 확산 플럭스 D_f는 식 (3)과 식 (4)에 의하여 변환된다.

$$C_f^{m+1} = (J_f\phi_f)^{m+1} = C_f^m + \frac{dC_f}{d\phi}\Delta\phi^m = C_f^m + \left(\frac{dC_f}{d\phi}\right)_i \Delta\phi_i^m + \left(\frac{dC_f}{d\phi}\right)_j \Delta\phi_j^m \tag{3}$$

$$D_f^{m+1} = D_f^m + \frac{dD_f}{d\phi}\Delta\phi^m = D_f^m + \left(\frac{dD_f}{d\phi}\right)_i \Delta\phi_i^m + \left(\frac{dD_f}{d\phi}\right)_j \Delta\phi_j^m \tag{4}$$

J_f는 그 면 f에서 정의되는 질량 유속(mass flux)이며, 하첨자 i,와 j는 면 f와 인접하고 있는 제어체적으로서 i는 왼쪽, j는 오른쪽의 제어체적을 의미한다.

$$\left[\frac{\rho_i V_i}{\Delta\tau} + \sum_f \left(\frac{dC_f}{d\phi} - \frac{dD_f}{d\phi}\right)_i S_f\right]\Delta\phi_i^m + \sum_f \left(\frac{dC_f}{d\phi} - \frac{dD_f}{d\phi}\right)_j S_f \Delta\phi_j^m = q_\phi V_i - \sum_f (C_f^m - D_f^m)S_f \tag{5}$$

식 (3), (4)를 식 (2)에 대입하여 첨자 i와, j에 따라 정리하면 제어체적 i에 대해서 가상 시간에 따라 적분된 델타 형태의 이산화식을 구할 수 있다. 식 (5)에서는 생성항이 시간에 대하여 선형화가 되어 있지 않지만, 필요에 따라서 선형화하여 식 (5)에 포함시킬 수 있다. 식 (5)에서 j 제어체적의 변량 $\Delta\phi_j^m$의 항은 제어체적 j에 대한 이산화식과 연결되어 전영역의 제어체적을 위한 매트릭스 형태의 산술 방정식이 구성된다. 식 (5)의 우변이 이산화된 정상상태 지배방정식과 일치하며 수치적으로 잔차(residual)을 의미한다. 식 (5)는 임의의 제어체적에 대하여 유도된 식으로 본 연구에서 사용된 비정렬격자의 셀-중심 차분법에도 적용된다. 식 (5)에서 좌변은 델타형 음해법의 수렴 안정성에 영향을 미치는 반면, 수렴 시에는 모든 셀에서 변량이 0이 되기 때문에 해의 정확도에는 영향을 미치지 않으며, 수렴해의 정확도는 오직 우변에만 지배를 받는다. 일반적으로, 식 (5)의 좌변은 1차 공간정확도를 가지도록 이산화를 하여 전체 산술방정식의 매트릭스 구성을 더욱 성기게 하여 컴퓨터 메모리를 효율적으로 사용하도록 하며, 우변은 정확도가 높은 수렴해를 구하기 위하여 고차의 공간정확도를 가지도록 이산화를 한다. 본 연구에서는 대류 플럭스를 2차의 상류차분 혹은 중심차분을 사용하여 구하고 확산 플럭스는 2차의 중심차분으로 얻는다.

$$C_f^{2U} = (J_f\phi_f)^{2U} = \max(J_f)\cdot(\phi + \nabla\phi\bullet d\vec{r})_i + \min(J_f)\cdot(\phi + \nabla\phi\bullet d\vec{r})_j \tag{6}$$

$$C_f^{2C} = (J_f\phi_f)^{2C} = J_f\cdot\frac{1}{2}\left[(\phi + \nabla\phi\bullet d\vec{r})_i + (\phi + \nabla\phi\bullet d\vec{r})_j\right] \tag{7}$$

$$D_f = \frac{\Gamma}{d\vec{s}\bullet\vec{n}}(\phi_j - \phi_i) + \Gamma\left[\overline{\nabla\phi}_f\bullet\vec{n} - \left(\overline{\nabla\phi}_f\bullet d\vec{s}\right)\frac{1}{d\vec{s}\bullet\vec{n}}\right] \tag{8}$$

$$\left(\frac{dC_f}{d\phi}\right)_i = \max(J_f), \quad \left(\frac{dC_f}{d\phi}\right)_j = \min(J_f) \tag{9}$$

$$\left(\frac{dD_f}{d\phi}\right)_i = -\frac{\Gamma}{d\vec{s}\cdot\hat{n}}, \quad \left(\frac{dD_f}{d\phi}\right)_j = \frac{\Gamma}{d\vec{s}\cdot\hat{n}} \tag{10}$$

식 (6)은 2차의 상류차분법을, 식 (7)은 중심차분법을 이용하여 대류 플럭스를 구하는 것으로, 비정렬격자의 특성을 고려하여 면 f에 이웃한 두 셀에서의 해의 구배를 이용한다. 확산 플럭스는 식 (8)과 같이 면 f에 인접한 두 셀 i와 j를 잇는 방향으로의 성분과 그 나머지 성분으로 분리하여 계산한다. C_f의 도함수는 식 (9)에서와 같이 1차 정확도의 상류차분 플럭스 식으로부터 구하며, D_f의 도함수는 식 (8)의 우변의 첫째 항인 주확산항만을 이용하여 구한다. 식 (11)을 이용하여 식 (5)의 좌변에 포함된 계수들을 A로 나타내면 식 (12)와 같은 형태의 산술방정식을 얻는다.

$$A_{\phi i} = \sum_f \left(\frac{dC_f}{d\phi} - \frac{dD_f}{d\phi}\right)_i S_f, \quad A_{\phi j} = \left(\frac{dC_f}{d\phi} - \frac{dD_f}{d\phi}\right)_j S_f \tag{11}$$

$$\left[\frac{\rho_i V_i}{\Delta\tau} + A_{\phi i}\right]\Delta\phi_i^m + \sum_j A_{\phi j}\Delta\phi_j^m = q_\phi V_i - \sum_f (C_f^m - D_f^m)S_f \tag{12}$$

가상시간 간격 $\Delta\tau$는 각 셀의 특성 길이와 그 셀에서의 확산과 대류의 특성 속도에 의하여 결정되며 그 크기는 잘 알려진 CFL 조건에 의하여 제한받는다.

$$\Delta\tau = CFL\frac{V}{\sum_f (\lambda_c + \lambda_d)S} = CFL\frac{\rho V}{A_{\phi i}} \tag{13}$$

식 (11)에서 보는 바와 $A_{\phi i}$는 이미 식 (13)의 셀 면에서의 특성 속도의 합과 같기 때문에 $A_{\phi i}$를 사용하여 $\Delta\tau$를 구할 수 있다. 일반적으로 SIMPLE 알고리즘에서 사용되는 하향이완계수 ω를 이용한 이산방정식과 식 (12)를 비교하면 $CFL = \omega/(1-\omega)$임을 알 수 있다. 이 식으로부터 ω가 1의 값을 갖는 경우가 CFL로는 무한대의 값을 의미함을 알 수 있다.

2.2 비정상상태 해석을 위한 이중시간적분

정상상태 해를 구하기 위하여 가상시간 전진법을 이용한 경우 이중시간 전진법을 이용하면 쉽게 비정상 상태 해를 구할 수 있다. 실시간에 대한 해의 변화량을 나타내는 비정정상을 n+1 단계를 기준으로 2차의 후향차분으로 이산화하여 ϕ의 변량을 포함하는 항과 나머지 항으로 분리하면 식 (14)와 같이 표현되고, 이 식을 정상상태 해를 위한 이산화식 (12)에 대입하면 식(15)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\phi\, dV = \frac{3\rho_i V}{2\Delta t}\Delta\phi_i^{n+1,m} + \frac{\rho_i V}{2\Delta t}\left(3\phi^{n+1,m} - 4\phi^n + \phi^{n-1}\right) \tag{14}$$

$$\left[\frac{3\rho_i V}{2\Delta t} + \frac{\rho_i V_i}{\Delta\tau} + A_{\phi i}\right]\Delta\phi_i^{n+1,m} + \sum_j A_{\phi j}\Delta\phi_j^{n+1,m} = q_\phi^{n+1,m}V_i - \sum_f (C_f^{n+1,m} - D_f^{n+1,m})S_f - \frac{\rho_i V}{2\Delta t}\left(3\phi^{n+1,m} - 4\phi^n + \phi^{n-1}\right) \tag{15}$$

최종적으로 모든 셀에 대하여 식 (15)를 구하여 묶으면 식 (16)과 같이 델타 형태의 산술방정식이 얻어진다.

$$a_\phi\Delta\phi_i + \sum_j a_{\phi j}\Delta\phi_j = S_\phi \tag{16}$$

정상상태의 해를 구하는 경우 실시간 간격인 Δt는 무한대의 값을 가지므로 식 (15)는 식 (12)로 환원된다. 비정상상태의 해를 구하는 경우에는 각 시간 단계 내에서 가상시간을 따라 시간적분을 하여 수렴해를 구하면 실시간의 다음 단계로 넘어가면서 실시간에 대한 시간 전진이 가능하게 된다.

2.3 압력장 해석

운동량방정식에 포함된 압력항에 대해서는 이미 알고 있는 값을 사용하기 때문에 압력항은 생성항처럼 처리되며, 압력장은 연속방정식으로부터 구해진다. 압력과 속도를 모두 셀 중심에 저장하는 비엇갈림 방식은 본 연구에서와 같이 비정렬격자 기법에서는 매우 효율적인 방법으로 알려져 있으며, 비엇갈림에 의해 발생되는 압력장의 진동 즉 checker-board 현상은 Rhie-Chow의 압력가중내삽법으로 제거될 수 있다. 셀의 면에서 대류 플럭스를 구하기 위하여 요구되는 셀 면에서의 속도는 식 (17)과 같이 구해진다. 식 (17)의 우변의 첫 번째 항은 운동량방정식에서 구해진 속도를 거리가중 내삽한 것이며 두 번째 항은 셀 중심에서 구한 압력구배의 평균값에 대한 셀 면에서 구한 압력구배의 차이로서 압력감쇠항의 역할을 한다.

$$u_f^* = [w_j u_i^* + (1-w_j)u_j^*] + \left(\frac{V}{a_n}\right)_f\left[\left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)_f - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)_f\right] \tag{17}$$

속도 u에 붙은 상첨자 *는 가정된 압력장으로부터 구해진 속도를 의미하며 연속방정식을 만족시키기 위하여 압력수정방정식으로부터 얻어진 보정 속도를 이용하여 수정하여야한다. 압력수정방정식은 하양이완 방식의 SIMPLE 혹은

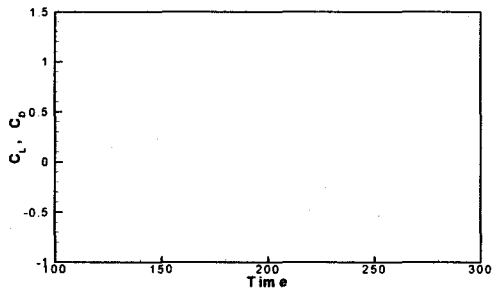

Fig. 1 Time-histories of the drag and lift coefficients for the 3-D cylinder flow at Re_D = 300

SIMPLEC와 동일한 방법으로 얻을 수 있다.

3. 검증 계산

3차원 실린더 주위의 비정상 층류 유동

실린더 주위의 유동은 Reynolds수에 따라 다양한 유동특성을 보이기 때문에 오랫동안 수치계산이나 실험의 대상이 되어 왔다. 특히 Reynolds수가 180을 넘어서면서 실린더 주위의 유동은 3차원적 유동 특성을 보이는 것으로 알려졌으며, 이 때문에 Reynolds수가 180보다 큰 경우에 3차원 유동 특성을 수치적으로 모사하기 위한 연구가 이루어져 왔다. 본 연구에서는 이중시간전진법으로 만들어진 수치해석 코드를 검증하기 위하여 ReD = 300에서 실린더 주위의 비정상 3차원 유동을 계산하였다. 유동의 3차원 특성으로 인하여 수치 결과는 실린더 길이에 영향을 받기 때문에 이를 극복 위하여 길이 방향으로 주기조건을 사용하였다. 이 계산에서는 실린더 길이를 참고문헌[5]에 제시된 πD로 하였으며, 외부 경계는 실린더 직경의 40배로 하고 실린더 후류 쪽으로 매우 조밀한 격자를 사용하였다. 사용한 격자는 약 150만개의 프리즘과 육면체 셀로 구성되었으며, 계산은 KISTI의 리눅스 병렬 클러스터의 16 노드를 사용하여 수행하였다.

동일한 Reynolds수에서 2차원으로 계산하는 경우에는 항력 및 양력 계수가 안정적이고 주기적인 변화를 볼 수 있으나, Fig. 1에서 보는 바와 같이 3차원 계산에서는 주기성을 보이면서도 그 진폭이 불안정하게 변화하는 것을 알 수 있다.

특히 항력계수의 진폭이 계속 변하는 것은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 2차원 계산에서는 볼 수 없었던 와도의 생성에 기인하는 것으로 판단된다.

Fig. 3는 실린더 단면에서 유동방향의 와도 구조를 나타낸 것으로, 잘 알려진 실린더 후류의 Karman 와류를 파악할 수 있다. 특히 알루미늄 조각으로 가시화한 그림 그리고 Noack 등의 DNS 결과와 비교하여 계산 결과가 비슷함을 알 수 있다.

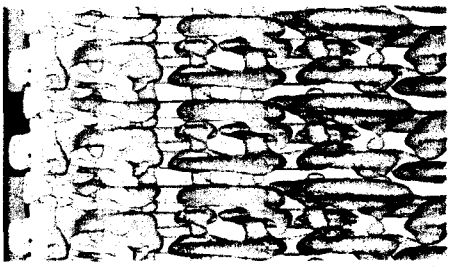

Fig. 2 Iso-surface of x-virticity, ω_x = 0.15

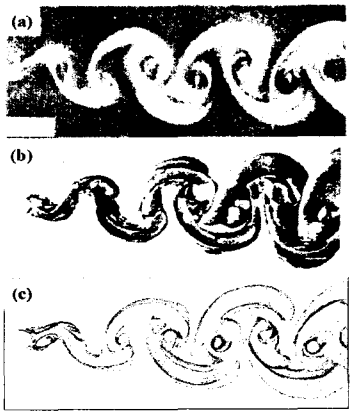

Fig. 3 Vortical flow behind a cylinder, (a) experimental visualization, (b) DNS result by Noack, (c) current results

5. 결 론

본 연구에서는 델타형의 시간전진법을 SIMPLE 알고리즘에 도입하여 지배방정식을 선형화하였으며, 비정상해를 구하기 위하여 이중시간전진법을 사용하였다. 정상 및 비정상 유동에 대한 본 수치기법의 검증을 통하여, 본 수치기법이 SIMPLE 알고리즘에서도 유효한 방법 중의 하나가 될 수 있으며, 특히 이산화방정식의 좌변과 우변이 서로 독립적으로 수치기법을 적용할 수 있으므로 코드의 유지 보수 측면에서 유리할 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 과학기술부의 원자력연구개발 중장기 사업 일환으로 수행되었습니다.

참고문헌

[1] Steger, J.L. and Warming, R.F., 1979, *NASA TM-78605*

[2] Jameson, S.L. et al., 1981, *AIAA Paper, 81-1259*

[3] Rogers, S.E., 1989, *Ph.D. thesis*, Stanford Univ.

[4] Ferziger, J.H, Peric, M., 1996, Computation Methods for Fluid Dynamics, *Springer*

[5] Williamson, C.H.K., 1996, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 28, p. 477-539