

**지진해일 전파모의를 위한 선형 천수방정식을 이용한  
실용적인 분산보정기법**  
**Practical Dispersion-Correction Scheme for Linear Shallow-Water  
Equations to Simulate the Propagation of Tsunamis**

조용식\*, 손대희\*\*, 하태민\*\*  
Yong-Sik Cho, Dae-Hee Sohn, Tae-Min Ha

---

**Abstract**

In this study, the new dispersion-correction terms are added to leap-frog finite difference scheme for the linear shallow-water equations with the purpose of considering the dispersion effects such as linear Boussinesq equations for the propagation of tsunamis. And, dispersion-correction factor is determined to mimic the frequency dispersion of the linear Boussinesq equations. The numerical model developed in this study is tested to the problem that initial free surface displacement is a Gaussian hump over a constant water depth, and the results from the numerical model are compared with analytical solutions. The results by present numerical model are accurate in comparison with the past models.

*Key words:* tsunami, linear shallow-water equations, linear Boussinesq equation, dispersion effects, leap-frog finite difference scheme

---

## 1. 서 론

지진해일이 먼 거리를 전파할 때 분산효과와 Coriolis 효과가 중요한 역할을 한다(Kajiura와 Shuto, 1990). 지진해일은 진원지로부터 대양을 가로질러 이동할 수 있기 때문에 경우에 따라서는 지구의 곡률을 고려한 구좌표계를 사용해야 하며, 지진해일의 진행거리가 짧을 경우에는 직교좌표만을 이용할 수도 있다(Liu 등, 1995). 동해에서의 지진해일은 진행 거리가 상대적으로 짧아 직교좌표를 이용하는 것이 가능하며, Coriolis 효과를 무시할 수 있다. 우리나라의 경우 일본의 서해안에서 발생한 지진해일의 전파과정을 정확히 예측하는 것이 필요하며, 먼 거리를 전파하는 경우 상대적으로 분산효과가 중요시 되므로 분산효과를 정확히 고려할 수 있는 수치모형이 필요하다.

Cho와 Yoon(1998)은 선형 천수방정식을 leap-frog 기법으로 차분하여 일정한 수심에서 수치적인 분산오차가 Boussinesq 방정식의 물리적인 분산항을 대체하도록 수심, 격자간격 및 계산 시간간격 사이의 관계식을 유도하였다. 그러나, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식은 유한차분식이 Boussinesq 방정식의 분산항과 일치하는 수치분산을 생성하도록 격자간격과 계산 시간간격을 결정하여야 하기 때문에 실제 지형과 같이 수심이 변하는 지형에서 수심이 변하는 경우마다 격자간격과 계산 시간간격을 변화시켜야만 하는 문제가 발생하였다. 본 연구에서는 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 leap-frog 유한차분기법의 분산보정항을 수정하여 수심이 변하는 경우 격자간격과 계산 시간간격을 변화시키지 않으면서도 Boussinesq 방정식의 분산항과 일치하는 수치분산을 생성하도록 하여 실제 지형에 적용이 가능하도록 하였다.

---

\* 정회원.한양대학교 토목공학과 교수E-mail : [ysc59@hanyang.ac.kr](mailto:ysc59@hanyang.ac.kr)

\*\* 정회원.한양대학교 토목공학과 석사과정

## 2. 지배방정식

일본 서해에서 발생하여 우리나라 동해안에 영향을 주는 지진해일과 같이 비교적 먼 거리를 전파하는 원해 지진해일(offshore tsunami)을 모의하기 위해서는 선형 Boussinesq 방정식을 지배방정식으로 사용하는 것이 바람직하다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \quad (3)$$

여기서,  $\zeta$ 는 자유수면변위,  $P$ 와  $Q$ 는 각각  $P = uh$  및  $Q = vh$ 로 정의되는  $x$ 와  $y$ 축 방향의 체적흐름을 (volume flux),  $h$ 는 정수면상의 수심이다. 식 (1)-(3)에서  $P$ 와  $Q$ 를 소거하여 다음과 같은 선형 Boussinesq 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = \frac{gh^3}{3} \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \quad (4)$$

본 연구에서는 수정기법(modified scheme)을 이용하기 위해 식 (2)-(3)의 오른쪽항, 즉 분산항을 생략한 다음과 같은 선형 천수방정식을 지배방정식으로 사용한다(Cho와 Yoon, 1998).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Immamura와 Goto(1988)는 식 (5)-(7)을 leap-frog 유한차분기법을 이용하여 staggered 격자계를 기준으로 차분화하였다. 본 연구에서는 Immamura와 Goto(1988)가 제안한 차분식에 분산보정항을 추가하여 식 (5)-(7)을 다음과 같이 차분화하였다.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j+1/2}^n - Q_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i+1/2,j}^{n+1} - P_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + gh_{i+1/2,j} \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ & + \frac{\alpha g}{12\Delta x} h_{i+1/2,j} [\zeta_{i+2,j}^{n+1/2} - 3\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}] \\ & + \frac{\gamma g}{12\Delta x} h_{i+1/2,j} [(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + \zeta_{i+1,j-1}^{n+1/2}) - (\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i,j-1}^{n+1/2})] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i,j+1/2}^{n+1} - Q_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + gh_{i,j+1/2} \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \\ & + \frac{\alpha g}{12\Delta y} h_{i,j+1/2} [\zeta_{i,j+2}^{n+1/2} - 3\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2}] \\ & + \frac{\gamma g}{12\Delta y} h_{i,j+1/2} [(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j+1}^{n+1/2}) - (\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j}^{n+1/2})] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)-(10)의 차분식에서 사용된 staggered 격자계에서는  $\zeta$ 는 격자  $(i, j)$ , 체적흐름을  $P$ 와  $Q$ 는 각각

( $i + 1/2, j$ )와 ( $i, j + 1/2$ )에서 정의되었다. 아울러, 시간격자에 대해서도 staggered 격자계를 사용하였다. 참고로, 식 (8)-(10)에서 분산보정계수  $\alpha$ 와  $\gamma$ 를 각각 0과 1로 정하면, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법과 같게 된다.

식 (8)-(10)의 모든 항을 Taylor 급수를 이용하여 기준 격자점 ( $i, j, n$ )에 대하여 전개한 후  $P$ 와  $Q$ 를 소거하면 다음과 같은  $\zeta$ 에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - C_0^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} (1 + \alpha - C_r^2) \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \\ + (1 + \alpha - \gamma) C_0^2 \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} = O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2 \Delta t, \Delta x (\Delta t)^2, (\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 유도과정에서  $\Delta x = \Delta y$ 가 사용되었으며,  $C_0 (= \sqrt{gh})$ 와  $C_r (= C_0 \Delta t / \Delta x)$ 은 각각 장파의 전파속도와 Courant 수를 나타낸다.

식 (11)을 식 (4)의 선형 Boussinesq 방정식과 같아지도록 분산보정계수  $\alpha$ 와  $\gamma$ 를 결정하면 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{[4h^2 + gh(\Delta t)^2] - (\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} \quad (12)$$

$$\gamma = \alpha + 1 \quad (13)$$

Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법( $\alpha = 0$ )의 경우 식 (4)의 선형 Boussinesq 방정식과 같아지기 위해서는 다음과 같은 관계식을 만족해야 한다.

$$(\Delta x)^2 = 4h^2 + gh(\Delta t)^2 \quad (14)$$

식 (12)와 (13)은 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식 (14)의 경우와 다르게 수심이 변하는 경우, 격자간격과 계산 시간간격 대신 분산보정계수  $\alpha$ 와  $\gamma$ 를 변화시켜 식 (11)이 식 (4)와 일치하도록 할 수 있다.

### 3. 수치모형의 검증

본 연구에서 제안한 기법의 정확성을 검증하기 위해서, 가장 진원에 의해 발생된 초기 자유수면 변위가 Gauss 분포를 가지는 지진해일의 전파에 대하여 수치모형을 수행하였다. 그리고 모의 결과를 Carrier(1991)가 구한 선형 Boussinesq 방정식의 해석해와 비교하였다.

초기의 Gauss 분포의 형태를 갖는 초기 수면변위는 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta(r, 0) = 2 e^{-(r/a)^2} \quad (15)$$

여기서,  $a$ 는 Gauss 분포의 반지름이고  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 은 중심으로부터의 거리를 나타낸다.

Carrier(1991)는 선형 Boussinesq 방정식을 풀어서 Gauss 분포의 초기 자유수면 변위에 대한 해석해를 구하였다.

$$\zeta(r, t) = \int_0^\infty a^2 k e^{-(ak)^2/4} \cos\left(\frac{\sqrt{gh}kt}{\sqrt{1+(kh)^2/3}}\right) J_0(kr) dk \quad (16)$$

여기서,  $J_0$ 는 0차 제1종 Bessel 함수이다. 단순화를 위해 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$h' = \frac{1}{a} h, \quad \zeta' = \frac{1}{a} \zeta, \quad (x, y)' = \frac{1}{a} (x, y), \quad k' = ak, \quad t' = \frac{1}{a} (gh)^{1/2} t \quad (17)$$

식 (17)을 식 (16)에 대입하면, 식 (16)은 다음과 같이 무차원화된 형태로 표현된다.

$$\zeta(r, t) = \int_0^\infty k' e^{-(k')^2/4} \cos\left(\frac{k't'}{\sqrt{1+(k'h)^2/3}}\right) J_0(k'r) dk' \quad (18)$$

여기서, '기호는 변수가 무차원화 되었다는 것을 나타낸다. 편리함을 위해 여기서부터는 '기호를 생략하기로 한다.

실제지형과 같이 수심이 변하는 지형에 대해서는 선형 Boussinesq 방정식의 해석해가 존재하지 않으므로, 여

기서는 몇 가지 다른 수심 조건에 대해서 수치모의를 수행한다. 이때, 수심 조건들은 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식 (14)가 만족되지 않는 경우에 해당하는 것으로 하며, 모의 결과는 Carrier(1991)가 제안한 해석해와 비교하였다. 그림 1과 그림 2에서는  $h=0.1$ , 정사각형 격자( $\Delta x=\Delta y=0.3$ ), 무차원 계산 시간간격  $\Delta t=0.1$  를 적용하였으며 이 조건은 다음과 같은 무차원식을 만족한다.

$$(\Delta x)^2 < 4h^2 + (\Delta t)^2 \quad (19)$$

그림 1과 그림 2는  $t=50$  일 때의 수위변화를 나타낸 것으로, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법과 본 연구에서 제안한 기법을 적용하여 얻은 수치해와 Carrier가 제안한 해석해를 비교하여 나타내었다. 그림에서 살펴볼 수 있는 것처럼 본 연구에서 제안한 기법은 해석해와 비교하였을 때, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법에 비해 더 높은 정확도를 제공하는 것을 확인할 수 있다.

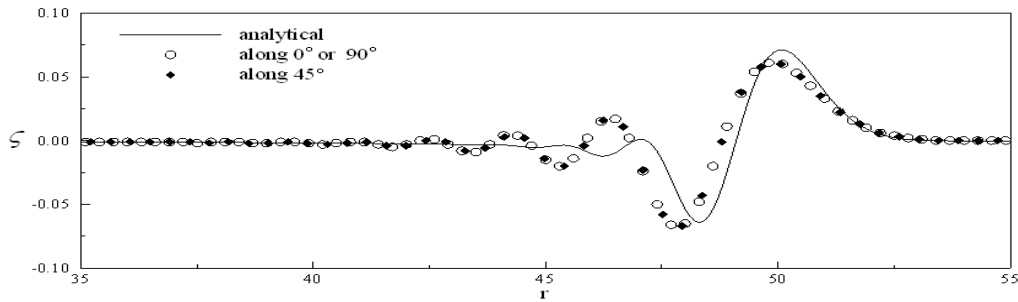


그림 1. Cho와 Yoon's scheme의 결과 ( $h=0.1$ )

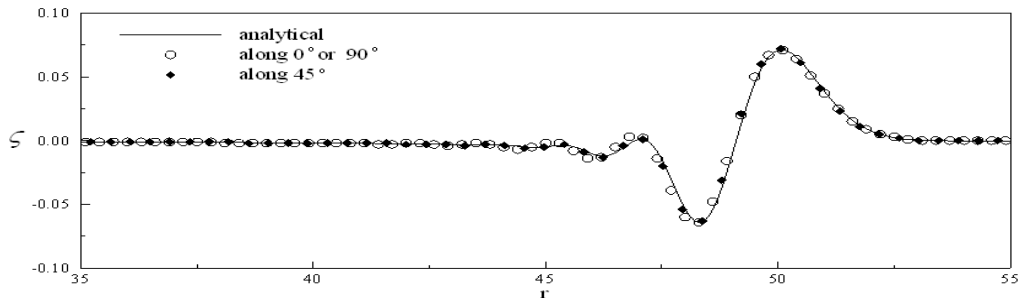


그림 2. Proposed scheme의 결과 ( $h=0.1$ )

그림 3과 그림 4는  $h=0.2$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.3$ ,  $\Delta t=0.1$  과 같은 조건들을 이용한 결과를 표현한 것으로, 이 조건들은 그림 1과 그림 2의 조건에 비해 수심 조건만을 다르게 정의한 것이다. 사용된 조건들은 다음의 무차원식을 만족한다.

$$(\Delta x)^2 > 4h^2 + (\Delta t)^2 \quad (20)$$

그림 3과 그림 4는 본 연구에서 제안한 기법이 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법에 비해 더 정확한 결과를 제공한다는 것을 나타내 준다. 즉, 본 연구에서 제안한 기법이 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식을 만족하지 않은 경우에 대해서도 높은 정확도의 수치해를 제공한다는 것을 확인할 수 있었다.

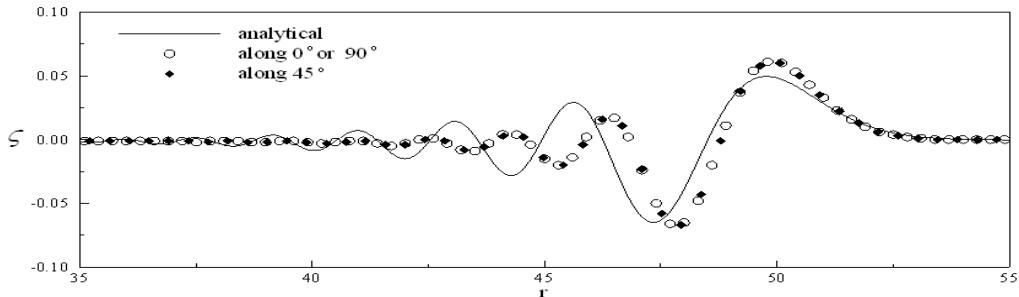


그림 3. Cho와 Yoon's scheme의 결과 ( $h=0.2$ )

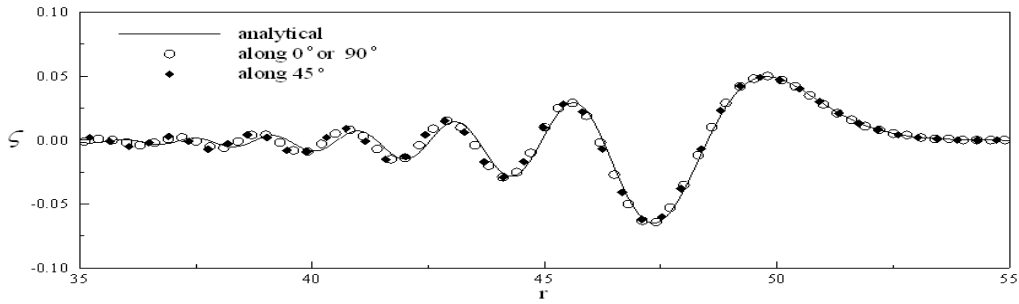


그림 4. Proposed scheme의 결과 ( $h=0.2$ )

#### 4. 결 론

본 연구에서는 일본 근해에서 발생하여 동해안을 전파하는 지진해일을 모의하기 위하여 기존의 수치모형에서 분산효과를 실질적으로 반영하지 못하는 점을 수정할 수 있는 기법을 제안하였다. Cho와 Yoon(1998)은 선형 천수방정식과 leap-frog 기법을 이용한 기존의 기법에 몇 개의 항을 추가하여 차분화 과정에서 발생하는 수치 분산항을 선형 Boussinesq 방정식의 물리적 분산항과 같도록 할 수 있는 조건을 제안하였다. 그러나 격자크기와 계산 시간간격, 수심이 유도된 조건을 만족하는 경우에만 분산효과를 적절히 고려할 수 있어, 수심이 변하는 지형에서는 일정한 격자크기와 계산 시간간격을 이용할 수 없는 단점이 있었다. 그러나, 본 연구에서 제안한 기법은 수심이 변하는 경우에 대해서도 균일 격자를 이용할 수 있었으며, Gauss 분포 형태의 초기 수면변위를 갖는 문제에 적용하여 검토하였다. 따라서, 본 연구에서 제안한 기법은 실질적으로 원해 지진해일의 전파에 적용이 가능할 것으로 판단되며, 특히 수심이 완만히 변하는 경우에 좋은 결과를 나타낼 수 있을 것으로 생각된다. 또한, 제안한 기법은 기본적으로 기존의 원해 지진해일의 전파 모형에 많이 사용되던 선형 천수방정식을 지배방정식으로 하고 있어 기존의 수치모형에 적용이 간단한 장점이 있다.

#### 감 사 의 글

본 논문은 2005년도 한국학술진흥재단의 지원에 의해서 수행되었습니다(KRF 2005-041-D00812).

#### 참 고 문 헌

1. Carrier, G.F. (1991). "Tsunami propagation from a finite source." Proc. of 2nd Tsunami Workshop, NGDC, Hawaii, USA, pp. 101-115.
2. Cho, Y.-S. and Yoon, S.-B. (1998). "A modified leap-frog scheme for linear shallow-water equations." Coastal Engineering Journal, Vol. 40, No. 2, pp. 191-205.
3. Imamura, F. and Goto, C. (1988). "Truncation error in numerical tsunami simulation by the finite difference method." Coastal Engineering in Japan, Vol. 31, pp. 245-263.
4. Kajiura, K. and Shuto, N. (1990). "Tsunami." in The SEA, edited by B. Le Mehaute, and D.M. Hanes, John Wiley & Sons, Inc, Vol. 9, Part B, pp. 395-420.
5. Lapidus, L. and Pinder, G.F. (1982). Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley & Sons, USA.
6. Liu, P.L.-F., Cho, Y.-S., Yoon, S.-B. and Seo, S.-N. (1995). "Numerical simulation of the 1960 Chilean tsunami propagation and inundation at Hilo, Hawaii." in Recent Development in Tsunami Research, edited by M.I. ElSabh, Kluwer Academic Publishers.