적응적 요소망을 이용한 흐름의 유한요소 해석

Finite Element Analysis of Flow by Adaptive Meshing Technique

장형상*, **김유진****, **고태진*****, **김도헌******

Hyung Sang Jang, Eugene Kim, Tae Jin Goh, Do Hun Kim

요 지

유한요소법으로 공학적 문제를 해결할 때에는 적절한 모델링을 통하여 가장 빠르고 정확한 해를 얻도록 해야 한다. 유체 흐름의 기본 변수인 속도는 그 공간 도함수가 요소간에 불연속을 이루게 된다. 속도의 공간 도함수는 기본적으로 유체에서의 응력, 압력, 및 와도 등과 밀접한 관련이 있다. 또한 이러한 요소간의 속도의 공간 도함수에서 발생하는 불연속의 크기는 요소망이 세분화되어 감에 따라 감소하면서 정확한 해에 수렴하게 된다. 즉 속도의 공간 도함수를 대상으로 오차에 정도를 판단하는 것이 기존의 유한요소 모델의 타당성을 판단하는 기준으로 적합함을 알 수 있다.

핵심용어 : 유한요소법, 유선상류화, Petrov-Galerkin, 적응적 요소망, 후처리 오차평가기법

1. 서 론

흐름의 유한요소 해석에 대한 유한요소 정식화에서 대류항이 비대칭이고 비선형이다. 위에서 언급한 바와 같이, 실제로 해를 구하여보면 절점 간에 진동현상이 발생한다. 이러한 Wiggle은 대류가 지배적인 물리현상에서 자주 나타나며, 이러한 진동을 제거하기 위해 요소망을 세분화하여 대류가 더 이상 요소 내부의 거동에서 지배적이지 않게 하여야 한다. 그러나 요소망을 극단적으로 세분화하는 것은 많은 계산 시간을 요하게 된다. 따라서 세분화 과정 없이 진동을 억제하는 방법이 필요하다. Galerkin 유한요소 정식화에서는 형상함수를 가중함수로 이용한다. 이 형상함수는 중앙차분적 성격을 띠고 있는데, 이 경우 차분법에 의한 해석에서와 같이 유동의 속도가 증가함에 따라 대류항에 기인하는 해의 불안정성이 증폭된다. 그러나 이러한 해의 진동은 대류항에 상류화를 사용하여 제거될 수 있으며, 본 연구에서는 유선 상류화 기법으로 Petrov-Galerkin 형태의 가중함수를 이용하여 흐름해석을 수행하였다.

2. 유한요소의 정식화

완전한 Navier-Stokes 방정식은 관성력, 압력, 점성력의 균형을 완전히 표한하고, 이 경우에 유체역학에서 흥미 있는 대부분의 문제를 풀 수 있다. 그러나 이러한 형태는 매우 풀기 어려운 편미

* 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 대리 · E-mail : hsjang@websolus.co.kr
** 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 차장 · E-mail : icepc@websolus.co.kr
*** 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 대리 · E-mail : tjgoh@websolus.co.kr
**** 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 대리 · E-mail : dhkim@websolus.co.kr

분방정식이다. 비정상 유동의 문제를 푸는 방법은 안정성과 수렴성을 증가시키기 위하여 다각적으로 모색되어 왔다. Navier-Stokes 방정식으로 질량 보존 방정식과 모멘텀 방정식으로 구성되어 있다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\
&\rho\frac{du}{dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\
&\rho\frac{dv}{dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 u와 v는 x, y방향의 속도성분이고 p는 압력항이며 ρ는 유체의 밀도, μ는 점성계수이다. 전통적인 Galerkin 방법에 의해 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$
[M]\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{p}\end{Bmatrix}+[C(u_n,v_n)]\begin{Bmatrix}u\\ v\\ p\end{Bmatrix}+[K]\begin{Bmatrix}u\\ v\\ p\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_u\\ R_v\\ 0\end{Bmatrix}
\tag{2}
$$

$[M]$은 질량행렬이고 $[C(u_n,v_n)]$은 대류행렬이라 부르며 $[K]$는 점성행렬이다. 대류항은 비선형항이다. 압력을 기본변수로부터 소거시키기 위해 penalty 정식화를 도입하면 질량보존 방정식을 penalty 상수 λ와 함께 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$
P=-\lambda\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right\}
\tag{3}
$$

결과적으로 얻게 되는 식은 아래와 같이 속도항으로 표시되는 행렬식이다.

$$
\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2K_{11}+K_{22} & K_{12}\\ K_{21} & K_{11+2K_{22}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}[L_{11}] & [L_{12}]\\ [L_{12}]^T & [L_{22}]\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_u\\ f_v\end{Bmatrix}
\tag{4}
$$

여기서,

$$
\begin{aligned}
&M=\int_\Omega \rho\{N\}[N]d\Omega \\
&C=\int_\Omega\left(u\{N\}\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]+v\{N\}\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]\right)d\Omega \\
&K_{ab}=\int_\Omega \mu\left\{\frac{\partial N}{\partial x_b}\right\}\left[\frac{\partial N}{\partial x_a}\right]d\Omega \\
&L_{ab}=\int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial x_b}\right\}\left[\frac{\partial N}{\partial x_a}\right]d\Omega
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Galerkin 유한요소 정식화는 차분법의 관점으로 볼 때에는 중앙차분법으로 알려져 있다. 사실상 해의 진동현상이 중앙차분법의 해를 구하는데 있어서 많은 문제점으로 발생하고 있다. 이러한 해의 불안정성을 제거하기 위하여 상류화 기법을 적용하였다. 본 연구에서는 상류화 기법 중 널리

사용되고 있는 적분점의 위치를 이동하여 유체의 흐름방향에 따라 상류화 함으로써 흐름에 직각 방향에서 일어나는 해의 소산효과를 최소화시켰다.

$$\begin{aligned} & u_\xi = e_\xi^T u(0) & & u_\eta = e_\eta^T u(0) \\ & \alpha_\xi = \rho u_\xi h_\xi / 2\mu & & \alpha_\eta = \rho u_\eta h_\eta / 2\mu \\ & \tilde{\xi} = \coth \alpha_\xi - 1/\alpha_\xi & & \tilde{\eta} = \coth \alpha_\eta - 1/\alpha_\eta \end{aligned} \tag{6}$$

3. Advancing front 기법을 이용한 유한 요소망 생성

Advancing front 기법의 기본적인 개념은 그림 2와 같다. 다각형으로 구성된 경계를 선분으로 분할하며, 이 세그먼트들이 초기의 front가 된다. Front를 기본 면으로 하여 삼각망을 구성하고, front를 다음 front로 진행하여 이동한다. 다각형의 경계와 내부에 생성되는 새로운 경계의 모든 front가 없어지게 되면 요소망 생성의 과정이 완료된다. 위의 기본적인 개념은 간단해 보이지만 세부적인 알고리즘의 구현은 매우 복잡하다.

영역의 경계를 분할할 때, 요구되는 요소의 크기 또는 요소 크기 파라미터(δ)는 항상 세그먼트의 중앙에서 계산되며, 그 식은 다음과 같다.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\| X - X_i \|} \right)^2 d_i}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\| X - X_i \|} \right)^2} \tag{7}$$

여기서, d는 X의 위치에서 계산되는 요소의 길이이고, d_i는 X_i에서의 요소 길이이다. 새로운 요소를 생성하기 위해서 front를 선택할 때 가장 작은 길이의 요소를 선택하며, 그 이유는 요소망의 크기가 변하는 적응적 요소망 생성 시, 작은 요소부터 생성하게 되어 보다 우수한 요소망을 형성하게 되며, 큰 요소부터 생성했을 경우 마지막에 작은 요소들이 밀집되는 현상을 없앨 수 있다. 요소를 생성하기 위한 절점 설정 기법은 위의 그림에서 보는바와 같이 기본 세그먼트에 직교하는 방향으로 연속된 절점을 생성한다. 그림 1와 같이 일련의 절점을 생성하여 저장하는 이유는 근접 절점의 검색 시 보다 빠르게 검색할 수 있게 하기위해서 이다. 절점의 선택 알고리즘에서 우선 모든 근접 절점에 대해서 검사를 하여, 생성될 삼각요소가 다른 경계와 교차되지 않도록 절점을 선택한다.

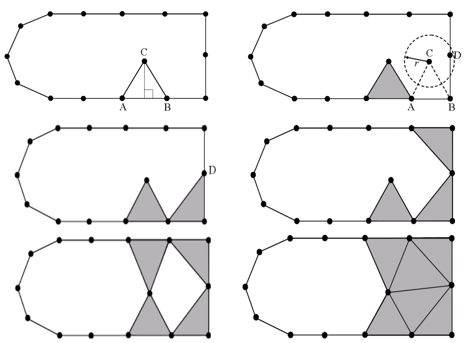

그림 1 Advancing front 기법

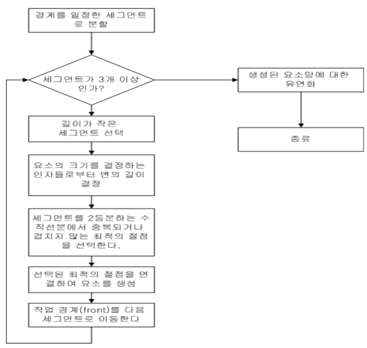

그림 2 Advancing front 기법의 흐름도

4. 오차의 평가

기존의 요소망을 세분화하는 기법으로는 요소 수를 고정한 상태로 절점의 위치를 움직여 최적의 상태로 변화시키는 r법, 허용 한계 오차를 초과하는 요소에 대해 요소의 차수는 일정하게 고정시키고 요소의 크기 h를 줄여가는 방법, 오차가 큰 요소의 형상 함수 차수를 증가시키는 p법, 또는 이들을 혼합한 hp법 등으로 구분할 수 있다. 본 연구에서는 Zienkiewicz의 후처리 오차평가 기법(posteriori error estimate)을 적용하였다. 즉, 초기의 성긴 요소망을 이용한 해석결과로 부터 요소분할에 따른 오차를 평가하여 해석결과의 정확도를 높이기 위해 분할오차가 큰 요소에 대하여 h법을 이용한 자동 세분화를 수행하였다. 속도 경사의 L_2 놈(norm)은 아래와 같이 정의한다.

$$\|\nabla a^*\| = \left(\int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla u^* d\Omega \right)^{1/2} \tag{8}$$

여기서, 평활화된 속도 경사는 절점에서의 속도 $\overline{u_i}$와 형상함수를 이용하여 요소 내부에서 보간할 수 있다.

$$\nabla u^* = \sum_{i=1}^{n} N_i \nabla \overline{u_i} \tag{9}$$

평활화된 속도경사와 계산된 속도경사 사이의 오차는 다음 식을 이용하여 정의된다.

$$e_{\nabla u}^* = \nabla u^* - \nabla \overline{u} \tag{10}$$

오차에 대한 L_2 놈(norm)은 다음의 식과 같다

$$\|e^*\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u^* - \nabla \overline{u}) \cdot (\nabla u^* - \nabla \overline{u}) \right)^{1/2} \tag{11}$$

초기 요소분할상태로 유한요소해석을 수행하게 되면 위의 식들에 의하여 전체 계와 각 요소에 대한 분할오차를 구할 수 있다. 이를 이용하여 전체 계에 대한 오차척도를 다음 식같이 정의한다.

$$\eta = \frac{\|e^*\|}{\|\nabla a^*\|} \tag{12}$$

요소 세분법(h-method)의 알고리즘은 위의 상대오차 크기가 사용자가 지정하는 최대허용 상대오차 ($\overline{\eta}$)보다 작은 값이 되도록 요소를 세분하는 방법이다. 요소 세분 지수 ϕ_e는 다음과 같이 계산되며 ϕ_e를 통하여 새로운 요소의 크기를 결정하게 된다.

$$\phi_e = \frac{\sqrt{N}\|e^*\|_{local}}{\eta_a \|a^*\|} \tag{13}$$

여기서, $\| e \|_{local}$은 요소 세분 지수를 구하고자 하는 요소의 오차의 크기가 되며 η_a는 상대 오차율에 대한 허용 한계, N은 전체 요소의 개수이고, 새로운 요소의 크기는 다음의 식과 같다.

$$h_e^{\neq w} = h_e^{old} / \phi_e \tag{14}$$

5. 예 제

블록을 흘러가는 대칭류에 관하여 2차원 해석을 수행하였으며, 세분화 오차한계를 0.4를 이용하여 적응적 요소망을 생성하였다.

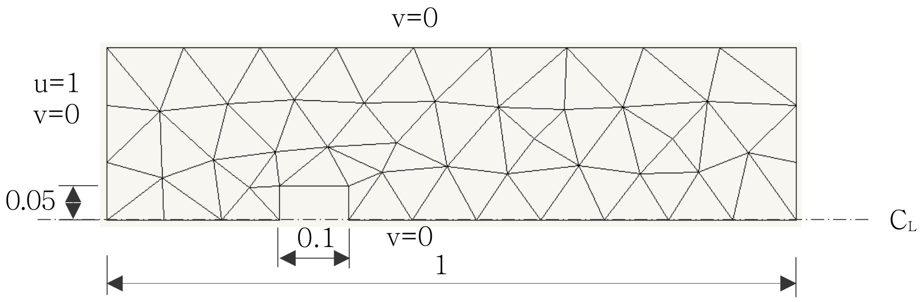

그림 3 블록 주변을 흐르는 대칭류 문제

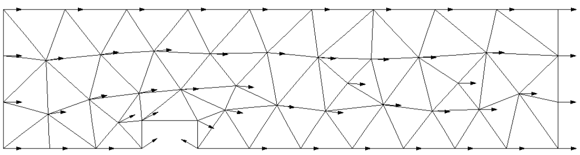

그림 4 성긴 요소망의 해석 결과

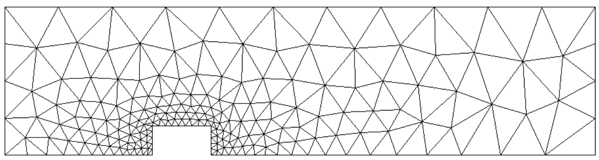

그림 5 세분화 오차 한계 0.1을 적용하여 생성한 요소망

6. 결 론

본 연구에서 유한요소 해석을 하고자 하는 흐름영역에 대한 해석 후 오차 평가를 실시하여, 오차 평가의 결과를 토대로 요소 크기 함수를 정의하여 적응적 요소망 생성을 수행하였다. 요소망 생성기로는 Advancing front 기법을 구현하여 요소 생성 및 재생성을 수행하였으며, 이러한 적응적 요소망을 통해서 균일 요소망에 비해 정확도와 효율면에서 우수한 요소망을 생성할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. (1982). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 42, 183-224.
2. O.C.Zienkiewicz and J.Z.Zhu, (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 24, 337-357