

## 크랙을 가진 유체유동 파이프의 안정성 해석

### Stability Analysis of Pipe Conveying Fluid with Crack

안태수\* · 손인수\*\* · 윤한익†

Tae-Su Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

**Key Words** : Flutter Instability(플러터 불안정), Pipe Conveying Fluid(유체이송 파이프), Stability(안정성), Open Crack(개구형크랙)

#### ABSTRACT

In this paper, a dynamic behavior(natural frequency) of a cracked simply supported pipe conveying fluid is presented. In addition, an analysis of the flutter and buckling instability of a cracked pipe conveying fluid due to the coupled mode (modes combined) is presented. Based on the Euler-Bernouli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. The stiffness of the spring depends on the crack severity and the geometry of the cracked section. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. This study will contribute to the safety test and stability estimation of structures of a cracked pipe conveying fluid.

#### 1. 서론

크랙과 같은 결함을 갖는 구조물은 동일한 하중이 작용하더라도 구조물의 자체 탄성에 의한 변형에너지 외에 크랙에 의해서 추가로 변형에너지가 존재하게 되고, 이 부가 에너지 만큼 변형이 더 발생한다. 구조손상의 하나인 이러한 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 또 파이프 속을 흐르는 유체는 파이프에 진동을 일으키는 원인이 되며, 유체의 속도가 어떤 임계값에 도달하면 그 진동이 불안정하여 파이프가 좌굴되기도 한다. 점성이 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중중동력으로 작용하며 진동해석에 중요한 인자가 된다. 따라서 유동유체를 갖는 파이프에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성을 파악하는 것은 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙

이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법<sup>(1)</sup>에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다<sup>(2)</sup>. 크랙과 중동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을 계산하는 연구결과들이 발표되고 있다<sup>(3,4)</sup>. 또, Liu<sup>(5)</sup> 등은 파이프 형태의 중공 축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였으며, 이동질량의 영향을 받는 유체유동 파이프의 진동특성에 대해서도 많은 연구결과가 발표되어지고 있다<sup>(6)</sup>.

이 연구에서는 단순지지 유체유동 파이프에 크랙이 존재할 때 유동유체가 파이프의 횡방향 고유진동수 및 좌굴/플러터 임계하중에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 특히 개구형 크랙이 단순지지 파이프의 연성모드에 의하여 발생하는 플러터 불안정에 미치는 영향에 대하여 상세히 연구하였다. 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙은 비진전 개구형 크랙(open crack)이라 가정하였다.

#### 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 예제해석을 위하여 가정한 크랙을

† 정회원, 동의대학교 기계공학부

E-mail : hiyoon@deu.ac.kr

Tel : (051)890-1645, Fax : (051)890-2232

\* 동의대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 동의대학교 기계공학부

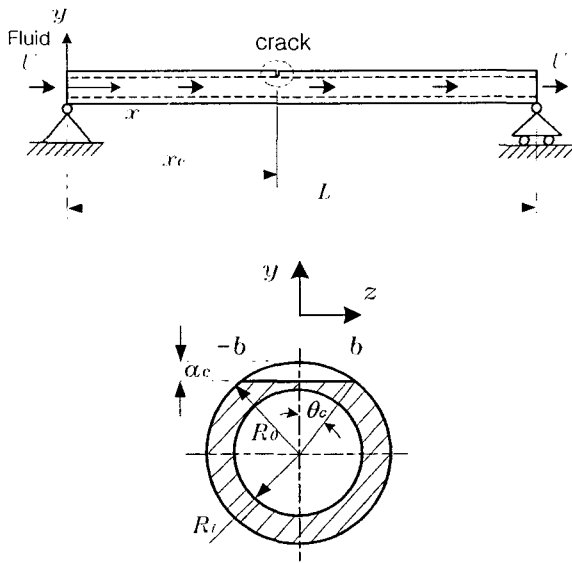


Fig.1 Geometry of cracked pipe conveying fluid and cross section of pipe

가진 유체유동 파이프의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서  $U$ 와  $L$ 은 각각 유체유동의 속도와 파이프의 전체 길이를 나타낸다. 또,  $x_c$ ,  $2b$ , 그리고  $\theta_c$ 는 각각 단순지지 파이프 상에 존재하는 크랙의 위치, 크랙의 횡방향 길이, 그리고 전체 크랙의 반각(half-angle)을 의미한다.

2.1. 크랙 모델링

탄형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유연행렬의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 다음과 같이 유연행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_{-b}^b \int_0^{a_c} J \, dy \, dz \right] \quad (1)$$

여기서  $P$ 는 각 방향에서의 힘,  $J$ 는 변형을 에너지 밀도 함수로서 제 1 파괴모드에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{IM} + K_{IP})^2 \quad (2)$$

여기서  $K_{IM}$ 과  $K_{IP}$ 는 응력확대계수이다<sup>(5)</sup>. 해석에 필요한 회전 스프링 상수( $K_R$ )는 식 (1)의 역수를 취함으로써

얻을 수 있다. 또, 크랙위치에서 다음의 기울기 변화, 변위, 모멘트 및 전단력의 연속조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{dw_2(x_c)}{dx} - \frac{dw_1(x_c)}{dx} &= \frac{EI}{K_R} \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2} \\ w_1(x_c) &= w_2(x_c), \quad \frac{d^2w_1(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2}, \quad (3) \\ \frac{d^3w_1(x_c)}{dx^3} &= \frac{d^3w_2(x_c)}{dx^3} \end{aligned}$$

여기서  $w_1(x)$ 와  $w_2(x)$ 는 크랙에 의해 분할되는 단순지지 파이프의 각 분할구간의 횡변위를 나타낸다.

2.2 계의 운동방정식

유체유동을 갖는 파이프의 기본 운동방정식은 다음과 같다<sup>(6)</sup>.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ + 2MU \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $M$ 과  $m$ 은 각각 유체 및 파이프의 단위길이당 질량이다. 또 파이프의 횡변위  $w(x,t)$ 는 크랙의 위치에 따라 다음 식과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

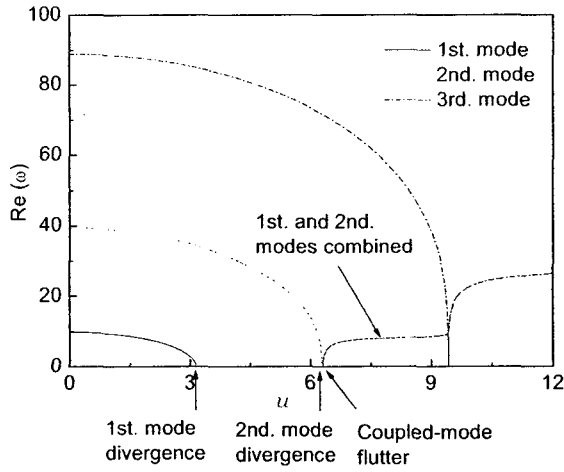
$$\begin{aligned} w_1(x) &= A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x) + A_3 \cosh(\beta x) \\ &\quad + A_4 \sinh(\beta x) \quad ; (0 \leq x \leq x_c), \\ w_2(x) &= B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x) + B_3 \cosh(\beta x) \\ &\quad + B_4 \sinh(\beta x) \quad ; (x_c \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $i$ 는 모드수를 나타낸다. 또 식 (5)의 미지수는 크랙 위치에서의 연속조건 및 보의 경계조건에 의해 구할 수 있으며, 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

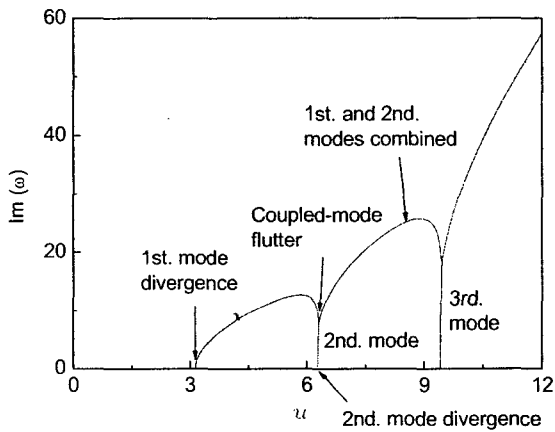
$$\begin{aligned} \eta_1'''' + u^2 \eta_1'' + 2u\beta^{1/2} \dot{\eta}_1' + \ddot{\eta}_1 = 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_c), \\ \eta_2'''' + u^2 \eta_2'' + 2u\beta^{1/2} \dot{\eta}_2' + \ddot{\eta}_2 = 0 \quad (\xi_c \leq \xi \leq 1) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $(\cdot)$ 과  $(\ddot{\cdot})$ 는 각각 무차원 변위  $\xi$ 와 시간  $\tau$ 에 대한 미분이며, 파이프의 무차원 횡변위  $\eta_{1,2}$ 는 일반화좌표  $(q_i(\tau))$ 와 식 (5)의 파이프의 고유함수의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{1i}(\xi) q_i(\tau), \\ \eta_2(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{2i}(\xi) q_i(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$



(a) Real component of dimensionless frequency



(b) Imaginary component of dimensionless frequency

Fig. 2 Natural frequency of uncracked simply supported pipe convey fluid

식 (6), (7) 에 사용된 무차원 매개변수는 각각 다음과 같이 정의하였다.

$$\tau = \sqrt{\frac{EI}{M+m}} \frac{t}{L^2}, \quad u = \sqrt{\frac{M}{EI}} LU, \quad \beta = \frac{M}{M+m},$$

$$\eta = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}$$

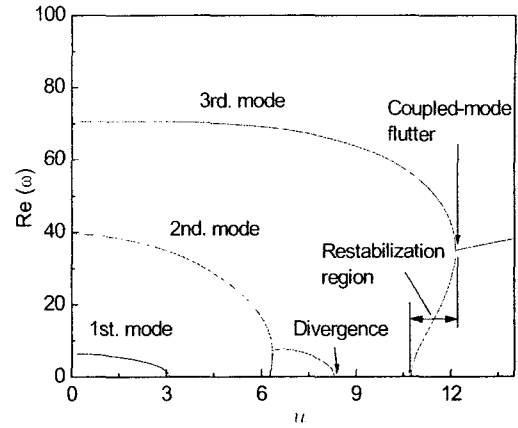
(8)

따라서 크랙을 가진 단순지지 파이프의 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

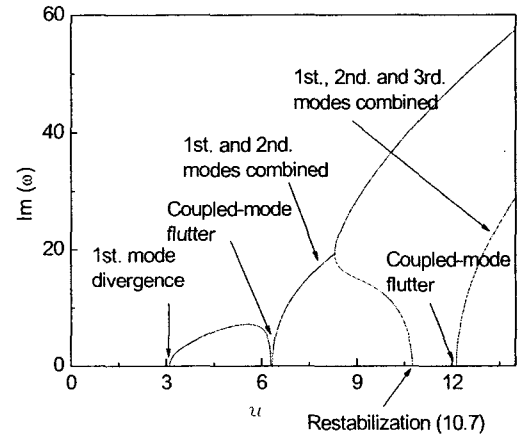
$$[M] \ddot{q} + [C] \dot{q} + [K] q = 0$$

(9)

식 (9)를 이용하여 파이프의 고유진동수를 계산할 수 있으며, 본 연구에서는 고유진동수의 수렴성을 위하여 10 차 모



(a) Real component of dimensionless frequency



(b) Imaginary component of dimensionless frequency

Fig. 3 Natural frequency of cracked simply supported pipe convey fluid

드 ( $i = 10$ )까지 고려하여 계의 고유진동수를 구하였다.

### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 유속의 임계값(Eluer의 좌굴 임계하중 / 플러터 임계하중) 및 크랙의 영향에 의한 파이프의 고유진동수 변화를 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab(6.1) 및 Mathematica(5.0)을 이용하여 계산을 수행하였다. 수치해석 예제에 적용한 파이프 길이는 1m, 영계수  $E = 216$  GPa, 그리고 단순지지 파이프의 밀도는  $7850 \text{ kg/m}^3$ 으로 하였다. Fig. 2는 크랙이 없고, 질량비  $\beta = 0.2$ 로 일정한 경우 유속의 변화에 따른 단순지지 파이프의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다.

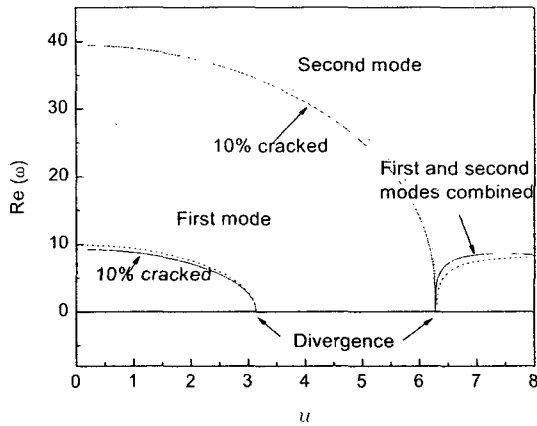


Fig. 4 Natural frequency of cracked simply supported pipe conveying fluid (1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup> mode)

Fig. 2 (a)는 고유진동수의 실수부, 그리고 Fig. 2 (b)는 허수부의 결과를 도시하고 있다. 1, 2차 모드에서의 임계유속은 각각  $\pi$ ,  $2\pi$  이며 무차원 유속이 약 3.15인 경우 1, 2차 모드연성에 의한 플러터 불안정이 일어남을 확인 할 수 있다.

Fig. 3 은 30%의 크랙이 파이프의 중간에 위치하는 경우 유속에 따른 고유진동수를 표현한 것이다. 크랙이 없는 경우(Fig. 2)와 마찬가지로 1, 2차 모드의 연성에 의한 플러터 불안정이 일어나지만 유속이 약 3.15에서 발생한 연성모드 플러터현상이 유속 약 8.3에서 다시 발산형 불안정으로 변한다. 또 유속이 10.7에서 유체유동 파이프가 다시 안정화되고 이후 유속이 약 12.1에서 1, 2 그리고 3차 모드연성에 의한 플러터 불안정이 다시 일어난다. 크랙이 존재하지 않은 경우와는 달리 1, 2 차 플러터 불안정이 일어나기 전 매우 좁은 영역의 안정화 영역이 존재함을 발견할 수 있다.

Fig. 4는 무차원 질량비  $\beta = 0.2$ 로 일정한 값을 가진 경우 크랙을 가진 유체유동 단순지지 파이프의 고유진동수를 10차 모드까지 계산하여 그 결과를 3차 모드까지 도시한 것이다. 크랙의 영향에 의한 유체유동 파이프의 고유진동수 변화를 표현한 것이다. 크랙의 위치는 보의 중앙에 위치한 경우의 결과이다. 크랙의 영향에 관계없이 불안정을 유발하는 임계유속은 1, 2 차 모드( $\pi$ ,  $2\pi$ )에서 일정하며, 크랙의 크기와 파이프의 유속은 서로 반비례한다. 또 1, 2차 모드 연성에 의해 나타나는 파이프의 고유진동수는 크랙의 크기와 서로 비례한다는 사실을 발견할 수 있다.

#### 4. 결론

단순지지 보 형태의 크랙을 가진 파이프에 유체가 작용하는 경우 파이프의 안정성, 즉 임계유속의 변화 및 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 크랙의 영향에 대하여 수치 해석 하였다. 유동유체가 작용하는 단순지지 파이프에 크랙이 존재하는 경우, 임계하중 및 임계유속은 크랙과 관계없이 항상 일정한 임계 값을 가짐을 확인 할 수 있다. 또한 유체유동을 갖는 단순지지 파이프에 크랙이 존재하는 경우 1,2차 모드 연성에 의해 발생하는 파이프의 고유진동수는 크랙의 크기와 서로 비례하는 경향을 보인다. 파이프의 1, 2차 모드연성에 의하여 발생하는 플러터 불안정은 크랙의 크기가 일정크기(30%)이상인 경우 다시 발산형 불안정을 유발하며, 크랙이 존재하는 경우 파이프가 재 안정화되는 유속의 영역을 가진다.

#### 참고문헌

- (1) Datta, P.K. and Lal, M.K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load," Computer and Structures, 4(6) pp.1199~1202.
- (2) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," Computers & Structures, 61(6), pp.1057~1074.
- (3) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force with an Axial Force," Int. Journal of Solids and Structures, 35(23) pp.3071~3080.
- (4) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force," Computers and Structures, 71, pp.585~591.
- (5) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures Through Coupled Response Measurements," Journal of Sound and Vibration, 261, pp.17~29.
- (6) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성," 한국소음진동공학회논문집, 12(7), pp.550~556.
- (7) Paidoussis, M.P., 1998, Fluid-Structure Interactions (Volume 1), Academic Press.