

상수 가진력항이 원판의 진동모드사이의
비선형 상호작용에 미치는 영향 - 제 1 보 운동방정식
The Effect of Constant Excitation on Nonlinear Interactions
in Vibrating Modes of Circular Plates - Part 1. The Equations of Motion

이원경 *
Won K. Lee

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형진동), Asymmetric Vibration of a Circular Plate(원판의 비대칭진동), Constant Exitation(상수가진항), Nonlinear Modal Interaction(비선형 모드 상호작용), Galerkin's procedure(갈러킨 방법)

ABSTRACT

In order to examine the effect of constant excitation on nonlinear interactions in vibrating modes of circular plates, we added a constant term to a harmonic excitation. A two-degree-of freedom system is derived by using the Galerkin's procedure. The system is shown to have quadratic and cubic nonlinearities subjected to a harmonic excitation.

1. 서론

지난 봄 제주에서 개최된 춘계학술회의에서 박철희 교수를 뵈고 'Strogatz[1]는 싸이클의 싸들노드 분기(saddle-node bifurcation of cycles)는 대역분기(global bifurcation)에 분류하고 고정점의 싸들노드 분기(saddle-node bifurcation of fixed points)는 transcritical, pitchfork, Hopf 분기 등과 함께 국소분기(local bifurcation)에 분류했는데, transcritical, pitchfork, Hopf 분기 등에서는 분기 전에 존재한 어떤 고정점 주위에서 새 고정점이나 싸이클이 발생했으니 국소분기라 할 수 있지만 싸들노드 분기는 아무것도 없던 곳에서 갑자기 고정점이 생겨난 것이니 싸이클의 경우와 마찬가지로 대역분기로 분류해야 마땅하지 않겠습니까?' 하고 여쭙어 보았다. 그는 '(고정점의) 싸들노드를 국소분기로 보는 건 당연해보인다' 하고는 그 근거로 'pitchfork 분기의 경우도 섭동(perturbation)을 가하면 싸들노드 분기가 발생한다' 며 종이에 낙인은 그림을 그려보였다. '비록 그렇더라도 싸들노드분기가 모두 그런 유형은 아닌데' 라고 생각하며 나는 애초의 질문은 접어두고 '그동안 연구해오던 조화가진력을 받는 완전 원판의 비대칭 진동응답[2-5]에서도 pitchfork 분기가 발생한 점을 상기하고는 '도대체 어떤 섭동을 가하면 완전 원판의 경우에도 이 분기가 싸들노드로 바뀔까?' 를 생각하게 되었다. 연구실로 돌아와 박 교수가 그려준 것과 유사한 그림이 실린 Strogatz 책 [1]을 펴놓고, '불과 얼마 전 이 책을 읽었을 때 왜 이 그림이 원판의 진동과 관련이 있을지 모른다는 생각을 못했을까?' 를

되뇌어보며 책의 내용을 다시 살펴보았다.

Strogatz는 식

$$\dot{x} = h + rx - x^3$$

에서 $h = 0$ 일 때 x 와 $-x$ 사이에 완전한 대칭성

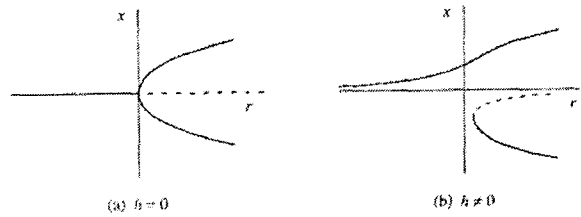


Fig. 1 An imperfect bifurcation diagram

(perfect symmetry)이 존재해서 pitchfork 분기가 ($r = 0$) 발생하지만, $h \neq 0$ 인 경우엔 이 대칭성이 상실되므로 (broken) h 를 불완전 매개변수 (imperfection parameter)라 하고 이 분기를 불완전 분기(imperfect bifurcation)에 분류했다. 위의 식을 진동의 관점에서 보면 관성이 무시된 진동계 즉 과감쇠계(overdamped system)가 비선형 강성을 가진 경우가 된다. 그 때 h 는 상수 가진력항이 됨을 인식한 후에야 비로소 나는 조화가진력을 받는 완전원판에 상수가진력항을 추가하면 유사한 대칭성 상실이 발생할 지도 모른다는 생각에 이르게 되었다. 이 논문은 그 후의 진행에 관한 것으로 먼저 원판의 비대칭 진동연구

* 영남대학교 공과대학 기계공학부
E-mail:wkleee@yu.ac.kr
Tel: (053)810-2455, Fax(053)810-4627

의 배경부터 살펴보기로 한다.

원판은 건축 및 항공구조물 뿐만 아니라 톱날, 터빈, 열교환기, 컴퓨터저장장치 등 다양한 용도를 가진 조물 요소이다. 판이 변형하면 중간평면의 신장을 수반하게 되며 변형의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 원판의 기하학적 비선형성의 원인이 된다. 이러한 현상은 응력과 변형도의 관계가 선형적(재료의 관점에서선 선형적)이라 하더라도 변형도와 변위의 관계가 비선형이 되어 결국은 판의 비선형방정식을 낳게 된다. 이러한 기하학적 비선형성은 판의 대변형의 경우에 계의 거동에 심각한 영향을 미치게 된다.

원판의 진동연구는 크게 완전원판과 불완전원판으로 먼저 분류하고 그 다음 축대칭진동과 비대칭진동으로 분류할 수 있다. 1970년대 이후에 이루어진 완전원판의 대칭진동연구[6-8], 완전원판의 비대칭진동연구[2-5, 9-13], 불완전원판의 비대칭진동연구[14-21]는 모두 강제진동응답을 연구한 것으로서, 불완전 원판의 비감쇠 자유진동방정식을 유도하고 Galerkin 방법을 사용하여 특정 모드의 상호작용연구를 시도한 Efstathiades [22]의 연구로부터 비롯된 것이라고 볼 수 있으며, 그의 연구 또한 불완전 원판에 대한 1950-1960년대의 선형 연구[23-25]로부터 자극을 받은 점을 인정해야 할 것이다. Sridhar, Mook, Nayfeh [6]로부터 Samoylenko와 Lee [21]까지의 강제진동연구에서는 모두 조화 가진력을 가정하였다. 결국 이들의 연구에서는 조화가진력의 섭동, 예를 들자면 조화가진력에다가 상수하중이 추가된 (preloaded) 경우를 애초에 배제하였다.

따라서 본 연구에서는 조화가진력에다가 상수하중이 추가된 가진력을 가정함으로써 가진력의 섭동이 원판의 진동응답특성에 미치는 영향을 연구해보고자 한다. 이 가진력을 연속계의 진동에 적용한 주목할 만한 연구가 Nayfeh, Nayfeh, Mook [26]에 의해 이미 이루어졌다. 다만 이들은 안전밸브계를 하나의 모드로 근사하는 바람에 응답의 모드상호작용에 까지 이르지는 못하였다. 결국 본 연구에서는 원판을 둘 이상의 모드로 근사함으로써 가진력의 섭동(조화가진력에 상수섭동 성분이 추가된 힘가진)이 원판진동응답의 모드상호작용까지 연구하는 데 그 목적이 있는 것이다.

2. 지배방정식과 정상상태응답

Efstathiades [22]는 불균질 원판의 비감쇠 자유진동을 지배하는 방정식을 유도하였다. 균질 원판을 가정함으로써 이 방정식을 단순화한 후, 감쇠와 가진력항을 추가하였다. Fig. 1의 원판의 운동방정식은 다음과 같다 (Sridhar Mook, Nayfeh [9]).

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w = L(w, F) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + p(t, r, \theta), \quad (1a)$$

$$\nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (1b)$$

여기서

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2)$$

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (3)$$

이고 ρ 는 밀도, h 는 두께, w 중간면의 변형, $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$, c 는 감쇠계수, E 는 영률, ν Poisson 비, p 는 가진력이고 F 면내 관성을 무시한 경우의 면내평형조건을 만족하는 힘 포텐셜 함수이다.

아래와 같이 변수를 조정하면

$$r = \bar{r} R, \quad t = \bar{t} R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad w = \bar{w} \frac{h^2}{R}, \quad F = \bar{F} \frac{Eh^4}{R^2}, \\ c = 24 \bar{c} (1-\nu^2) \frac{h^2}{R^2} \sqrt{\rho h D}, \quad p = 12 \bar{p} (1-\nu^2) \frac{Dh^4}{R^2} \quad (4)$$

식 (1)을 아래와 같이 무차원 식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \nabla^4 \bar{w} = \varepsilon \left[L(\bar{w}, \bar{F}) - 2\bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{p}(\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}) \right], \quad (5a)$$

$$\nabla^4 \bar{F} = \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r} \partial \bar{\theta}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\theta}^2} \right), \quad (5b)$$

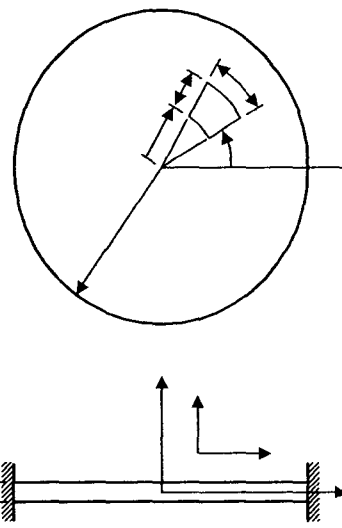


Fig. 2 A schematic diagram of a circular plate

여기서 $\varepsilon = 12(1-\nu^2)h^2 / R^2$ 은 작은 매개변수이며 변수 위의 bar 기호는 생략하였다.

고정경계를 가진 Fig. 1의 원판의 경계조건은 모든 r 와 θ 에 걸쳐서, $r=1$ 에서 아래와 같다.

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (6a,b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (6c)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+\nu}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6d)$$

마땅히 $r=0$ 에서의 해는 유한해야 한다는 조건도 추가되어야 한다. 원판의 불완전성이 작고 ($S=1$), 불완전성은 ρh 의 변화에 의해서만 기인한다고 가정하자. 즉, ρh 는 r 과 θ 의 함수인 반면, D 와 δ 은 r 만의 함수로 가정하자. 그리고, 동일한 절경(nodal diameter) 개수를 가지는 두 모드(속칭 sine 모드와 cosine 모드)의 상호작용만을 고려하면, 식 (1)과 (2)의 정상상태 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다().

$$w(r, \theta, t) = \phi(r) [x_1(t) \cos(n\theta - \theta_0) + x_2(t) \sin(n\theta - \theta_0)]. \quad (7)$$

여기서, $\phi(r)$ 은 경계조건에 의해 결정되는 형상함수이고, $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 시간에 따른 모드의 진폭을 나타내며, n 은 절경의 개수를 나타낸다.

식 (7)의 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 갤러킨방법(Galerkin's procedure)을 이용하면 다음과 같은 두 상미분방정식에 의해 결정된다[14, 17, 19].

$$\ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i + \gamma_i x_i (x_1^2 + x_2^2) = f_i(t) \quad (8)$$

$i=1, 2.$

여기서, $\dot{} = d/dt$, ε 은 작은 매개변수를, ω_i 는 계의 고유진동수를 나타낸다.

완전원판의 경우에는

$$c_1 = c_2 = c, \omega_1 = \omega_2 = \omega, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \text{ 이다.}$$

$f_1(t) = \mu_0 + \mu_1 \cos \lambda t$, $f_2(t) = 0$ 로 가정하여 식을 정리하면

$$\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \gamma x_1 (x_1^2 + x_2^2) = \mu_0 + \mu_1 \cos \lambda t \quad (9a)$$

$$\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 + \gamma x_2 (x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (9b)$$

를 얻게된다. 상수가진력항 μ_0 에 의한 정적변형 b_1 과 b_2 를 구하기 위해 평형상태를 고려하면

$$\omega^2 b_1 + \gamma b_1 (b_1^2 + b_2^2) = \mu_0 \quad (10-a)$$

$$\omega^2 b_2 + \gamma b_2 (b_1^2 + b_2^2) = 0 \quad (10-b)$$

을 얻게 된다. 평형해는 $b_2 = 0$ 인 경우 $\omega^2 b_1 + \gamma b_1^3 = \mu_0$ 를 만족해야 하며 $b_2 \neq 0$ 인 경우 식 (10-b)를 b_2 로 나누어 $b_1^2 + b_2^2$ 을 구하고 식 (10-a)에 대입하면 $\mu_0 = 0$ 가 되므로 유일한 평형해는 $b_2 = 0$ 와 $\omega^2 b_1 + \gamma b_1^3 = \mu_0$ 를 만족하는 해이다.

새로운 좌표 η_1 과 η_2 를 도입하기 위해 $x_1 = b_1 + \eta_1$, $x_2 = \eta_2$ 를 식 (9)에 대입하면

$$\ddot{\eta}_1 + c\dot{\eta}_1 + (\omega^2 + 3\gamma b_1^2)\eta_1 + b_1\gamma(3\eta_1^2 + \eta_2^2) + \gamma\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2) = \mu_1 \cos \lambda t \quad (11a)$$

$$\ddot{\eta}_2 + c\dot{\eta}_2 + (\omega^2 + \gamma b_1^2)\eta_2 + 2b_1\gamma\eta_1\eta_2 + \gamma\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2) = 0 \quad (11b)$$

을 얻게 되어 조화가진력을 받는, 이차 및 삼차의 비선형성을 갖는 2 자유도계를 나타내고 있다. 삼차의 비선형성만 갖는 평판과는 달리 셸(shell)은 이차 및 삼차의 비선형성을 갖는다는 점을 상기하면 이 과정은 조화가진력과 상수가진력항을 동시에 받는 평판의 동역학 문제(식 (9)의 x_1 과 x_2)가 조화가진력 만을 받는 곡판 즉 셸(shell)의 동역학문제(식 11의 η_1 과 η_2)로 변환되었음을 말해주고 있다. 달리 말하자면 평판에 작용한 상수가진력에 의해 초기변형이 생긴 구조물 즉 셸에 조화가진력이 가해진 문제가 된 것이다. 식 (11)를 풀어서 두 모드사이의 상호작용에 대한 이해를 거쳐 불완전원판의 경우($c_1 \neq c_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$)로 연구를 확대하는 것이 과제이다.

한편 다중시간법을 사용하여 이차 및 삼차의 비선형성을 갖는 계를 해석한 연구가 많이 이루어져 있는데[26-31], 이 해석과 관련하여 주의할 점은 갤러킨 방법을 사용하면 부정확한 결과를 줄 수 있다는 점이다. 특히 이차 비선형성의 계수 (원판의 경우 상수 가진력항 μ_0 의 영향을 받는 b_1)가 클수록 오차는 커진다고 알려져 있다. 이를 대비하자면 연속계(본 연구의 경우, 식 (5)와 (6))에 직접 다중시간법을 적용하든지 갤러킨 방법을 사용하더라도

적절한 보정항을 고려하여야 한다는 점이 밝혀져 있다 [30-35]. 바로 이러한 점이 상수가진항과 조화가진항을 함께 갖는 계 (5)와 (6)의 해석과 관련하여 예상되는 어려움이다.

참고문헌

[1] Strogatz, S. H., 1994, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley.

[2] Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2002, "Corrected solvability conditions for non-linear asymmetric vibrations of a circular plate", *Journal of Sound and Vibration* 257, pp. 653- 665.

[3] Lee, W. K., Yeo, M. H., 2003, *Journal of Sound and Vibration*, 263, 1017-1030, Non-linear interactions in asymmetric vibrations of a circular plate.

[4] Lee, W. K., Yeo, M. H., and Samoilenko, S. B., 2003, *Journal of Sound and Vibration*, 268, 1013-1023, The effect of the number of nodal diameters on non-linear interactions in two asymmetric vibration modes of a circular plate.

[5] 이원경, 박해동, 2005, 강제진동중인 완전 원판의 혼돈운동, 한국소음진동공학회 추계학술대회논문집 430-435.

[6] Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, *Journal of Sound and Vibration*, 41, 359-373, Non-linear resonances in the forced responses of plates, Part I: Symmetric responses of circular plates.

[7] Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, *Journal of Sound and Vibration*, 142, 279-292, Modal interaction in circular plates.

[8] Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 62, 1015-1022, Combination resonances of a circular plate with three-mode interaction.

[9] Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, *Journal of Sound and Vibration*, 59, 159-170, Non-linear resonances in the forced responses of plates, Part II: Asymmetric responses of circular plates.

[10] Nayfeh, T. A. and Vakakis, A. F., 1994, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 29, 233-245, Subharmonic traveling waves in a geometrically non-linear circular plate.

[11] Lee, W. K. and Park, H. D., 2005, "Chaos and Fractal Basin Boundaries of a Perfect Circular Plate", 6th International Summer School and Conference, Maribor, Slovenia, Proceedings pp. 96.

[12] 박해동, 2006, "강제진동중인 원판의 혼돈운동과 프랙털 흡인경계", 영남대학교 박사학위

논문.

[13] Lee, W. K., 2006, *Bifurcation and Chaos in Complex Systems* (edited by J.-Q. Sun and A. C. J. Luo), Chapter 5. "Modal Interaction in Asymmetric Vibrations of Circular Plates", Elsevier.

[14] Raman, A. and Mote, C. D., 2001, "Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 36, pp. 261- 289.

[15] Touzé, C., Thomas, O. and Chaigne, A., 2002, "Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part I: theory", *Journal of Sound and Vibration* 258, pp. 649- 676.

[16] Thomas, O., Touzé, C. and Chaigne, A., 2003, "Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: experiments", *Journal of Sound and Vibration* 265, pp. 1075-1101.

[17] 여명환, 2003, "강제진동중인 원판의 진행과 관련된 비선형동역학, 영남대학교 박사학위 논문.

[18] Samoilenko, S. B., 2005, "Global bifurcations and chaos in modal interactions of circular plates, Yeungnam University Ph.D. Thesis.

[19] Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2006, "Evidences of global bifurcations of an imperfect circular plate, *Journal of Sound and Vibration*, 293, pp. 138-155.

[20] Samoilenko, S. B. and Lee, W. K., 2005, "Hamiltonian Chaos in an Harmonically Excited Circular Plate" 6th International Summer School and Conference, Maribor, Slovenia, Proceedings pp. 113.

[21] Samoilenko, S. B. and Lee, W. K., 2006, "Global Bifurcations and Chaos in a Harmonically Excited and Undamped Circular Plate, *Nonlinear Dynamics*, in press.

[22] Efstathiades, G. J., 1971, *Journal of Sound and Vibration*, 16, 231-253, A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure.

[23] Tobias, S. A., 1957, "Free undamped non-linear vibrations of imperfect circular discs", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 171, pp. 691- 703.

[24] Williams, C. J. H. and Tobias S. A., 1963, "Forced undamped non-linear vibrations of imperfect circular discs", *Journal of Mechanical Engineering Science* 5, pp. 325- 335.

[25] Williams, C. J. H., 1966, "The stability of nodal patterns in disk vibration", *International Journal of Mechanical Sciences* 8, pp. 421- 431.

[26] Nayfeh, A. H., Nayfeh, J. F. and Mook, D. T., 1992, *Nonlinear Dynamics*, 3, 145-162. "On

Methods for Continuous Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities” .

[27] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York: John Wiley.

[28] Nayfeh, A. H., 1983, *Journal of Sound and Vibration*, 89, 457-470, The Response of Single Degree of Freedom Systems with Quadratic and Cubic Non-Linearities to a Subharmonic Excitation.

[29] Nayfeh, A. H. and Jebril , A. E. S., 1987, *Journal of Sound and Vibration*, 115, 83-101. The Response of Two-Degree-of-Freedom Systems with Quadratic and Cubic Non-Linearities to Multifrequency Parametric Excitations.

[30] Nayfeh, A. H. and W. Lacarbonara, 1997, *Nonlinear Dynamics*, 13, 203-220, On the Discretization of Distributed-Parameter Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities.

[31] Abe, A., 2006, *Int. J. Non-Linear Mech.* On non-linear vibration analyses of continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, in press.

[32] Nayfeh, A. H. and Lacarbonara, W. 1998 *JSME Int. J. Ser. C* 41 510-531. On the discretization of spatially continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities,

[33] Nayfeh, A. H. Nayfeh, J. F. Mook, D. T. , 1992, *Nonlinear Dyn.* 3 145-162. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities,

[34] Nayfeh, A. H. 1998, *Nonlinear Dyn.* 16 105-125, Reduced-order models of weakly nonlinear spatially continuous systems,

[35] Nayfeh, A. H., 2000, *Nonlinear Interactions*. New York: John Wiley.