

바이스펙트럼을 이용한 외팔보의 결함 진단에 관한 연구

A Study on the fault diagnosis of a cantilever beam using the Bispectrum

안영찬*· 이해진*· 강원호*· 이정윤**· 오재응†
 Young-Chan Ahn, Hae-Jin Lee, Won-Ho Kang, Jung-Yoon Lee, Jae-Eung Oh

Key Words : Bispectrum(바이스펙트럼), Rayleigh energy method(레이리 에너지법).

ABSTRACT

This study is base on the fault detection and diagnosis when a crack is happened a structure. A crack in a structure will affect the modal parameters. We are searched a percentage of changes in the natural frequencies according to changes of location and propagation of the crack using the Rayleigh's energy method. This method is presented to identify the presence of a crack and its location. The study is carried out both theoretically and experimentally and the results are presented in this paper. The location of the crack is also moved from the fixed end to the free end along its length. The changes in natural frequencies are observed from theoretically study, due to the presence of the crack at different locations and depths, and the percentage change in frequency values are calculated. These results are confirmed by the experiments. And then, a difference between a cracked beam and uncracked beam observed using the bispectrum as high-order spectrum.

1. 서론

현대 사회의 발전으로 항공기나 복잡한 구조의 초고층 건물 그리고 여러 광활한 조건, 아래 놓여 있는 많은 구조물들은 전혀 놀랄 것 없는 현대인들의 일상이 되었다. 전 세계를 하나로 묶어 주는 수단인 항공기와 같은 경우 악조건 속에서 운행 되는 진동 구조물이지만, 많은 사람들이 안심하며 대중교통과 같이 일상생활에 깊숙이 들어와 있다. 이것은 고도화된 기술과 더불어 신뢰성 향상이 같이 발전해왔기 때문이다. 산업의 고도화가 진행됨에 따라 신뢰성향상은 더욱 이슈화 되었고 기업들이 가장 관심을 분야로 까지 성장되었다. 많은 기계 구조물, 건축 구조물들은 진동과 열에 의한 데미지를 받는다. 진동과 열에 의한 데미지는 구조물에 피로파괴를 일으키고 구조물의 안전성을 위협하며 기계구조물의 경우 제 기능을 하지 못하게 된다.

신뢰성향상을 위해서는 단지 구조물을 보다 안전하게 safe factor 를 크게 설계하면 되지만, 비용 및 수명을 고려할 때 단순히 safe factor 를 크게

만 할 수 없다. 따라서, 구조물의 지속적인 감시, 검사를 통한 보수가 필요하다.

본 연구는 구조물의 가장 근간이 되는 외팔보의 모달 특성을 변화를 측정함으로써 외팔보의 크랙이 발생할 시 그 위치와 전파 정도를 파악할 수 있는 고장진단법을 소개한다.

Rayleigh energy method 를 사용하여 크랙의 위치와 크랙 전파 정도를 분석하였으며, 진동 측정 실험을 통해 이론적 해석을 뒷받침하였다. 또한, 크랙이 발생시 측정된 진동신호는 비선형성 랜덤신호로 비선형성 신호 분석에 탁월한 고차 스펙트럼으로 알려진 바이스펙트럼을 사용하여 분석하는 과정을 통해 그 유용성을 확인해 보고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 외팔보의 굽힘 진동

외팔보의 강제 진동에 대한 운동 방정식은 다음과 같은 편미분방정식으로 유도된다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

자유진동의 경우 $f(x,t) = 0$ 이므로 운동방정식은

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
 E-mail : jeoh@hanyang.ac.kr
 Tel : (02)2220-0452, Fax : (02)2299-3153

* 한양대학교 대학원 기계공학과
 ** 경기대학교 시스템디자인공학부

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

이 되고, Rayleigh 의 에너지법을 이용하여 식(2)를 풀면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega^2 = \lambda = \frac{\int_0^L EI(x) \{d^2 w/dx^2\}^2 dx}{\int_0^L m w(x)^2 dx} = \frac{V}{T} \quad (3)$$

where, $m = \rho A(x)$

식(3)에서 양변을 변분하면,

$$\delta \lambda = \frac{\delta V}{T} - \frac{V \delta T}{T^2} \quad (4)$$

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta V}{V} - \frac{\delta T}{T} \quad (5)$$

외팔보에 대해 크랙이 아주 미세하다 가정하면 $\delta m = 0$ 이 되며 따라서, $\delta T = 0$ 이 된다.

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta V}{V} = \frac{E \delta \left[\int_0^L I(x) \{d^2 w/dx^2\}^2 dx \right]}{E \int_0^L I(x) \{d^2 w/dx^2\}^2 dx} \quad (6)$$

$$\delta V = \delta \left[\int_0^L EI(x) \{d^2 w/dx^2\}^2 dx \right] \quad (7)$$

크랙의 위치를 l_0 , 넓이를 Δx 라 하면 위의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta \left[\int_0^{l_0} EI(x) \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 dx + \int_{l_0}^{l_0+\Delta x} EI(x) \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{l_0+\Delta x}^L EI(x) \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 dx \right] \\ &= EI \left[\frac{\partial I}{I} \int_0^{l_0+\Delta x} \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 dx + \int_0^{l_0+\Delta x} \delta \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 dx \right] \quad (8) \end{aligned}$$

너비가 B , 두께가 T 인 직사각형인 보에서는 $I = BT^3/12$ 이므로

$$\delta I = \frac{T^3}{12} \delta B, \quad \text{즉, } \frac{\delta I}{I} = \frac{\delta B}{B} \text{ 이 된다.}$$

적분구간을 아주 작은 Δx 에 대해 한정지으면

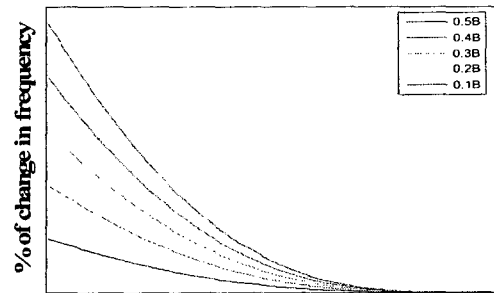
$$\begin{aligned} \delta T &= EI \left[\frac{\partial B}{B} \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 \Delta x + \delta \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}^2 \Delta x \right] \\ &= EI \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \right\}_{at l_0}^2 \Delta x \left[\frac{\partial B}{B} + \frac{\partial \{d^2 w/dx^2\}_{at l_0}^2}{\{d^2 w/dx^2\}_{at l_0}^2} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서,

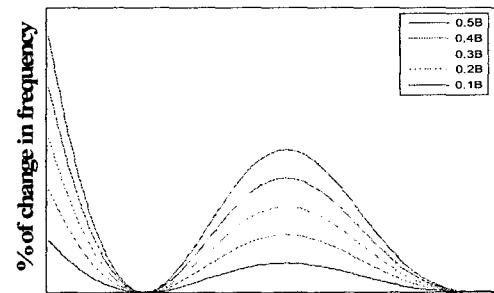
$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta T}{T} = \frac{\{d^2 w/dx^2\}_{at l_0}^2 \Delta x \left[\frac{\partial B}{B} + \frac{\partial \{d^2 w/dx^2\}_{at l_0}^2}{\{d^2 w/dx^2\}_{at l_0}^2} \right]}{\int_0^L \{d^2 w/dx^2\}^2 dx} \quad (10)$$

이 된다. 식(10)에 외팔보의 굽힘에 의한 변위식을 대입하면 크랙에 의한 고유진동수의 변화를 알 수 있다.

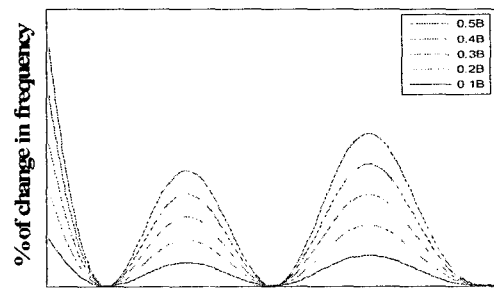
Fig. 1 은 식(10)을 상용화 툴인 matlab 을 사용하여 그린 것으로 굽힘에 의한 고유진동수의 변화율을 3 차모드까지 나타낸 것이다. 각 각의 모드와 크랙의 위치에 따라 또한, 크랙의 진전에 따른 각 모드의 고유진동수 변화율이 다름을 착안하여 현재 크랙의 위치 및 진전 사항을 알 수 있다.



(a) 1st bending mode



(b) 2nd bending mode



(c) 3rd bending mode

Fig. 1 Percentage of change in first three bending frequencies due to a crack.

2.2 바이스펙트럼 해석법

가우스(Gauss)성 불규칙신호의 경우에는, 파워스펙트럼(Power spectrum)이 유력한 해석수단인 것으로 알려져 있지만, 비가우스성 신호의 통계적 성질의 기술이나 비선형계의 특성해석을 위해서는 보다 고차의 스펙트럼이 필요하다. 고차스펙트럼은 난류에 있어서 에너지 수송(Batchelor, 1952), 쇄파(Phillips, 1958), 파랑의 성분과 사이의 에너지 수송(Phillips, 1960, Hasselman, 1962) 등의 비선형 현상을 설명하는데 사용되어 왔다.

바이스펙트럼(Bispectrum)은 고차스펙트럼 중에서도 비교적 간단히 구할 수 있고, 이제까지 대부분 의존해왔던 파워스펙트럼으로는 얻을 수 없는 각각의 주파수 성분들 사이의 상관위상의 변화에서만 나타나는 정보를 얻는 것이 가능하다는 점에 특징이 있다. 바이스펙트럼은 3 차 상관함수의 2 차원 푸리에변환으로 정의되며, 합이 0 이 되는 세 개의 주파수 성분들간의 상호관계를 나타낸다.

정상 랜덤 과정일 때의 $x(t)$ 를 Fourier-Stieltje 적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(\omega) \quad (11)$$

$S(\omega)$ 는 평균 제곱 $R(\tau)$ 의 향으로 정의 된다.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (12)$$

$$R(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (13)$$

$B(\omega_1, \omega_2)$ 는 평균 세제곱 $C(\tau_1, \tau_2)$ 의 향으로 정의 된다.

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (14)$$

$$C(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)] \quad (15)$$

식(11)을 식(12)와 식(13)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 = 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] = S(\omega_1)d\omega_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 \neq 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

식(11)을 식(14)와 식(15)에 대입하면 다음과

같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)] = B(\omega_1, \omega_2)d\omega_1d\omega_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

다시 말해서 파워스펙트럼은 주파수의 합이 0 인 두 개의 푸리에 성분으로부터 나온 평균 자승치의 기여도를 나타내고 바이스펙트럼은 주파수의 합이 0 이 되는 세 개의 푸리에 성분의 곱에서 나온 평균 세제곱의 기여도를 나타낸다. 정상과정 $x(t)$ 에 대한 파워스펙트럼은 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (20)$$

$$S(\omega) = S(-\omega) \quad (21)$$

바이스펙트럼에 대해서는 3 차의 곱으로서 다음과 같은 관계가 생긴다.

$$\begin{aligned} C(\tau_1, \tau_2) = C(\tau_2, \tau_1) \\ = C(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) = C(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) = B(\omega_2, \omega_1) \\ = B(-\omega_2, \omega_1 - \omega_2) = B(\omega_1 - \omega_2, -\omega_2) \\ = B(-\omega_1, \omega_2 - \omega_1) = B(\omega_2 - \omega_1, -\omega_1) \end{aligned} \quad (23)$$

또한 $dZ(\omega) = dZ^*(-\omega)$, $B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_1, -\omega_2)$ 가 성립한다. Fig. 2에 식(22)과 식(23)에서 주어진 기본적인 기하학적 특성을 표시하였다. 시계열 $x(t)$ 에 대해서는 단지 Fig. 2에서 보이는 채색된 부분만 계산하면 된다. 12 개의 삼각형 면적은 동일하며 다른 삼각형들은 채색된 삼각형으로부터 계산될 수 있다.

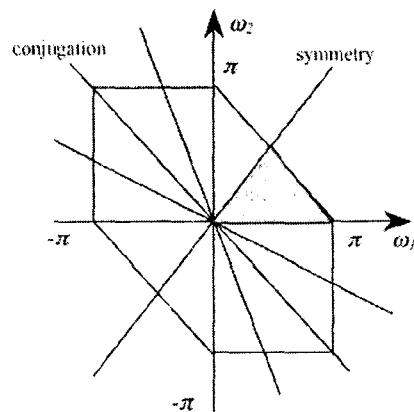


Fig. 2 Symmetric relationship of the bispectrum

3. 실험 및 고찰

3.1 모달 테스트

외팔보에서 크랙의 위치별 진전을 파악하기에 앞서, 크랙이 존재하지 않는 외팔보의 모달테스트를 실시하였다. 이때 측정된 굽힘에 의한 1 차, 2 차, 3 차 고유진동수를 기준으로 하여 각 위치별, 크랙의 진전에 따라 크랙이 있는 외팔보의 고유진동수를 측정하여 비교하였다. Fig. 3 은 실험 시스템의 개략도를 나타낸다.

외팔보는 길이(L)가 0.3m, 넓이(B)가 0.05m 그리고 두께(T)가 0.003m 인 알루미늄 외팔보를 사용하였다. 외팔보의 크랙은 고정단으로부터 길이 방향으로 9 수준(0.1L~ 0.9L)으로 위치를 변화하였고, 넓이 방향으로 5 수준(0.1B~0.5B)으로 변화하며 크랙의 진전을 나타내었다.

크랙이 없는 외팔보의 모달테스트 결과 Fig.5 외팔보의 주파수응답함수에서 알 수 있듯 1 차, 2 차, 3 차의 고유진동수는 각각 25.438Hz, 160.26Hz, 446.43Hz 로 나타났다.

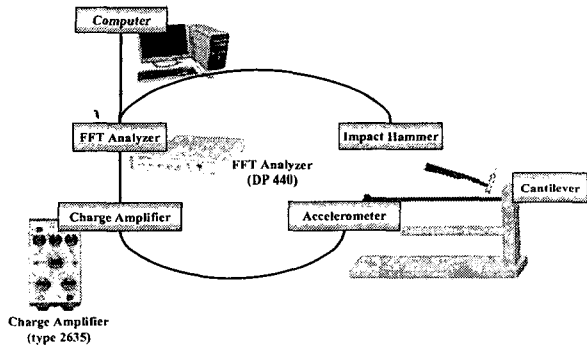


Fig. 3 Experimental set up

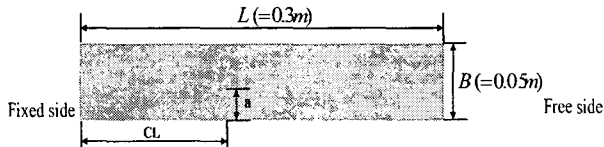


Fig. 4 The cracked beam. a = crack depth ; CL = crack location

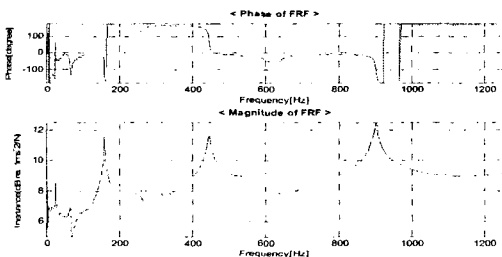


Fig. 5 The frequency response function of uncracked beam

(1) Rayleigh 에너지법에 의한 해석

크랙 위치별 9 수준, 넓이 방향의 진전 5 수준에 대해 크랙이 발생한 외팔보의 고유진동수를 측정하여 이미 측정된 크랙이 없는 외팔보의 고유진동수와 식(24)와 같이 비교한다.

$$\frac{(f_n - f_{nc})}{f_n} \times 100(\%) \tag{24}$$

where, f_n : The natural frequency of the uncracked beam

f_{nc} : The natural frequency of the cracked beam

식(24)에 의해 고유진동수의 변화율을 계산하여 Table. 1 에 나타내었다. Table. 1 을 가시화 한 것이 Fig. 6 이다. Fig. 6 을 Fig. 1 과 비교해보면 실험에서도 이론식과 같이 고유진동수의 변화율이 움직임을 알 수 있다.

만약, 외팔보의 고유진동수가 1 차모드에서 0.345%, 2 차모드에서 3.011%, 3 차모드에서 1.977% 의 변화율을 보였다면, 고정단으로부터 0.18m (0.6L)에 위치에서 크랙이 발생하여 0.02m (0.4B)만큼 크랙이 진전하였다는 것을 알 수 있다.

Table.1 Percentage of change in bending frequencies [%]

	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L
0.1B	0.230	0.205	0.137	0.083	0.040	0.011	-0.014	-0.029	-0.047
0.2B	1.103	0.862	0.571	0.345	0.180	0.065	-0.011	-0.061	-0.097
0.3B	2.784	1.976	1.326	0.812	0.435	0.172	0.011	-0.083	-0.144
0.4B	4.968	3.589	2.432	1.509	0.815	0.345	0.057	-0.101	-0.194
0.5B	7.745	5.712	3.927	2.461	1.351	0.593	0.137	-0.111	-0.241

(a) 1st bending mode

	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L
0.1B	-0.030	-0.036	-0.013	0.061	0.113	0.113	0.061	-0.002	-0.053
0.2B	0.337	0.010	0.113	0.452	0.698	0.658	0.406	0.119	-0.059
0.3B	1.083	0.113	0.354	1.152	1.720	1.617	1.014	0.348	-0.042
0.4B	1.978	0.308	0.744	2.179	3.172	3.011	1.927	0.704	-0.002
0.5B	3.143	0.653	1.324	3.551	5.089	4.877	3.195	1.209	0.073

(b) 2nd bending mode

	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L
0.1B	-0.157	0.063	0.147	0.096	0.037	0.117	0.207	0.151	0.041
0.2B	-0.006	0.264	0.638	0.388	0.104	0.468	0.873	0.613	0.127
0.3B	0.454	0.638	1.474	0.906	0.251	1.084	2.004	1.435	0.305
0.4B	0.883	1.213	2.658	1.654	0.519	1.977	3.601	2.654	1.654
0.5B	1.513	2.010	4.155	2.634	0.947	3.155	5.649	4.331	2.634

(c) 3rd bending mode

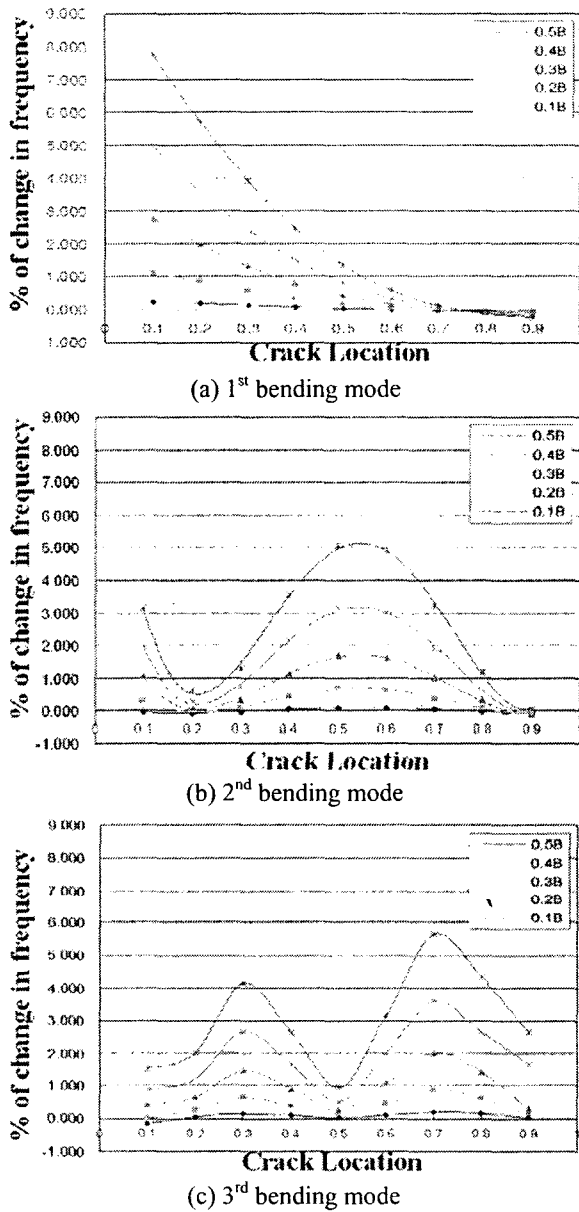


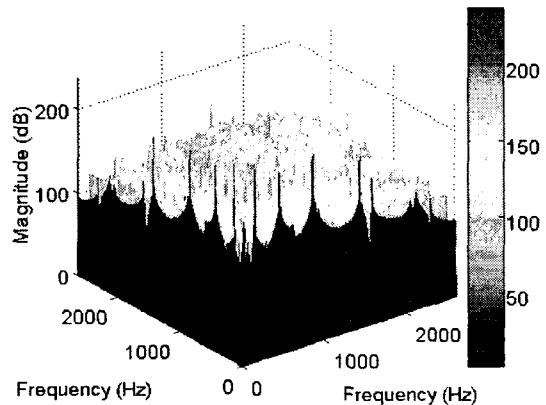
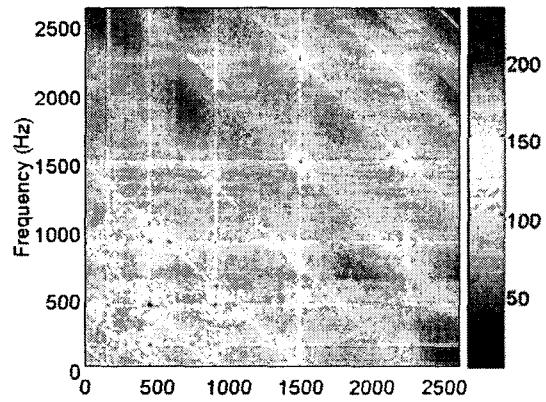
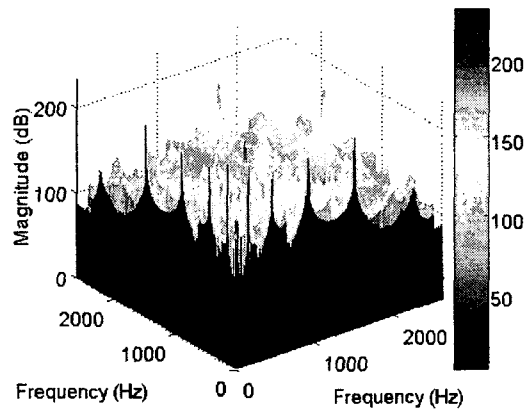
Fig. 6 Percentage of change in bending frequencies due to crack by experiment

(2) Bispectrum 에 의한 해석

크랙이 없는 외팔보의 진동 측정 신호를 바이스펙트럼을 구하여 Fig.7 (a)와 (b)에 나타냈다. Fig.7 (b)는 바이스펙트럼의 peak 를 보다 쉽게 판단할 수 있도록 Fig. 7 (a)를 위에서 본 것이다.

Fig.7 (b)의 왼쪽 하단을 보면 외팔보의 고유진동수 25.438Hz, 160.26Hz, 446.43Hz 와 두 주파수간의 상관 관계 ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$)가 있는 곳에 peak 가 명확하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 이에 비해 Fig 7 (c)~(f)의 경우를 보면 0.5L

위치에서 0.5B 까지 크랙 진전이 있는 외팔보와 0.7L 위치에서 0.5B 까지 크랙 진전이 있는 외팔보의 바이스펙트럼 결과이다. 크랙이 발생하면 크랙이 발생한 지점의 강성이 큰 영향을 받고, 모달 파라미터들이 변화를 가지게 된다. 따라서, 외팔보의 고유진동수 역시 변화를 가진다. 또한 하나의 peak 가 인접한 두 개의 peak 로 나뉘는 현상이 나타난다.



4. 결론

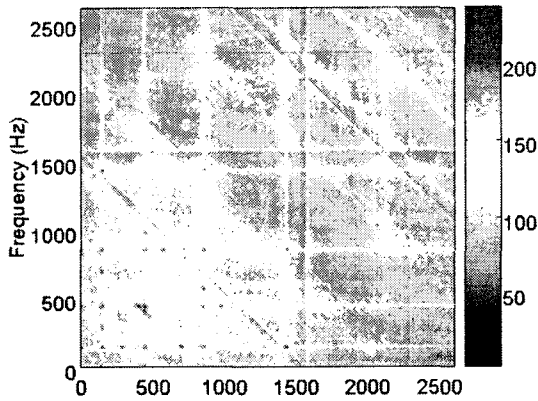
본 연구에서는 외팔보의 크랙이 발생시 크랙의 위치 및 진전에 따라 고유진동수의 변화를 Rayleigh 에너지법을 적용하여 살펴보고 실험에서 얻은 진동측정신호를 바이스펙트럼을 사용하여 분석 관찰하였고, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 굽힘에 의한 진동에 따른 외팔보의 고유진동수는 1 차, 2 차, 3 차 모드가 각각 크랙의 상태에 따라 다른 변화율을 보였다. Rayleigh 에너지법을 사용하여 고유진동수의 변화율을 관찰함으로써 외팔보의 크랙이 발생시 발생 위치와 진전 상태에 대한 감지가 가능하였다.

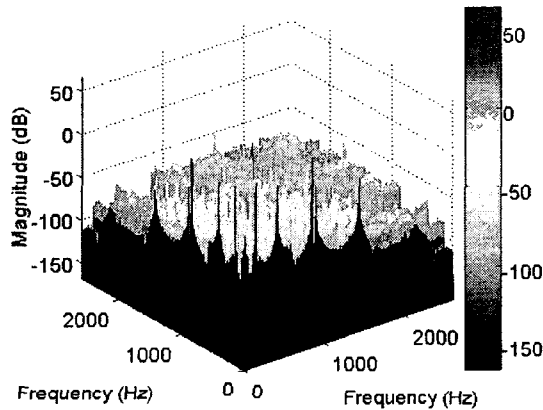
2) 본 연구를 통하여 바이스펙트럼 해석법이 크랙감지에 대하여 유용함을 확인하였고, 크랙의 발생 위치 및 진전 상태에 따라 바이스펙트럼 map 을 작성해 둔다면 크랙 발생시 위치 및 진전에 대한 감지가 더 정확한 해석이 가능할 것이다.

참고문헌

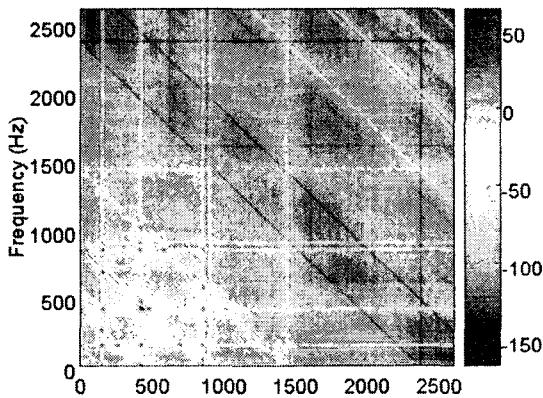
- (1) Francois Leonard, Jacques L., 2001, "Free-Vibration behaviour of A Cracked Cantilever Beam and Crack Detection", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(3), 529-548.
- (2) K. Lakshmi Narayana, and C. Jebaraj, 1999, "Sensitivity Analysis of Local/Global Modal Parameters for Identification of a Crack in a Beam", *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 977-994.
- (3) Melvin J. H., Hagit Messer, 1995, "On the Principal Domain of the Discrete Bispectrum of a Stationary Signal", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.43, No.9
- (4) Oh, J. E. and Lee, J. C., 1995, "A Study on the Fault Diagnosis of Rotating Machinery Using Neural Network with Bispectrum", *Trans. of the KSAE*, Vol. 3, No. 6, pp. 262~273.
- (5) Lee, J. C., Jung, J. H. and Oh, J. E., 1990, "A Study of Rotating Machine Using Bispectrum Analysis Method", *Trans. of the KICS*, Vol. 15, No. 7, pp. 581~601.
- (6) Rao, T. S. and Gabr, M. M., 1988, "The estimation of the bispectral density function and the detection of periodicities in a signal", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 27, Issue. 2, pp. 457~477.
- (7) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1993, "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis", John Wiley & Sons, New York.
- (8) Ha, J., 2006, "A Study on the Evaluation of the Interfacial Micro-delamination in a Semiconductor by Using Nonlinearity", Hanyang University.
- (9) D. P. Patil, S. K. Maiti, 2005, "Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements", *Journal of Sound and Vibration*, 281, 439-451.



(d) Bispectrum in cracked beam at 0.5L0.5B



(e) Bispectrum in cracked beam at 0.7L0.5B



(f) Bispectrum in cracked beam at 0.7L0.5B

Fig. 7 Bispectrum in the un-cracked and cracked beam

Fig. 7 (d)를 보면 peak 가 나타난 주파수가 이 동됨을 볼 수 있다. 또한 (f)에서는 하나의 peak 가 두 개의 인접한 peak 로 나뉘는 것을 확인할 수 있다.