

모달 파라미터를 이용한 보 구조물의 모델링

Modeling of Beam Structures from Modal Parameters

황우석†

Woo Seok Hwang

Key Words : Beam Structure(보 구조물), Modal Parameter(모달 파라미터), Modeling(모델링), Modal Analysis(모달 해석)

ABSTRACT

Accurate modeling of a dynamic system from experimental data is the bases for the model updating or health monitoring of the system. Modal analysis or modal test is a routine process to get the modal parameters of a dynamic system. The modal parameters include the natural frequencies, damping ratios and mode shapes. This paper presents a new method that can derive the equations of motion for a dynamic system from the modal parameters obtained by the modal analysis or modal test. The present method based on the relation between the eigenvalues and eigenvectors of the state space equation derives the mass, damping and stiffness matrices of the system. The modeling of a cantilevered beam from modal parameters is an example to prove the efficiency and accuracy of the present method. Using the lateral displacements only, not the rotations, gives limited information for the system. The numerical verification up to now gives reasonable results and the verification with the test data is scheduled.

1. 서 론

구조물의 모달 해석은 구조물의 동적 특성을 나타내는 모달 파라미터들을 구하는 과정이다[1]. 모달 파라미터에는 고유 진동수, 감쇠율, 진동 모드의 세 가지 값들이 있다.

모달 시험을 수행하고 이로부터 모달 파라미터들을 구하지만, 구조물의 모달 특성만을 이용하여 동적 현상의 발생 원인을 정확히 찾아 낼 수는 없다. 다만, 공진이 일어날 가능성이 있는지 여부와 공진시 거동만을 파악할 수 있다.

많은 노력을 들여 수행하는 모달 시험의 결과인 모달 파라미터를 공진 현상 파악에 제한적으로 사용할 것이 아니라, 동적 현상의 분석에 활용할 수 있는 방안을 찾는 많은 연구가 있어왔다. 그 대표적인 것이 모달 시험 결과를 이용한 해석 모델의 개선이다[2]. 또한 시스템의 손상에 따른 모달 파라미터의 변동을 추적하여 구조물의 건전성을 평가하는 분야에 대한 연구도 많은 진척이 있었다[3]. 이러한 분야의 연구들은 시스템 인식이라는 방법을 활용하고 있다[4]. 시스템 인식은 실험 데이터로부터 시스템의 수학적 모델을 만

들거나 개선하는 기법이다. 이 기법을 이용하여 동적 시스템에 대한 수학적 모델을 상태 방정식의 형태로 구할 수 있지만, 주어진 고유치와 고유 벡터를 갖는 상태 방정식은 무한히 많기 때문에 이로부터 시스템의 물리적 의미를 찾는 것은 불가능하다. 따라서, 시스템 인식에서 구한 시스템의 상태 방정식으로부터 물리적 의미를 갖는 질량, 감쇠 및 강성 행렬을 구하려는 노력이 있어왔다[5,6]. 하지만 이들은 수학적으로 매우 복잡하고 사용이 제한적인 경우가 많다.

본 연구에서는 복잡한 수학적 배경과 분석을 필요로 하는 시스템 인식 기법을 도입하지 않더라도 시스템의 개발과정에서 당연히 수행되는 모달 해석의 결과를 활용하여 시스템 방정식을 구하는 방법에 대한 연구를 수행하였다.

2. 이론

다자유도계 시스템의 운동 방정식은 식(1)과 같다.

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f \quad (1)$$

여기서, M, D, K 는 각각 시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬이고, f 는 외력 벡터이다. q 는 시스템의 변위를 나타내며, (\cdot) 는 시간에 대한 미분을 의미한다. 식(1)은 식(2)의 상태 방정식으로 쉽게 변환될 수 있다.

† 책임저자, 대구대학교 자동차산업기계공학부
E-mail : whwang@daegu.ac.kr
Tel : (053) 850-6672, Fax : (053) 850-6689

$$\dot{x} = Ax + h \quad (2)$$

여기서,

$$x = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$h = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f \end{Bmatrix}$$

이다. 식(2)는 복소수로 표현되는 고유치를 갖는 문제이며, 대각 고유치 행렬 A 와 고유 벡터 행렬 X 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$AX - X\Lambda = 0 \quad (4)$$

식(4)로부터 행렬 A 를 구하여 식(5)와 같이 표현한 후 식(3)의 행렬 A 와 비교하면 다음과 같은 관계를 구할 수 있다.

$$A = X\Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G = -M^{-1}K, \quad H = -M^{-1}D \quad (6)$$

식(6)로부터 시스템의 물리적 행렬인 M , D 와 K 행렬을 구하기 위하여 다음과 같은 세 가지 가정을 하였다.

- (1) 강성행렬은 대칭이다.
- (2) 질량행렬은 대각 행렬이다.
- (3) 전체 시스템의 질량을 알고 있다.

두 번째 가정으로부터 행렬 G 의 i -번째 행, j -번째 열의 요소는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{ij} = -k_{ij}/m_i \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

여기서, k_{ij} 는 미지인 강성행렬의 i -번째 행, j -번째 열의 요소이고, m_i 는 대각 질량 행렬의 i -번째 요소이다. 첫 번째 가정에서 강성행렬이 대각이라고 가정하였으므로, 전체 시스템에 대하여 식(8)과 같은 관계를 $(n-1)$ 개 유도할 수 있다.

$$\frac{G_{ij}}{G_{ji}} = \frac{m_j}{m_i} \quad (8)$$

식(8)은 대각 질량 행렬의 상호 크기에 대한 정보를 제공하며, 세 번째 가정으로부터 각 질량의 합이 전체 질량과 같다는 하나의 식이 더해져서 n 개의 식을 생성한다. 이로부터 n 개의 미지수로 구성된 대각 질량 행렬을 계산할 수 있다.

구해진 질량 행렬과 식(6)을 이용하여 강성 및 감쇠 행렬을 식(9)와 같이 계산할 수가 있다.

$$K = -MG, \quad D = -MH \quad (9)$$

3. 보의 모델링

보는 실제 구조물에서 가장 널리 사용되는 부재중 하나이다. 먼저, Fig.1에서와 같이 외팔보를 5개의 보 요소로 모델링하였다. 횡방향 변위와 회전만을 고려하여 절점당 2 자유도를 가지는 보의 단위 강성 행렬과 단위 질량 행렬은 식(10)과 같다.

$$M^e = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^2/12 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$K^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

이 단위 행렬을 5개의 요소에 대하여 어셈블 한 후, 경계 조건을 부가하면 외팔보의 운동 방정식을 구할 수 있다. 구해진 운동 방정식을 상태 방정식으로 변환한 후, 고유치 해석을 이용하여 모달 파라미터들을 계산하였다. 계산된 모달 파라미터들을 이용하여 시스템을 구성하니 정확하게 동일한 운동 방정식을 구할 수 있었다. 하지만 이 방법을 실제로 적용하는데 문제가 있음을 알 수 있다.

보의 굽힘을 해석하기 위해서는 보의 변위뿐만 아니라 회전도 고려하여야 한다. 하지만 실험에서는 변위 또는 가속도를 측정하는 것이 일반적이고 회전을 측정하는 경우는 매우 드물다. 이는 매우 정교한 고가의 장비와 특별한 노력이 필요하기 때문이다. 그러므로 실험에서 구한 모달 파라미터들에는 회전과 관련된 정보가 없는 것이 일반적이다. 본 예제에서는 이러한 상황을 수치적으로 재현하면서 개발된 방법의 유용성이나 정확도를 확인하였다.

실험적으로 모달 파라미터들을 구하는 과정을 수치적으로

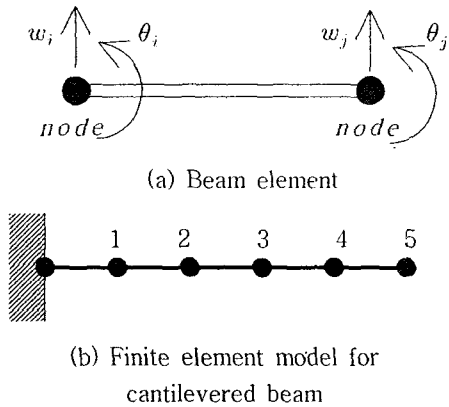


Fig.1 Beam Model

다음과 같이 재현하였다. Table 1의 물성치와 치수를 이용하여 유한요소 모델링으로 구한 운동 방정식을 Newmark- β 법으로 시간 적분하여 시간에 따른 각 절점의 운동을 계산하였다. 외팔보의 끝단에 0.001초동안 1000N의 충격이 가해졌을 때 보의 충격 응답을 구한 후, 이를 푸리에 변환하여 주파수 응답함수를 계산할 수 있다. 이 때, 실험에서 구할 수 없는 회전 자유도에 대한 응답은 배제하고 횡방향 운동 정보만을 이용한다. 계산된 주파수 응답으로부터 고유진동수와 감쇠비, 모드 형상을 구한다[7]. 주파수 응답 함수에서 피크가 생기는 주파수가 고유진동수이며, 이 때 피크치들을 모우면 모드 벡터를 구할 수 있다. 감쇠가 있을 경우, 주파수 응답함수의 피크가 명확하지 않고 감쇠비를 구하는 것이 복잡하므로, 본 예제에서는 감쇠가 없는 경우를 고려하였다. 실제 모달 시험에서 사용하는 분석 프로그램은 모달 파라미터를 추출하는 정교한 알고리즘을 갖추고 있으므로 감쇠가 포함된 실제 시스템을 분석할 수 있을 것이다. Fig.2는 구해진 모드 형상을 나타내고, Table 2는 유한요소 해석과 수치적 실험으로 각각 구한 고유진동수를 비교한 표이다. 식(5)를 이용하여 시스템 구성을 하기 위하여 고유진동수와 모드 형상을 다음과 같이 상태 변수의 형태로 변환한다.

$$X = \begin{Bmatrix} \phi \\ \Omega\phi \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서, ϕ 는 모드 형상이고 Ω 는 고유진동수와 감쇠비로부터 구한 고유치를 대각항으로 갖는 행렬이다. 실제 실험에서는 회전 자유도를 측정할 수 없으므로 횡방향 변위에 해당하는 고유진동수와 진동 모드만을 고려하였다. 그러므로 Fig.1(b)의 외팔보에 대한 애초의 운동 방정식은 10X10 크기의 시스템 행렬을 갖지만 구성된 운동 방정식은 5X5 크기의 시스템 행렬을 갖는다. 이 두 행렬식의 직접적인 비교는 불가능하므로 임의의 절점을 단위 힘으로 가력했을 때, 각 절점에서의 응답을 나타내는 주파수 응답함수를 계산하

Table 1 Material Properties and Dimension of Beam

Properties	Value
Young's modulus [N/m ²]	2.10×10 ¹¹
density [kg/m ³]	7860.
width [m]	0.03
height [m]	0.002
length [m]	0.4

Table 2 Comparison of natural frequencies (unit : Hz)

Mode number	1	2	3	4	5
Finite element analysis	10.2	58.8	151.8	273.6	413.7
Numerical experiment	10.4	58.6	151.4	272.8	411.4

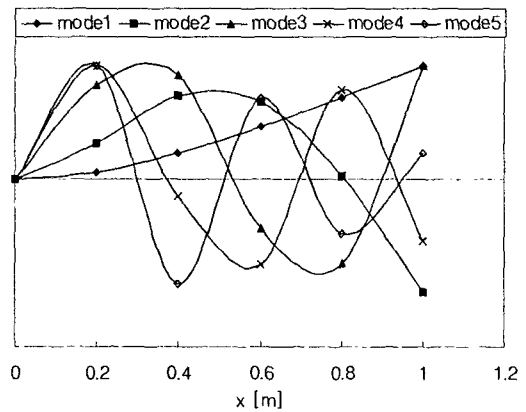


Fig.2 Modeshapes of a cantilevered beam

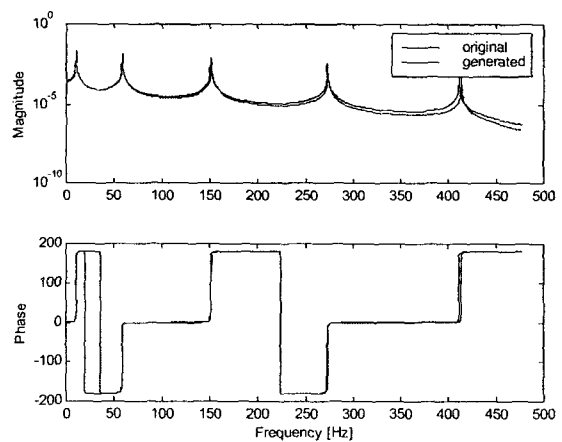


Fig.3 Frequency response function

여 비교하였다.

운동 방정식이 주어졌을 때, 주파수 응답함수는 식(12)를 이용하여 구할 수 있다.

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 M + j\omega D + K} \quad (12)$$

5번 절점을 단위 힘으로 가격했을 때 1번 절점의 응답을 나타내는 주파수 응답함수 $H_{1,5}(\omega)$ 를 원래 시스템 행렬과 구성된 시스템 행렬로부터 계산하여 비교하면 Fig.3과 같다. 구성에 사용된 5번째 모드까지 거의 차이가 없는 응답을 보임을 알 수 있다. 즉, 구성된 시스템의 행렬들이 애초 시스템 행렬의 동적 특성을 잘 나타내 주므로 모달 파라미터들로부터 시스템 행렬들이 잘 구성되었음을 알 수 있다.

4. 결론

동적 시스템의 개발 과정에서 당연히 수행되는 모달 해석이나 시험으로부터 구한 모달 파라미터들을 이용하여 시스템의 운동 방정식을 구성하는 새롭고 간단한 방법을 제시하였다.

시스템 인식 등의 분야에서 이러한 노력은 이미 있어왔지만, 수학적으로 매우 복잡하고 제약이 많은 경우가 대부분이었다. 본 논문에서 개발된 방법은 고유치와 고유 벡터의 기본적인 관계를 이용하여 간단한 행렬 연산만으로 시스템의 운동 방정식을 구성하는 능력을 보여준다.

외팔보 예제에서 보듯이 시스템의 전체 자유도에 해당하는 모든 모달 파라미터들을 구할 수 있다면 정확하게 시스템을 구성할 수 있었다. 외팔보 예제에서는 횡방향 변위만을 고려한 모드들로부터 시스템을 구성하였는데, 시스템의 동적 특성을 정확하게 재현하는 운동 방정식을 구성할 수 있음을 보여준다.

향후 실험적 오차가 수반된 모달 파라미터로부터 시스템을 어느 정도의 오차 범위에서 구성할 수 있는지에 대한 연구를 수행할 예정이고, 이 방법을 구조물의 건전성 평가나 해석 모델의 개선에 활용하는 방법에 대한 연구를 수행할 계획이다.

참 고 문 헌

- (1) Ewins, D.J., 2000, *Modal Testing*, 2nd Edition, Research Studies Press LTD, England.
- (2) Friswell, M.I. and Mottershead, J.E., 1995, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- (3) Kaouk, M., Zimmerman, D.C. and Simmermacher,

T.W., 2000, "Assessment of Damage affecting all Structural Properties using Experimental Modal Parameters," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.122, pp.456-463.

(4) Juang, J.-N., 1994, *Applied System Identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

(5) Alvin, K.F. and Park, K.C., 1994, "Second-order structural identification procedure via state-space-based system identification," *AIAA Journal*, Vol.32, No.2, pp.397-406.

(6) Lus, H., Angelis, M.D., Betti, R. and Longman, R.W., 2003, "Constructing Second-Order Models of Mechanical Systems from Identified State Space Realizations. Part I: Theoretical Discussions," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.129, No.5, pp.477-488.

(7) Gatzwiller, K. and Herlufsen, H., "How to determine the modal parameters of simple structures," Application Note, Bruel & Kjaer.