

다물체계의 평형위치에서 고유진동수에 대한 공차해석

Tolerance Analysis for Natural Frequencies of Multi-body Systems in Dynamic Equilibrium State

엄승만*·최동환**·유홍희†

Seung Man Eom, Dong Hwan Choi and Hong Hee Yoo

Key Words : Tolerance Analysis(공차해석), Natural Frequency(고유진동수), Dynamic Equilibrium State(동적평형상태), Sensitivity Analysis(민감도해석), Multi-body Systems(다물체계)

ABSTRACT

Tolerance analysis method for natural frequencies of multi-body systems having a equilibrium position is suggested in this paper. To perform the tolerance analysis, the Monte-Carlo Method is conventionally employed. However, the Monte-Carlo Method has some weakness; spending too much time for analysis and having a low accuracy and hard to converge in the numerical unstable area. To resolve these problems, a tolerance analysis method is suggested in this paper. Sensitivity equations of natural frequencies are derived at the equilibrium position. By employing the sensitivity information of mass, damping and stiffness matrices, the sensitivity of natural frequencies can be calculated.

1. 서론

오늘날 공차 해석은 기계시스템의 설계에 있어서 필수적인 해석이 되고 있다. 제조공차는 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미치고 있기 때문이다. 일반적으로 공차해석을 수행하기 위해서 몬테카를로법(Monte-Carlo Method)을 사용한다. 그러나 몬테카를로법을 사용하게 되면 해석시간이 오래 걸리고 수치적으로 불안정한 영역에서는 표본(sample)의 조건에 따라 그 해가 수렴하지 않고 발산하거나 결과를 얻었다 하더라도 정확하지 않은 결과를 얻게 되는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해 본 논문에서는 유한차분법(Finite Difference Method)을 이용한 공차해석 방법을 제안하였다. 제안된 방법을 수행하기 위해서는 설계변수에 대한 고유진동수의 민감도 정보가 필요하며, 공차해석을 위해 표본이 아닌 민감도 정보를 사용하므로 해석결과가 표본에 의해 영향을 받지 않는다.

제안된 공차해석 방법을 수행하기 위해, 우선 기계시스템의 동적평형상태(dynamic equilibrium

state)에서의 동적평형위치(dynamic equilibrium position)를 구해야 한다. 동적평형위치는 평형방정식에⁽¹⁻⁴⁾ 의하여 구하였으며, 동적평형상태에서 선형화를 수행하였다. 선형화를 통해 질량행렬(mass matrix)과 강성행렬(stiffness matrix)을 구하였다.⁽⁴⁾ 구해진 질량행렬과 강성행렬을 유한차분법(FDM)을 이용하여 설계변수에 대한 민감도를 구하였으며 이를 이용하여 고유진동수의 설계변수에 대한 민감도를 구하였으며,⁽⁵⁻⁶⁾ 구해진 설계변수에 대한 고유진동수의 민감도 정보를 이용하여 공차해석을 수행하였다. 제안된 방법과 몬테카를로법(Monte-Carlo method)에 의한 공차해석 결과를 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증하였으며, 제안된 방법을 사용하였을 경우 해석시간을 크게 줄일 수 있음을 확인하였다. 또한 제안된 방법을 사용할 경우, 몬테카를로법을 사용하였을 경우 나타났던 문제점인 수치적 불안정영역에서의 발산과 표본의 조건에 따른 발산문제 및 해석결과와 부정확성 등의 문제점을 해결할 수 있었다.

2. 운동방정식

일반적으로 절대좌표계에 대한 구속 다물체계의 운동방정식은 다음과 같은 확장 라그랑지 운동방정식으로 표현된다.

† 책임저자; 정희원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** Carnegie Mellon University

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \Phi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

위 식에서 \mathbf{M} 은 시스템의 관성행렬(system inertia matrix), \mathbf{Q} 는 일반력(generalized force), $\Phi_{\mathbf{x}}$ 는 절대좌표에 대한 구속방정식의 자코비안행렬(Jacobian matrix), 그리고 $\boldsymbol{\lambda}$ 는 라그랑지 승수(Lagrange multipliers)이다.

본 논문에서는 일반좌표 q_i 를 물체 i 와 물체 i 의 기준물체(reference body) 사이의 조인트 형태에 따라 정의되는 상대좌표로 사용하였다. 일반적으로 시스템의 절대속도 $\dot{\mathbf{x}}$ 는 시스템의 일반속도 $\dot{\mathbf{q}}$ 와 다음과 같은 속도변환관계식⁽⁷⁻⁸⁾ 가 진다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{B} 는 속도 변환행렬이다.

본 논문에서는 일정 일반속력으로 구동되는 시스템의 운동방정식을 구하기 위하여 일반좌표를 다음과 같이 분할 하였다.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_D^T & \mathbf{q}_R^T \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

여기서 \mathbf{q}_D 는 일정 일반속력의 구동구속조건을 갖는 좌표를, \mathbf{q}_R 은 나머지 일반좌표를 나타내는데, Fig. 1 에 간단한 시스템을 이용하여 예를 도시하였다. 따라서 시스템의 절대속도 $\dot{\mathbf{x}}$ 와 절대가속도 $\ddot{\mathbf{x}}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{B}_R \dot{\mathbf{q}}_R \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{B}_R \ddot{\mathbf{q}}_R + \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\mathbf{B}}_R \dot{\mathbf{q}}_R \quad (5)$$

여기서 $\dot{\mathbf{q}}_D$ 는 일정 일반속력을 나타내며 \mathbf{B}_D 와 \mathbf{B}_R 은 다음과 같이 \mathbf{B} 를 구성한다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_D & \mathbf{B}_R \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (5)를 운동방정식 (1)에 대입하고 식의 좌우변에 \mathbf{B}_R^T 를 곱하면, 개방계에 대한 운동방정식은 일반좌표 \mathbf{q}_R 에 대하여 다음과 같이 정리된다. (상세 과정은 참고문헌[2]을 참조할 것)

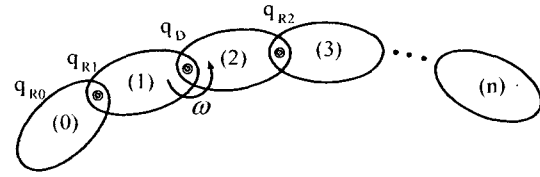


Fig. 1 Generalized coordinates \mathbf{q}_D and \mathbf{q}_R

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{Q}^* \quad (7)$$

여기서 \mathbf{M}^* 와 \mathbf{Q}^* 는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{B}_R^T \mathbf{M} \mathbf{B}_R \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{B}_R^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \mathbf{B}_D \ddot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{M} \mathbf{B}_R \ddot{\mathbf{q}}_R - \dot{\mathbf{M}} \mathbf{B}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \dot{\mathbf{M}} \mathbf{B}_R \dot{\mathbf{q}}_R) \quad (9)$$

3. 평형해석

동적 평형을 가지는 시스템이 일정일반속력으로 구동될 때, 평형위치를 구하기 위한 평형방정식은 평형위치에서 $\ddot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{0}$ 이 모두 영이 되고 일정일반속력으로 구동되므로 $\ddot{\mathbf{q}}_D = \mathbf{0}$ 이다. 이를 운동방정식 (7)에 대입하면 다음과 같은 평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B}_R^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

4. 선형화

일정 일반속력으로 구동되는 개방계에 대한 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{Q}^* \quad (11)$$

이 식은 다음과 같이 좀더 일반화된 함수로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{g}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_D, t) = \mathbf{0} \quad (12)$$

식 (12)를 평형위치 q^* 에서 선형화하면 다음과 같다.

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_R} \Big|_q \delta \ddot{\mathbf{q}}_R + \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}_R} \Big|_q \delta \dot{\mathbf{q}}_R + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}_R} \Big|_q \delta \mathbf{q}_R = 0 \quad (13)$$

따라서 개방계에 대한 선형방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{M}} \delta \ddot{\mathbf{q}}_R + \hat{\mathbf{C}} \delta \dot{\mathbf{q}}_R + \hat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{q}_R = 0 \quad (14)$$

여기서 $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{K}}$ 는 각각 선형화된 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬로 이들 행렬은 각각 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{\partial g}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_R} \Big|_q = \mathbf{B}_R^T \mathbf{M} \mathbf{B}_R \Big|_q \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}_R} \Big|_q = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_R} \mathbf{B}_R^T [\mathbf{M} \mathbf{B}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}] \Big|_q \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}_R} \Big|_q = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_R} \mathbf{B}_R^T [\mathbf{M} \mathbf{B}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}] \Big|_q \quad (17)$$

5. 민감도해석 및 공차해석

5.1 비감쇠 시스템의 민감도 해석

비감쇠 시스템에서 고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{K}} \phi_j = \lambda_j \hat{\mathbf{M}} \phi_j \quad (18)$$

여기서 ϕ_j 와 λ_j 는 각각 정규화된 모드벡터와 고유치이다.

식 (18)을 설계변수 b 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$(\hat{\mathbf{K}} - \lambda_j \hat{\mathbf{M}}) \frac{\partial \phi_j}{\partial b} \phi_j = - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial b} - \lambda_j \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}}{\partial b} \right) \phi_j + \frac{\partial \lambda_j}{\partial b} \hat{\mathbf{M}} \phi_j \quad (19)$$

식 (19)의 양변에 ϕ_j^T 를 곱하면 식(18)과 정규화조건($\phi_j^T \hat{\mathbf{K}} \phi_j = 1$)에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial b} = \phi_j^T \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial b} - \lambda_j \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}}{\partial b} \right) \phi_j \quad (20)$$

따라서 고유진동수 (ω_n)의 민감도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega_{n_j}}{\partial b} = \frac{1}{2\omega_{n_j}} \phi_j^T \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial b} - \lambda_j \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}}{\partial b} \right) \phi_j \quad (21)$$

본 논문에서는 비감쇠 시스템의 민감도 해석만을 수행하였다.

5.2 해석적 공차 해석

고유진동수의 민감도 방정식을 다음과 같이 정의하였다.

$$S = \frac{d\omega_{n_j}}{db} \quad (26)$$

설계변수의 표본(sample)이 정규분포(normal distribution)를 따르고 확률변수가 99.73%의 신뢰구간을 갖는 경우의 분산은 다음과 같다. (상세 과정은 참고문헌[3]을 참조할 것)

$$\sigma^2 = \frac{1}{9} S^2 T^2 \quad (27)$$

여기서 T 는 설계변수 b 의 공차를 σ 는 표준편차(standard deviation)을 나타낸다.

6. 수치예제

6.1 일정각속도를 갖는 Simple Pendulum

Fig. 2 는 일정 각속도 Ω 로 구동되어지는 rotating simple pendulum 을 나타낸다. 바(bar)의 질량과 길이는 각각 $m=3\text{kg}$, $L=1\text{m}$ 이고 회전축과 회전조인트(revolute joint)로 연결되어 있다. 바와 회전축의 사이각을 θ 로 하였으며 초

기값은 $\pi/3$ rad 이다. 해석의 편의를 위하여 회전축은 가상강체(virtual rigid body)로 가정하였으며 회전축은 지면과 회전조인트로 연결되어 일정 각속도 Ω 로 회전하고 있다. Fig. 3 과 Fig. 4 는 각각 회전각속도에 따른 동적평형위치에서의 θ 값과 고유진동수(natural frequency)를 나타낸 그래프이다. 2.712rad/s 에서 공진이 발생하며, 3.835 rad/s 에서 고유진동수가 0 에 가까워진다. 이는 3.835rad/s 에서 강성이 0 에 가까워지기 때문이다. Fig. 5 는 해석해와 몬테카를로법을 이용한 결과를 비교한 것으로 바의 길이가 3%, 6%, 12%의 제조공차를 가질 때 각각 회전각속도에

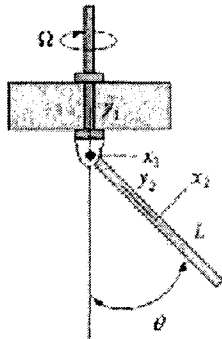


Fig. 2 Rotating simple pendulum

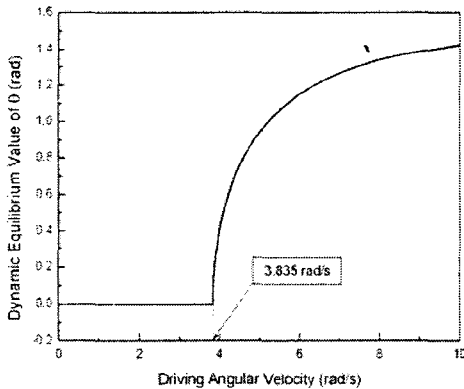


Fig. 3 Dynamic equilibrium value of θ versus angular velocity

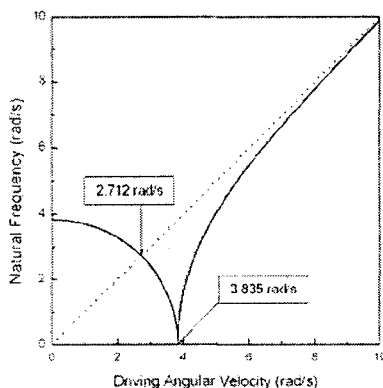


Fig. 4 Natural frequency versus angular velocity

고유진동수의 평균값을 나타낸다. 몬테카를로법을 사용하기 위해서 정규분포를 따르는 3,000 개의 표본이 사용되었다.

Fig. 6 은 바의 길이가 3%공차를 가질 때 입력각속도에 따른 ω_n 의 표준편차를 나타낸 것이며 3.835rad/s 근방에서 수치적 불안정성으로 인하여 몬테카를로법의 결과가 잘 맞지 않다는 것을 확인할 수 있다. 반면 제안된 방법은 해석해와 일치하는 것을 확인할 수 있다.

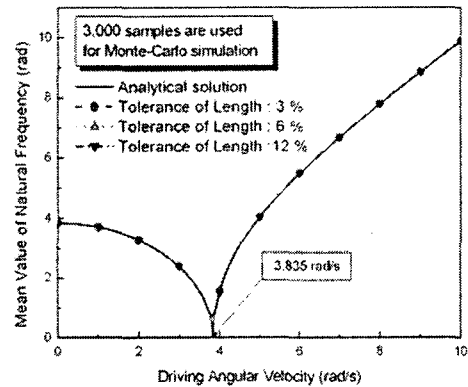


Fig. 5 Mean value of natural frequency versus angular velocity

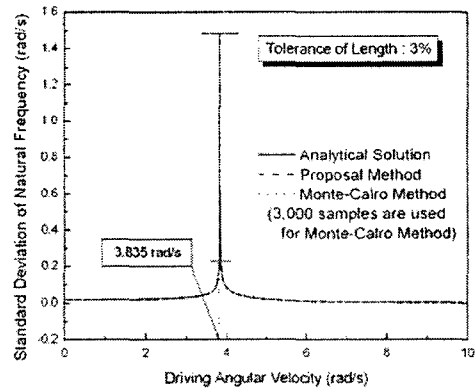


Fig. 6 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

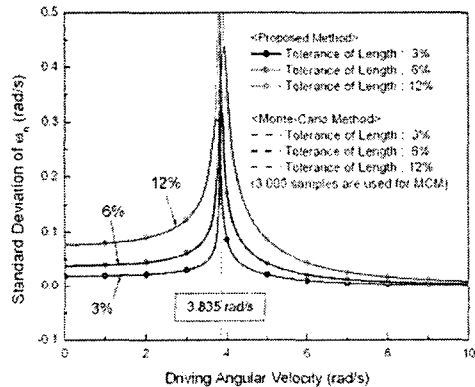


Fig. 7 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

Fig. 7 은 바의 길이가 3%, 6%, 12%의 공차를 가질 때 입력각속도에 따른 ω_n 의 표준편차를 나타낸 것이다. 3.835 rad/s 근방을 제외하고는 모두 잘 맞는 것을 확인할 수 있다. Table 1 은 제안된 방법과 몬테카를로법에 의한 공차해석 시간을 비교한 결과이며 제안된 방법이 몬테카를로법보다 훨씬 더 효율적임을 확인할 수 있다.

6.2 일정각속도를 갖는 Double Pendulum

Fig. 8 는 일정 각속도 Ω 로 구동되어지는 rotating double pendulum 을 나타낸다. 두 개의 바(bar)의 질량과 길이는 각각 $m=3\text{kg}$, $L=1\text{m}$ 이고 서로 회전조인트로 연결되어 있다. 그리고 회전축 첫 번째 바와 회전조인트로 연결되어 있으며 회전축은 지면과 회전조인트로 연결되어 있다. 첫 번째 바와 회전축과의 사이각을 θ_1 , 두 번째 바와 회전축과의 사이각을 θ_2 라 하였으며 초기값은 모두 $\pi/3\text{rad}$ 이다. 해석의 편의를 위하여 회전축은 가상강체로 가정하였으며 회전축은 지면과 회전조인트로 연결되어 일정각속도 Ω 로 회전하고 있다. Fig. 9 과 Fig. 10 는 각각 회전각속도에 따른 동적평형위치에서 θ 값과 고유진동수를 나타낸 그래프이다. 1.895rad/s 에서 공진이 발생하며, 2.679 rad/s 에서 고유진동수가 0 에 가까워진다.

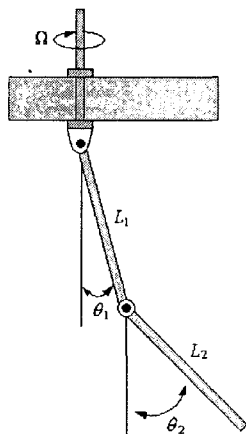


Fig. 8 Rotating double pendulum

Table 1 Comparison of CPU time between proposed method and Monte-Carlo Method

Method	CPU Time (sec)	Ratio
Proposed Method	1.328	1
Monte-Carlo Method	1565.797 (0.435 hours)	1179

이는 2.679 rad/s 에서 강성이 0 에 가까워지기 때문이다. Fig. 11 는 해석해와 몬테카를로법을 이용한 결과를 비교한 그래프로 바의 길이가 3%, 6%, 12%의 제조공차를 가질 때 회전각속도에 따른 고유진동수의 평균값을 나타낸다. 몬테카를로법을 사용하기 위해서 정규분포를 따르는 3,000 개의 표본이 사용되었다. Fig. 12 와 Fig. 13 은 제안된 방법과 몬테카를로법에 의한 공차해석 결과

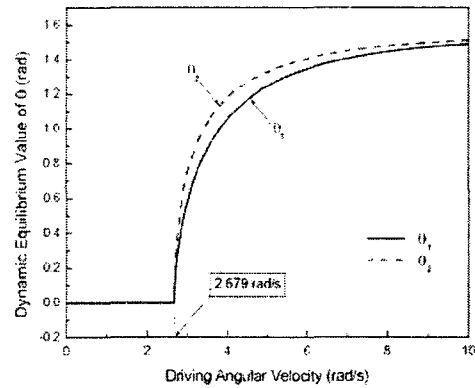


Fig. 9 Dynamic equilibrium value of θ_1 and θ_2 versus angular velocity

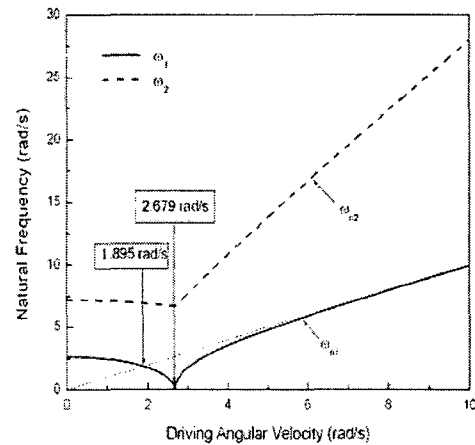


Fig. 10 Natural frequency versus angular velocity

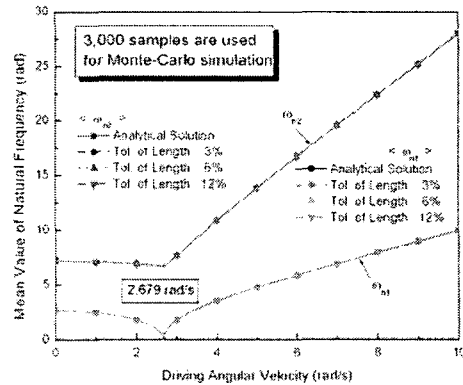


Fig. 11 Mean value of natural frequency versus angular velocity

를 비교한 그래프이며 Fig. 12 는 회전각속도에 따른 1 차 고유진동수 ω_{n1} 의 표준편차를 나타낸 그래프 이며, Fig. 13 은 회전각속도에 따른 2 차 고유진동수 ω_{n2} 의 표준편차를 나타낸 그래프이다. 두 결과가 수치적으로 불안정한 영역인 2.679rad/s 근방에서 서로 잘 맞지 않는 결과를 보여주고 있으나 그 이외의 영역에서는 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. Table 2 는 제안된 방법과 몬테카를로법에 의한 공차해석 시간을 비교한 결과이며 제안된 방법이 몬테카를로법보다 훨씬 더 효율적임을 확인할 수 있다.

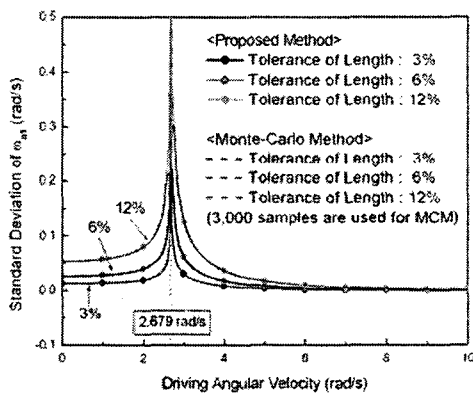


Fig. 12 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

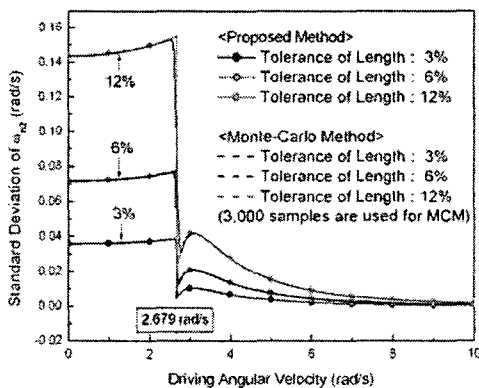


Fig. 13 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

Table 2 Comparison of CPU time between proposed method and Monte-Carlo Method

Method	CPU Time (sec)	Ratio
Proposed Method	11.297	1
Monte-Carlo Method	15979.270 (4.439 hours)	1414

7. 결론

본 논문에서는 일정 일반속력을 갖는 다물체계의 동적평형상태에서의 공차해석 방법을 제안하였다. 동적평형해석을 위해 평형방정식이 사용되었으며 동적평형위치에서의 선형화를 통하여 고유진동수를 구하였다. 또한 유한차분법을 이용하여 설계변수에 대한 고유진동수의 민감도해석을 수행하였고 구해진 민감도 정보를 이용하여 공차해석을 수행하였다. 본 논문에서 제안된 공차해석방법을 사용하였을 경우 몬테카를로법보다 해석시간이 빠르다는 것을 확인하였고 수치적으로 불안정한 영역에서 몬테카를로법보다 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

후기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Haug, E. J., 1989, "Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems," Volumn I: Basic Method, ALLYN AND BACON.
- (2) Choi, D. H., Park, J. H., and Yoo, H. H., 2002, "Steady-State Equilibrium Analysis of a Multibody System Driven by Constant Generalized Speeds," KSME International Journal, Vol. 16, No. 10, pp. 1239~1245.
- (3) Choi, D. H., 2005, "Statistical Tolerance Analysis and Modal Analysis of Multibody Systems," Hanyang University, Ph. D. Thesis.
- (4) Choi, D. H., Park, J. H., and Yoo, H. H., 2005, "Modal Analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Rotational Motion," Journal of Sound and Vibration, Vol. 208, pp. 63-76.
- (5) Plaut, R. H., and Husseyin, K., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-self-adjoint System," AIAA Journal, Vol. 11 (1973), pp. 250
- (6) Rudisill, C. S., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Matrix," AIAA Journal, Vol. 12 (1974), pp. 721
- (7) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol. 108, pp. 176~182.
- (8) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics : Part I. Open Loop Systems," Mech. Struct. & Mach., Vol. 15, No. 3, pp. 359~382.