

비선형 에크만 분출 모델

박재현⁺·김정환⁺⁺·김동균⁺⁺⁺·배석태⁺⁺⁺⁺·김정렬⁺⁺⁺⁺

Non-Linear Ekman Pumping Model

Jae-Hyoun Park⁺, Jung-Hwan Kim⁺⁺, Dong-Kyun Kim⁺⁺⁺,
Suk-Tae Bae⁺⁺⁺⁺ and Jung-Ryul Kim⁺⁺⁺⁺

Abstract : Developed in this study is a nonlinear Ekman pumping model to be used in simulating the rotating flows with quasi-three-dimensional Navier-Stokes equations. In this model, the Ekman pumping velocity is given from the solution of the Ekman boundary-layer equations for the region adjacent to the bottom wall of the flow domain; the boundary-layer equations are solved in the momentum-integral form. The developed model is then applied to rotating flows in a rectangular container receiving a time-periodic forcing. By comparing our results with the DNS and experimental data we have validated the developed model. We also compared our results with those given from the classical Ekman pumping model. It was found that our model can predict the rotating flows more precisely than the classical linear model.

Key words : rotating flow(회전유동), nonlinear Ekman pumping model(비선형 에크만 분출 모델), momentum-integral method(운동량 적분법)

1. 서론

van Heijst 연구그룹^(1,2)과 Suh의 연구그룹에 의해 개발된 Ekman 분출모델은 Ekman 경계층의 방정식을 선형화 하여 해석적으로 해를 구할 수 있는 형태로 만들기 위해 낮은 Rossby 수를 가정하였기 때문에 원칙적으로 Rossby 수가 낮은 경우에 대해 그 적용성이 타당 시 된다. 따라서 이 모델을 이용한 2차원 지배 방정식을 Rossby 수가 1에 근접하거나 클 경우, 특히 배경 회전속도가 시간적으로 변동하는 주기유동의 경우에는 낮은 Rossby 수에서도 오차가 상당한 것으로 보고된 바 있다. 본 연구에서는 이를 개선하기 위해서 Ekman 경계층에 대한 비선형 방정식의 해를 운동량적분법으로 구하고 이로부터 Ekman 분출 속도를 구한 뒤 2차원 지배방정식에 적용하는 새로운 수치해석 방법으로 해를 구하고자 한다.

2. 유동모델 및 지배방정식

2.1 유동모델

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 유동모델과 좌표계와 시간에 따른 용기의 각속도 변화를 나타낸 것이다. H 는 수심, L 은 용기의 세로방향(y^* -방향) 길이, aL 은 용기의 가로방향(x^* -방향) 길이이며, a 는 용기의 종횡비이다.

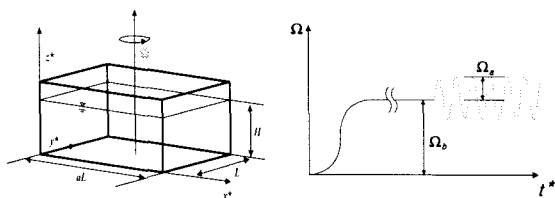


Fig. 1 Schematic diagram of the model basin and angular velocity of the turn table.

동점성계수 ν 인 유체가 담긴 직사각형 용기는 $x^* = aL$, $y^* = L/2$ 인 중앙 축 둘레로 회전하며, 회전각속도는 $\Omega(t) = \Omega_b + \Omega_a \sin \omega^* t$ 와 같이 배경회전 Ω_b 에 진폭 Ω_a , 각속도 ω^* 로 변동하는 각속도가 덧붙여진다.

2.2 지배방정식

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{1a}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} V - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} v \tag{1b}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} V - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} u \tag{1c}$$

$$U = u[1 - g(z)] - qf(z)\sin\theta \tag{2a}$$

$$V = v[1 - g(z)] + qf(z)\cos\theta \tag{2b}$$

여기서 θ 는 경계층 밖의 속도벡터 u 가 x -축과 이루는 각을 나타낸다. 한편, 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 Anderson 등⁽⁵⁾이 축대칭 용기에 대해 적용한 수식으로서 다음과 같다.

$$f = \exp(-z/\delta_1) \sin(z/\delta_2) \tag{3a}$$

$$g = \exp(-z/\delta_1) \cos(z/\delta_2) \tag{3b}$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1, \quad f(\infty) = g(\infty) = 0 \tag{3c}$$

Ekman 분출 속도를 구하기 위해 Ekman 경계층 유동의 지배방정식인 식(1a)-(1c)에 식(2a)-(2c)를 대입한 뒤 운동량적분

+ 박재현, ((재)한국조선기자재연구원), E-mail: parkjh@komeri.re.kr, Tel: 051)405-6880
 ++ 김정환, ((재)한국조선기자재연구원)
 +++ 김동균, (교수, 동명대학교 기계공학과)
 ++++ 배석태, (교수, 동명대학교 항만물류학부)
 +++++ 김정렬, (연구개발센터장, (재)한국조선기자재연구원)

법(momentum-integral method)을 이용하여 δ_1 과 δ_2 에 대해 나타내면

$$2\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)v\right\}I_1+u_1\left\{\zeta+2\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)\right\}I_2- \\ \left\{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right\}I_3-\left\{\frac{\partial v_1^2}{\partial x}-\frac{\partial u_1v_1}{\partial y}\right\}I_4 \\ -2u_1\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}I_5-uI_6+vI_7=0 \quad (4a)$$

$$2\left\{u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)u\right\}I_1+v_1\left\{\zeta+2\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)\right\}I_2- \\ \left\{u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right\}I_3-\left\{\frac{\partial v_1^2}{\partial y}-\frac{\partial u_1v_1}{\partial x}\right\}I_4 \\ -2v_1\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}I_5-vI_6-uI_7=0 \quad (4b)$$

$$I_1=\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1^2+\delta_2^2}, \quad I_2=\frac{\delta_1^2\delta_2}{\delta_1^2+\delta_2^2}, \\ I_3=\frac{\delta_1^3+2\delta_1\delta_2^2}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)}, \quad I_4=\frac{\delta_1^3}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)} \quad (4c) \\ I_5=\frac{\delta_1^2\delta_2}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)}, \quad I_6=\frac{1}{\delta_1}, \quad I_7=\frac{1}{\delta_2}$$

와 같으며 식(4a)~(4c)로부터 구한 두 미지수 δ_1 과 δ_2 를 이용하여 Ekman 분출 속도는 다음으로부터 구할 수 있다.

3. 결과 및 검토

3.1 Periodic flow in a rectangular container with no-slip boundary condition에 대한 수치해

본 연구에서는 $Re=2356$, $\epsilon=0.3$, $h=\omega=0.4$ 에 대해서 수치해석을 수행하였으며 이 parameter에 대한 유동은 Suh 등에 의해서 선행 연구에서 선형 Ekman 분출 모델로 해석할 경우, 오차가 상당한 것으로 보고된 바 있다.

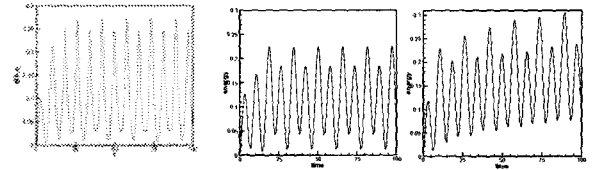
Fig. 2는 공간평균운동에너지를 비교한 것으로서 비선형 Ekman 분출 모델의 경우, 에너지 수치가 3차원 결과에 비해서 약간 낮은 값을 보이지만 선형 Ekman 분출 모델과는 달리, 초기에 주기성이 나타남을 알 수 있다. 이것은 유동의 성장과 발달을 억제하는 댐핑(damping)효과를 나타내는 Ekman 분출 속도가 비선형 Ekman 분출 모델에서 잘 나타나고 있음을 뜻하며 이는 Fig. 3과 4을 통해서도 확인된다.

Fig. 3은 한 주기 동안의 속도벡터를 나타낸 것으로 비선형 Ekman 분출 모델의 결과가 실험 및 3차원 수치해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 특히 선형 Ekman 분출 모델에서 나타나는 보텍스의 merging 현상이 관찰되지 않음을 알 수 있다. Fig. 4은 경계층의 두께인 δ_1 과 δ_2 를 나타낸 것으로 보텍스가 발생, 와도가 큰 지역에서 큰 값을 보인다.

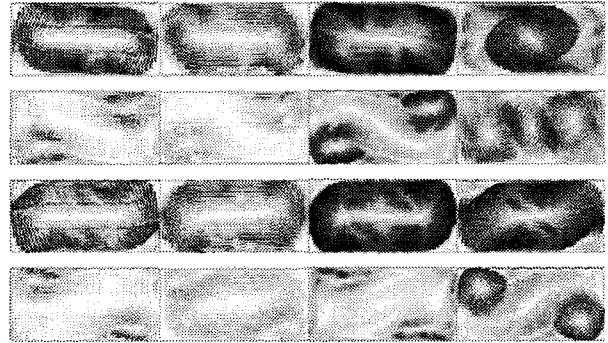
위의 결과를 통해서 알 수 있듯이, 주유동의 성장 및 발달을 방해하는 Ekman 분출 속도는 $2w_E=\zeta\sqrt{\epsilon/Re}$ 으로 와도와 Rossby 수의 함수이며, Rossby 수는 $\delta=\sqrt{\epsilon}$ 와 같이 경계층 두께에 대한 함수이다. 따라서 본 연구를 통해서 개발된 비선형 Ekman 분출 모델은 와도뿐만 아니라 경계층 두께의 변화가 Ekman 분출 속도에 미치는 영향을 효과적으로 나타냄으로서 실험 및 3차원 수치해석과 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

참고문헌

1. van Heijst, G.J.F., 1989, "Spin-up phenomena in



(a) 3D (b) 2D(Non-linear) (c) 2D(Linear)
Fig. 2 Time history of the spatially averaged kinetic energy at $Re=2356$, $\epsilon=0.3$, $h=0.4$, $\omega=0.4$



(a) 3D (b) PIV (c) Non-linear (d) Linear
Fig. 3 Velocity vectors on the free surface at $Re=2356$, $\epsilon=0.3$, $h=0.4$, $\omega=0.4$

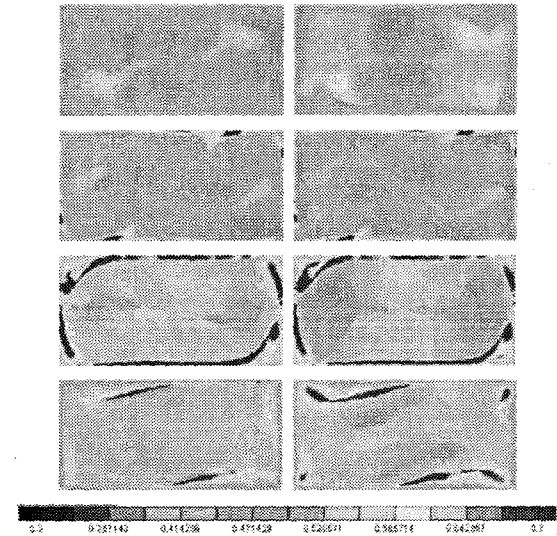


Fig. 4 The boundary layer thickness δ_1 (left), δ_2 at $Re=2356$, $\epsilon=0.3$, $h=0.4$, $\omega=0.4$

non-axisymmetric containers", *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 171~191.
2. Zavala sanzon, L. and van Heijst, G.J.F., 2000, "Nonlinear Ekman pumping effects in rotating barotropic flows", *J. Fluid Mech.*, Vol. 412, pp. 75~91.