AHP를 이용한 최적 의사결정에 관한 연구

On the Optimal Decision making by the AHP

정 순 석*

Chung, Soon-Suk

Abstract

We study on the consistency of AHP. It is research that extend of SAW methods by [1]. For tools that measure judgment of inconsistency eigenvector methods, we research consistency that introduced consistency ratio by Saaty. in general, the higher consistence of compare matrix the bigger error within matrix. In this paper, we use the AHP for the optimal decision making. By this method, we have optimal decision making numenical example which three models of any domestic motors companies.

* 충주대학교 산업경영공학과 교수

1. 서론

다 요소 의사결정 방안인 계층화 분석과정(Analytic Hierarchy Process :AHP)은 대안과 평가기준의 쌍 비교를 통해 각각의 중요도를 도출한다.

현재의 계층화 분석과정은 다목적 의사결정을 다루는 가장 중요한 의사결정분석 기법중 하나이다. 이 방법은 응용분야가 매우 넓어서 전반적으로 모든 의사결정 문제를 포괄하고 있으며, 이들 응용분야 중에는 기업 의사결정 문제는 물론이고 정부기관 및 비영리 조직 단체도 포함되며 특히, 경영, 경제, 사회분야의 계량화 할 수 있거나 또는 계량화 할 수 없는 더 나아가서 감지 곤란한 평가기준을 지니고 있는 의사결정 문제 즉, 비구조적 의사결정 문제를 모형화 하는데 주요한 수단이 되고 있다. 그리고 계층화 분석과정은 의사결정을 할 때 인간의 경험이나 지식이 주어진 문제에 사용되는 데이터에 못지않게 중요한 가치를 지니고 있다는 사고에 토대를 두고 있으며 최근 들어 계층화분석과정은 상호작용 의사결정지원 시스템과 마이크로컴퓨터에 토대를 둔 기법으로 더욱 발전적으로 확장됨에 따라 이 기법은 다목적 의사결정 문제를 다루는데 있어 강력하고도 가장 널리 이용되고 있는 도구 중의 하나가 되었다고 볼 수 있다.

계층화 분석과정이 성공적으로 널리 사용되게 된 데에는 무엇보다도 이 이론이 지니고 있는 단순성과 견고성의 결과라고 볼 수 있다. 이 이론은 Saaty[5]에 의해 소개된 일련의 공리에 기반을 두고 있으며 이들 기본적인 일련의 가정은 계층화 분석과정의 이론적 기초를 제공하며 또는 계층화 분석과정의 발전에 매우 중요한 공헌을 하였다.

계층화 분석과정은 여러 부문에 걸쳐 다양한 발전을 거듭해 왔으며 또한, 이에 대한 비판도 다양하게 행해져 왔다. 이 이론은 기업체를 포함한 모든 조직체의 여러 계획분야에 이용되고 있어 그 유용성이 널리 인정되고 있지만 실용적인 측면에서 볼 때 몇 가지 개선해야 될 점을 안고 있다. 첫 번째로 비교하기 어려운 요소에 대해서도 쌍 대응비교를 행하지 않으면 안 된다는 점을 들 수 있다. 즉, 계층화 분석과정에서는 의사결정자가 모든 쌍 대응 비교를 시행할 수 있다는 전제를 두고 있지만 상황에 따라서는 쌍 대응 비교를 용이하게 시행할 수 없는 경우도 있다.

가령, A는 B보다도 '약간 중요' (3배의 가중치)한 것인지 '중요' (5배의 가중치)한 것인지의 판단을 내리기가 곤란한 경우가 적지 않게 존재한다.

두 번째로 들 수 있는 것은 평가기준이나 대안의 수가 클 경우에는 쌍 대응 비교의

회수가 매우 커진다는 점이다. 이를 해결하는 방법의 하나로 Harden[2]의 불완전 쌍 대응 비교법과 Millet-Harden[4]의 방법이 있지만 이들 방법은 가중치의 계산 량의 과다, 일치성 측면에서 볼 때 문제를 안고 있다.

세 번째는 모든 쌍 대응 비교가 완료될 때까지, 일치성을 만족하지 못하는 쌍 대응 비교의 검토 및 수정을 시행하지 않는다는 점이다. 말하자면, 계층화 분석과정에서는 모든 쌍 대응 비교가 종료되기까지의 일치성을 띄지 않는 쌍 대응 비교치에 대한 검토나 수정을 하지 않는다. 그러나 보다 바람직한 경우는 쌍 대응 비교를 행하고 있는 과정 중에 쌍 대응 비교치를 점검해 가면서 필요할 때마다 수정 할 수 있어야 한다. 그러나 이러한 문제점을 안고 있음에도 불구하고, 계층화 분석과정은 다 단계 수준의 평가기준을 다룰 수 있으며, 또한 계층구조 상의 수준은 물론이고 동일한 수준에서 요소들 간의 상호의존도를 다룰 수 있도록 개발된 유일한 기법이므로 계층화 분석과정에서 사용하는 기본적인 수학적 개념을 Harker(1989)에 요약한 바 있으나, 본 논문에서는 [1]에서 언급한 SAW방법을 확장하여 연구하였고, Saaty[5]에 의하여 제기된 일치성 비율(consistency ratio: C.R.)을 도입하여 국내에서 생산되는 3종류의 경승용차 최적의사결정과 일치성을 연구하였다.

2. 계층화 분석과정

계층화 분석과정을 통해 의사결정 문제를 해결하고자 할 때, 일반적으로 계층구조의 설계와 평가 두 가지 단계를 밟는다. 계층구조의 설계에서는 주어진 문제의 영역과 관련된 경험과 지식을 필요로 한다. 동일한 문제를 놓고 종종 두 명의 의사결정자가 서로 다른 두 가지 계층구조를 만들기도 한다. 따라서 계층구조란 유일한 것도 아니다. 한편, 두 명이 동일한 계층구조를 설계한 경우에도 그들의 선호구조에 따라 서로 다른 행동방안을 산출하기도 한다. 평가단계는 쌍 대응 비교의 개념에 입각하고 있다. 계층구조의 어느 한 수준에 속하는 요소들은 비교대상이 되는 요소들의 바로 위 수준에 속하는 어느 하나의 평가기준의 중요도나 기여도에 입각하여 서로 비교하게 된다. 이러한 비교과정을 통해 요소들의 상대적인 지위를 비교 대상이 되는 다른 평가기준들과 서로 독립인 어느 한 평가기준과 관련하여 측정한다. 이들 상대적 가중치를 모두 합하면 1이 된다. 이러한 비교작업은 어느 한 수준에 속하는 요소들에 대해 2보다 위

에 있는 수준에 속하는 모든 요소들에 관하여 수행된다. 예를 들어 '국제 바둑대회'의 경우에 대회에서 우승하는데 행위적 능력이 기술적 능력에 비해 2배 더 중요하다고 보자. 이때의 쌍 대응 비교치 행렬은 다음과 같다.

(표 1)쌍 대응 비교치 행렬

	기술적 능력	행위적 능력
기술적 능력	1	1/2
행위적 능력	2	1

위의 행렬에서 2행의 첫 번째 열의 성분의 값인 그는 그 다음으로 높은 수준의 목적인 시합에서 우승을 달성하는데 있어 행위적 능력이 기술적 능력에 비해 두 배 더 중요하다는 것을 가르친다. 1행의 두 번째 열의 성분 값인 $\frac{1}{2}$은 기술적 능력을 행위적 능력과 비교했을 때의 상대적 중요도를 가르친다. 자기 자신과의 상대적 중요도는 물론 항상 같다. 따라서 쌍 대응 비교치 행렬에서 대각 성분은 항상 1이 되며 행렬의 하 삼각 성분들은 상 삼각 성분들의 역수로 구성된다. 결국, 쌍 대응 비교치 행렬을 작성하는 데는 대각성분을 포함하여 단지 행렬의 반에 해당하는 성분을 알면 충분하다. 계층구조의 맨 하단 수준에 속하는 요소들에 대한 최종가중치 상위 수준에 있는 모든 요소들과 관련된 어느 한 수준에 있는 요소들의 기여도를 합산하여 얻어진다. 이를 계층 구조적 합성원리라고 한다.

대안의 가중치와 평가 기준의 가중치를 종합하는 방법에는 여러 가지가 있으나 계층화 분석과정의 가법합성 규칙이 전체를 부분으로 할당하는데 있어 직관적 이해를 돕는다는 이점을 지니고 있다. $\vec{w}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)$

계층화 분석과정을 적용할 때 밟는 첫 번째 주요과제는 쌍 대응 비교치로 구성된 양의 상반행렬(positive and reciprocal matrix) $A=(a_{ij})$를 통해 일련의 평가 기준이나 대안들에 대한 가중치를 산정하는 것이다.

따라서, 다음과 같이 주어진 행렬에서 가중치 내지 선호도로 구성된 벡터 $\vec{w}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)$ 를 산정하려고 한다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서, $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad \forall_{ij} = 1, 2, \cdots, n$ (1)

비율척도를 사용함으로써 우리가 산정하고자 하는 가중치는 양의 상수를 곱해도 그 값에는 변함이 없다. 즉, $cw>0$ 에 대해 $\vec{w}$ 와는 $\vec{cw}$ 동등하다. 따라서 편의상 가중치 벡터 $\vec{w}$ 를 정규화 함으로써 그 합이 1내지 100이 되게끔 변형시킨다.

만약, 의사결정자의 판단이 완벽하게 일치성을 유지하고 있다면 즉,

$$a_{jk}\,a_{ki} = a_{ji}\,, \quad \forall_{ij} = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

이때 행렬A는 오차가 없는 성분들로 구성되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_{ji} = \frac{w_i}{w_j} \qquad (3)$$

식 (2)과 (3)를 통해

$$a_{jk}\,a_{kj} = \frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij}\,, \quad \forall_{ij} = 1, 2, \cdots, n \qquad (4)$$

이 경우에 행렬A의 임의의 열j를 최종가중치를 산출하기 위해 정규화 한다.

$$\omega_i = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}} \qquad \forall_{ij} = 1, 2, \cdots, n \qquad (5)$$

한편 판단상의 오차는 일반적으로 발생하는 것이라고 볼 수 있다. 따라서 열을 중심으로 한 정규화는 어떤 열을 선택했느냐에 따라 달라진다. 판단상의 오차가 존재할 때 가중치를 산정하는 방법에는 대표적으로 대수최소자승법(logarithmic least squares)와 고유벡터 $\vec{w}$ 를 산정하는 것이다.

$$\sum_{ij=1}^{n}(\log a_{ij} - \frac{w_i}{w_j})^2 \qquad (6)$$

한편, 고유 벡터법 에서는 $\vec{w}$ 를 행렬 A의 오른쪽 주 고유벡터(principal right eigenvector)로 구한다. 즉,

$$A \vec{w} = \lambda_{max} \vec{w} \qquad (7)$$

여기서, λ_{max}는 행렬의 최대 고유치를 뜻하며 이때 w_i는 다음과 같다.

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} w_{ij}}{\lambda_{max}} \qquad \forall_{ij} = 1, 2, \cdots, n \qquad (8)$$

위의 두 가지 방법은 각각 나름대로의 장점을 지니고 있다. 하지만, 고유벡터 법은 최종가중치 $\vec{w}$ 가 대안을 비교할 수 있는 가능한 모든 방법들의 평균치 개념을 담고 있다는 측면에서 볼 때 가중치 산정의 보다 자연스런 방법이라고 볼 수 있으며 더 나아가서 이 방법은 일련의 대안 집합에 대한 정확한 서열순위를 밝히는데도 가장 좋은 방법이 될 수 있다는 사실을 이론적으로 입증한 연구결과도 제시 된 바 있다. 또한, 고유벡터 법은 판단의 불일치성을 측정하는 수단이 되기도 한다.

Saaty[6]에 의하면 λ_{max}는 양의 상반행렬에 대하여는 항상 n과 같거나 큰 값을 지니며 행렬 A가 오직 일치성 행렬(consistency matrix)인 경우에 한하여 그 값이 n이 된다. 따라서 $\lambda_{max} - n$ 은 불일치성의 정도를 측정하는 유용한 수단이 된다. 따라서 $\lambda_{max} - n$ 을 통해 불일치성의 정도를 측정할 수 있으며, 이를 행렬의 크기에 따라 정규화하면 다음과 같은 일치도 지수(Consistency index: C.I.)가 얻어진다. 즉,

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \qquad (9)$$

또한, 행렬의 크기별로 랜덤행렬이 생성되며 이들의 평균 C.I.값을 의미하는 랜덤지수

(R.I.)가 산정된다. 한편, 이때 일치성 비율(consistency ratio: C.R.)은 R.I.에 대한 C.I.의 비율로 정의하는데 이 비율은 주어진 행렬이 C.I.값을 놓고 볼 때 순수한 랜덤 행렬에 얼마나 접근하고 있는가를 나타내는 척도라고 볼 수 있다.

$$\text{C.R.} = \frac{C.I.}{R.I.} \tag{10}$$

일반적으로 C.R.의 값이 0.1 이하이면 합격선에 들었다고 보며 이보다 큰 값을 가지면, 이때는 의사결정자가 판단을 다시 수정하여 불 일치도를 줄여나갈 필요가 있다고 본다. 오른쪽 주 고유벡터는 행렬 A를 k제곱하고 그 결과를 정규화 함으로써 구해진다. 즉,

$$\vec{w} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k \vec{e}}{\vec{e}^{\,t} A^k \vec{e}} \tag{11}$$

여기서 $\bar{e}$ 는 단위벡터이다.

Ⅲ. 사 례

본 연구에서는 국내 자동차 회사들에서 생산되는 3종류의 경승용차의 구매 시 의사결정에 영향을 주는 기능요인들을 분석하였다. 경승용차의 3종류는 D사의 M제품, H사의 A제품, K사의 V제품을 택하였다.

(표2) 각 요인에 있어서의 경승용차의 중요성

요인 / 대안	편의	안전	경제	성능	부가	보안	크기
M	0.360	0.358	0.356	0.348	0.350	0.348	0.352
A	0.303	0.305	0.315	0.329	0.320	0.330	0.317
V	0.337	0.337	0.329	0.323	0.330	0.322	0.331

(표3) 각 요인에 대한 선호도

	열평균
편의기능	0.139
안전기능	0.132
경제기능	0.126
성능	0.135
부가기능	0.152
보안기능	0.154
크기	0.164
합계	1.00

(표4) 최종적인 중요도의 계산

	편의	안전	경제	성능	부가	보안	크기
M	0.360*0.139	0.358*0132	0.356*	0.348*0.135	0.350*0.152	0.348*0.154	0.352*0.162
A	0.303*0.139	0.305*0132	0.315*	0.329*0.135	0.320*0.152	0.330*0.154	0.317*0.162
V	0.337*0139	0.337*0132	0.329*	0.323*0.135	0.330*0.152	0.322*0.154	0.331*0.162

D사의 M제품 : 0.353

H사의 A제품 : 0.317

K사의 V제품 : 0.330

최적 의사결정은 D사의 M제품이 최적 대안으로 결정 된다.

(표5) 각 요인별 일관성 지수

	C.R.
편의기능	0.00435
안전기능	0
경제기능	0.0172
성능	0
부가기능	0
보안기능	0.0259
크기	0

(표5)에서 보듯이 Saaty가 제시한 C.R.은 0.1 보다 작으므로 일관성 있는 의사결정임을 보여준다.

4. 결 론

MADM 문제에서는 제약으로 인하여 여러 가지의 속성(attribute)간에 많은 상충(trade-off)요인이 발생하기 때문에 다양한 판단 기준에 입각하여 주어진 속성들 간의 선호순서를 결정하거나 최적 혹은 일부의 선호속성을 선정해야 한다. 본 논문에서는 3종류의 경승용차의 구매 시 의사결정에 영향을 주는 기능요인들의 가중치를 분석하여 최적의사결정 하였다. AHP 방법은 계산 절차가 간단하여 적용하기 쉬우므로 다른 분야에서도 대안선정에 있어서 이용 될 수 있으니라 생각된다.

5. 참 고 문 헌

1. 정순석 (2006), “보정 모형에서의 최적 의사결정에 관한 연구” 대한안전경영과학회지 제8권 4호, pp.205-218
2. Harker, P.T.(1987), "Incomplete Pairwise Comparison in the Analytic Hierarchy Process", Mathematical Modeling, Vol.9 No. 11, pp.838-848
3. Harker, P.T. (1989), "That Art and Science of Decision Making : The Analytic Hierarchy Process", in B.L. Golden E.A. Wasil and P.T. Harker eds., The Analytic Hierarchy Process : Applications and Studies, Springer-Verlag, pp.3-36
4. Millet, I. and P.T. Harker (1990), "Globally Effective Questioning in the Analytic Hierarchy Process", European Journal of Operational Research, Vol.48, pp.88-97
5. Saaty, T.L. (1986), "Axiomatic Foundations do the Analytic Hierarchy Process", Management Science, Vol. 32, No 7, pp.841-855
6. Saaty, T.L. (1980), The Analytic Hierarchy Process, MacGraw-Hill.
7. Johnson, C.R., Beine W.B. and T.J. Wang (1979), "A Note on Right-Left Asymmentry in an Eigenvector Ranking Procedure", Journal of Mathematical Psychology, Vol. 19, No. 1, pp.61-64