

# 샌드위치 패널의 전단변형이 파동전달 및 방음 특성에 미치는 영향

## Effects of shear deformation of sandwich panels on wave propagation and sound radiation characteristics

박 준 홍  
Junhong Park

**Key Words** : Shear Deformation (전단 변형), Vibro-acoustic Properties (진동-음향 특성).

### ABSTRACT

Theoretical models to study the vibro-acoustic performance of a sandwich panel are proposed. The wave propagation characteristics are analyzed, and dispersion relation is derived. The vibration is analyzed using the Mindlin plate theory. The vibration of the compliantly supported Mindlin plate is investigated using the Rayleigh-Ritz method. The Timoshenko beam functions are used as trial functions. The model is applied to numerically investigate the influence of the plate mechanical properties. The vibro-acoustic properties are mostly determined by bending deformation at low frequencies. At higher frequencies, the shear deformation has a strong influence. The proposed numerical model is used to estimate the optimal panel properties that result in minimum sound radiation. With increasing dynamic stiffnesses the vibration response decreases but the radiating wavenumber components increase.

### 1. 서 론

허니콤 패널과 같은 복합재 구조물이 비행기나 자동차, 발사체 등에 사용되면서 구조물의 전체 질량은 줄어 들고 있다 [1]. 그러나, 구조물 질량의 감소는 운행 중 내부 소음 증가의 결과를 초래하여 이용객에게 불편을 초래할 수 있다. 허니콤 패널의 진동 및 소음특성의 해석을 위해 Mindlin 에 의해 유도된 평판 진동 방정식 [2]에서와 같이 코어의 전단 변형에 의한 진동을 고려하여야 한다. Kurtze 와 Watters[3]는 허니콤 패널에서 전달되는 구조파의 파동전달 속도를 계산하기 위해 파동 임피던스를 고려하였다. 이러한 허니콤 패널의 파동전달 특성 및 동특성에 관한 측정은 전달 함수법[4]이 요구되며 측정결과에서 전단변형이 파동 전달 특성에 크게 영향을 미치었다. 허니콤 패널의 방음 특성 해석에 FEM 등의 상용패키지가 많이 이용되어 왔으나 이 경우 높은 주파수에서의 해석이 용이하지 못하는 등의 단점을 갖는다.

여기에서는 Mindlin 의 평판 지배 방정식을 이용하여 샌드위치 패널의 진동 특성 해석을 분석하고 소리발생을 계산하는 방법을 제안한다. 이 지배 방정식을 통해서 전단 변형 및 회전 관성에 의한 효과가 고려되어진다. 특히 허니콤 패널의 경우 회전관성은 일반 패널과 마찬가지로 무시할 만큼 작으나 전단 변형이 크게 일어남으로 이에 의한 효과를 알아본다. Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 진동해석 및 소리 발생을 수행한다. 이 방법은 구조물의 형상이 간단할 경우 장점을 갖으며 계

산 시간이 FEM 등을 이용하는 방법에 비해 짧아서 최적화에 용이하다. 이를 이용하여 샌드위치 패널의 진동 특성 및 소리발생 특성을 분석한다. 외부 가진으로써 유동 가진과 같은 랜덤하면서 전 면적에 분포되어 있는 외란을 가정한다. 패널의 전단 강성 및 굽힘 강성 등이 미치는 영향에 관해 알아본다.

### 2. 파동 전달 특성 분석

그림 1 은 샌드위치 패널의 구조를 보여준다. 두개의 복합재 패널이 허니콤 코어에 의해 일정한 두께로 떨어져 있다. 이러한 허니콤 코어의 진동특성은 Mindlin 의 평판 지배 방정식으로 나타낼 수 있다. 패널의 진동이 한 방향(x 방향)으로만 발생한다고 가정하면 Timoshenko 의 보 지배 방정식으로 나타내어진다 [5]:

$$D_x \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + S_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) - I_b \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \\ M_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (1a,b)$$

여기서  $D_x$  와  $S_x$  는 각각 굽힘 및 전단 강성이고  $\psi_x$  는 x 방향의 회전각,  $M_b$  와  $I_b$  는 각각 단위 면적 당 질량 및 회전관성이다. 이러한 Timoshenko 보의 일반해는 다음과 같이 구해진다.

$$w(x) = \hat{A}e^{-ibx} + \hat{B}e^{ibx} + \hat{C}e^{-bax} + \hat{D}e^{bax}, \quad (2a)$$

$$\psi_x(x) = -ik_1 \hat{A}e^{-ibx} + ik_1 \hat{B}e^{ibx} - k_2 \hat{C}e^{-bax} + k_2 \hat{D}e^{bax}, \quad (2b)$$

여기서

$$\left( \frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \mp [r^2 + s^2] + \left[ (r^2 - s^2)^2 + \frac{4}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

\* 한양대학교 기계공학부

E-mail : parkj@hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2220-0424, Fax : (02) 2298-4634

$$r^2 = \frac{I_b}{M_b}, \quad s^2 = \frac{D_x}{S_x}, \quad k_1 = \frac{b(\beta^2 - s^2)}{\beta}, \quad k_2 = \frac{b(\alpha^2 + s^2)}{\alpha}.$$

여기에서  $b^2 = \omega^2 M_b / D_x$  이며, 사용되는 기호는 참고 논문[5]의 표기를 따르고 있다. 파동전달 속도는 다음과 같이 계산된다.

$$c = \frac{b_r}{M_b} = \frac{D_x b}{M_b \beta \omega}. \quad (3)$$

그림 2 는 샌드위치 패널에서의 파동전달 속도를 보여 준다 ( $D_x=8770$  Nm,  $S_x=513$  kN/m,  $M_b=3.97$  kg/m<sup>2</sup>,  $I_b=0.00035$  kg). 계산된 파동 속도는 주파수가 낮을 때, 굽힘 강성에 영향을 크게 받으며 증가하다가, 높은 주파수에서 발생하는 전단 변형에 의해 측정되는 파동 속도는 전단파 만을 고려한 파동 전달 속도에 근접한다. 이러한 파동전달 속도의 주파수에 따른 변화는 실제 샌드위치 패널의 파동 전달 속도 측정에서 관측 되었다 [4]. 특히 전단에 의해 구조파가 전달 될 경우 허니콤 코어의 기계적 특성에 의해 파동전달 특성이 크게 영향을 받았다.

### 3. Rayleigh-Ritz 방법

유한한 크기를 갖는 패널의 진동특성을 분석하기 위해서 Mindlin 평판식을 통한 분석이 필요하며, 특히 경계조건이 단순지지가 아닌 경우 Rayleigh-Ritz 방법이 널리 이용되어 왔다. 여기에서는 Timoshenko 보의 일반해, 식 (2)를 trial function 으로 하여 분석하였다. 그림 3 는 네 모서리에서 일반경계조건을 갖는 샌드위치 패널을 보여준다. 이 경우 패널의 운동에너지와 보존에너지는 각각 다음과 같이 구해진다 [6]:

$$T_K = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l I_b \left\{ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} + M_b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dy dx \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} V_p = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l D_x \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + D_y \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + (v_x D_x + v_y D_y) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ & + D_{xy} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + S_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right)^2 + S_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right)^2 dy dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \left[ s_{11} w(x, 0, t)^2 + s_{22} w(x, l, t)^2 + s_{1x} \psi_x(x, 0, t)^2 + s_{2x} \psi_x(x, l, t)^2 \right] dx \\ & + \int_0^l \left[ s_{1y} w(0, y, t)^2 + s_{2y} w(l, y, t)^2 + s_{1y} \psi_y(0, y, t)^2 + s_{2y} \psi_y(l, y, t)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (4b)$$

여기서  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  와  $S_x$ ,  $S_y$  는 각각 굽힘강성과 전단강성을 나타내며  $v_x$  and  $v_y$  는 Poisson 비이다. 여기서 평판의 변위와 회전은 각각 다음과 같이 가정된다.

$$\begin{aligned} & \{w(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)\} \\ & = \sum_{mn=1}^{\infty} \{X_m(x)Y_n(y), \psi_m^x(x)Y_n(y), X_m(x)\psi_n^y(y)\} \alpha_{mn}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\alpha_{mn}$  은 일반화 좌표이다. 식 (4) 와 (5)를 이용하여 라그랑지 방정식을 적용한다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{\alpha}_{mn}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial \alpha_{mn}} = 0, \quad mn = 1, 2, \dots, N^2 \quad (6)$$

여기서  $L_s = T_K - V_p$  은 시스템 라그랑지안 이다. 이로부터 다음과 같은 운동 방정식을 얻는다.

$$[M]\{\ddot{\alpha}\} + [K]\{\alpha\} = 0. \quad (7)$$

이 운동 방정식으로부터 eigenvector,  $\hat{y}_j$  및 고유진동수를 계산한다. 이로부터 모드형상 함수를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \hat{w}_j(x, y) &= \sum_{mn=1}^{N^2} \hat{y}_j(mn) X_m(x) Y_n(y), \quad \hat{\psi}_j^x(x, y) = \sum_{mn=1}^{N^2} \hat{y}_j(mn) \psi_m^x(x) Y_n(y), \\ \hat{\psi}_j^y(x, y) &= \sum_{mn=1}^{N^2} \hat{y}_j(mn) X_m(x) \psi_n^y(y) \end{aligned} \quad (8)$$

이로부터 패널 전체의 위치 변위량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\int_A G_{\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) d\mathbf{r}_1 = \sum_{j=1}^{N^2} |H_j(\omega)|^2 \int_A \int_A \hat{w}_j(\mathbf{s}_1) \hat{w}_j^*(\mathbf{s}_2) G_{pp}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 \quad (9)$$

여기서  $\hat{H}_j(\omega) = (-\omega^2 + \hat{\omega}_j^2)^{-1}$ ,  $G_{pp}$  는 외란의 cross-power spectrum,  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  는 패널 위의 임의의 두 위치 벡터이다. 이 식은 패널 위의 외란이 Corcos 유동 압력 모델 등과 같이 cross-power spectral density 의 형태로 주어질 때 사용될 수 있다. 여기에서 문제를 더욱 간단하게 하기 위해 델타 함수로 외란이 주어지는 경우를 가정한다.

$$G_{pp}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) = \Phi_p(\omega) \delta(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2), \quad (10)$$

여기서  $\Phi_p$  는 압력의 스펙트럼 밀도이다. 이 경우 평판의 평균 진동량 (spatially averaged vibration response)은 다음과 같이 계산된다.

$$v_{av} = \frac{1}{l_x l_y} \int_A \omega^2 G_{\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 = \frac{\Phi_p(\omega)}{l_x l_y M_b^2} \sum_{j=1}^{N^2} \left| \frac{\omega}{(-\omega^2 + \hat{\omega}_j^2)} \right|^2. \quad (11)$$

방사소음을 계산하기 위해 Rayleigh integral [7] 을 이용한다. 방사된 사운드 파워는 Far-field 에서의 음향 인텐시티를 통해 계산한다. 특히 외부가진 식 (10)과 같이 가정되면 총 방사되는 소음에너지는 다음과 같다.

$$W_r = \frac{\rho_a c_a \Phi_p(\omega)}{2 M_b^2} \sum_{j=1}^{N^2} \sigma_j \left| \frac{\omega}{(-\omega^2 + \hat{\omega}_j^2)} \right|^2, \quad (12)$$

여기서  $\sigma_j$  는 방사 효율이다. 방사효율은 식 (8)의 모드형상 함수를 이용하여 다음과 같이 계산 된다.

$$\sigma_j = \frac{k_a^2 M_b}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \int_A \hat{w}_j(\mathbf{r}_1) e^{ik_a(\mathbf{r}_1)(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi)} d\mathbf{r}_1 \right|^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (13)$$

여기서  $k_a$  는 파동수이다 ( $k_a = \omega / c_a$ ).

### 4. 결 과

수치해석에서 허니콤 패널의 크기는  $l_x=1.57$  m,  $l_y=1.39$  m 로 가정하였다.  $x$  와  $y$  방향 기계적 물성치의 차이는 무시하였다. ( $D_x=D_y$ , 그리고  $D_{xy} = 3012$  Nm,  $v_{xy} = 0.31$ ). 다른 물성치는 2 장에서 가정한 값을 이용하였다. 그림 4 과 5 는 가정한 패널을 이용하여 진동응답과 방사 소음을 계산한 것이다. 특히 굽힘강성과 전단강성의 변화에 따른 결과를 각각 보여준다. 경계강성으로부터의 영향을 최대한 줄이기 위해  $S_x=2 \times 10^{20}$  Pa and  $S_y=0$  으로 가정하였다. 주파수가 작을 때( $f < 300$  Hz)는 굽힘 강

성은 진동-음향 특성에 큰 영향을 미친다. 이 영역에서 굽힘 강성이 커지면 공진 주파수도 크게 증가한다. 그러나 높은 주파수 영역에서 굽힘 강성의 영향은 매우 작았으며 전단강성에 의해 크게 영향을 받는다. 반대로 전단강성은 낮은 주파수 영역에서 크게 영향을 미치지 않는다.

소리 발생에 대해서 전단강성은 방사하는 파동수 성분 (radiating wavenumber components)에도 영향을 크게 미친다. 여기에서 이용한 허니콤 패널의 경우 방사 소음의 크기가  $S_x=513$  kN/m 일 때 이 값보다 크거나 작을 때 보다 ( $S_x=1026$  kN/m 혹은  $S_x=307$  kN/m) 크게 계산되었다. 전단강성이  $S_x=513$  kN/m 보다 큰 값에 대해서는 진동량의 감소에 의해 소음 발생이 줄어든다. 그러나  $S_x=513$  kN/m 보다 작아 질 때는 진동 응답은 증가하나 방사하는 파동수 성분의 감소에 의해 소음 발생은 오히려 줄어든다. 이러한 결과는 소음 발생을 최소화 하기 위해서 전단강성값  $S_x=513$  kN/m 이 가장 바람직하지 못하며 이 값보다 크거나 작은 값의 허니콤 코어를 이용하여야 한다는 것을 나타낸다. 허니콤 코어의 형상이 전단 강성에 가장 크게 영향을 미치며 각 셀의 크기 및 배열의 조정을 통해 이러한 전단 강성의 튜닝이 가능하다.

## 5. 결론

샌드위치 패널에서의 파동 전달 특성, 진동 음향 특성에 대해서 수치해석을 통해 알아 보았다. 파동전달 특성에서 패널이 갖는 특징은 주파수가 낮은 영역에서는 굽힘 강성에 의한 영향을 크게 받으나 높은 주파수 영역에서는 코어의 전단변형이 크게 발생하여 전달 속도가 전단파만을 가정하였을 때의 전달속도에 수렴함을 볼 수 있었다. 이러한 영역에서는 패널의 특성이 허니콤 코어에 의해 크게 좌우된다. 이 패널의 소리발생 특성을 알아보기 위해 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 진동 및 소음 발생을 계산 하였다. 특히 유동가진과 같이 랜덤하면서 패널 전체에 분포된 외란이 가해 질 때 패널의 응답을 계산 하였다. 파동 전달 특성과 마찬가지로 높은 주파수 영역에서 전단 변형에 의해 소리 발생 특성이 크게 영향을 받았다. 이 전단 강성의 소음 발생 저감을 위한 최적화를 고려 할 때 진동량의 감소 및 방사 파동수 성분에 대한 고려도 함께 이루어져야 한다. 개발된 방사 성능 분석은 샌드위치 패널 뿐만 아니라 콘크리트 슬라브의 진동 등에 의해 영향을 받는 층간 소음에 대한 연구와 같이 전단변형이 크게 일어나는 대상에 적용이 가능하다.

## 참고문헌

## References

1. D. Zenkert 1997 *An Introduction to Sandwich Construction*. London: Chameleon Press Ltd.
2. R. D. Mindlin 1951 *Journal of Applied Mechanics* **18**, 31-38. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.

3. G. Kurtze and B. G. Watters 1959 *Journal of the Acoustical Society of America* **31**, 739-748. New wall design for high transmission loss or high damping.
4. J. Park 2005 *Journal of Sound and Vibration* **288**, 57-79. Transfer function methods to measure dynamic mechanical properties of complex structures.
5. T. C. Huang 1961 *Journal of Applied Mechanics* **28**, 579-584. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions.
6. J. H. Chung, T. Y. Chung and K.C. Kim 1993 *Journal of Sound and Vibration* **163**, 151-163. Vibration analysis of orthotropic Mindlin plates with edges elastically restrained against rotation.
7. F. Fahy 1985 *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. London: Academic Press.

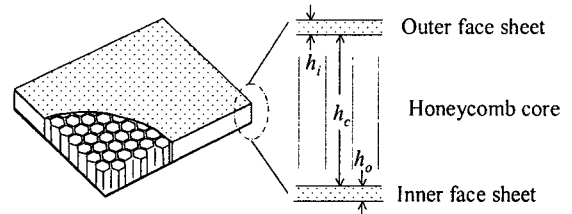


Figure 1. Schematic of a sandwich honeycomb panel.

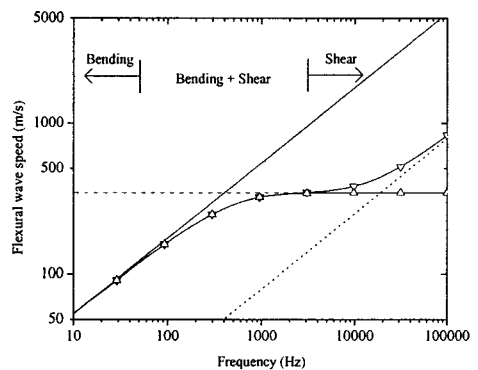
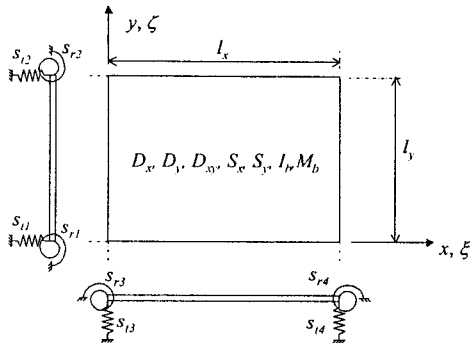
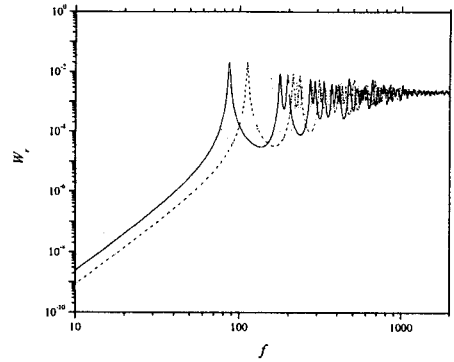


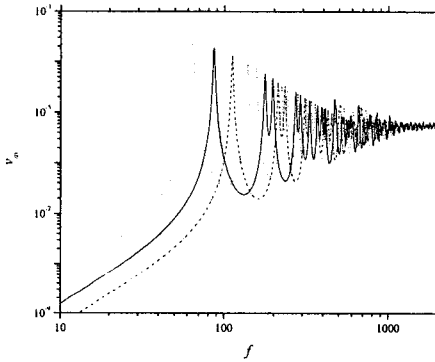
Figure 2. Calculated wave speed of flexural waves on the sandwich panel :  $\triangle$ , equation (7);  $\nabla$ , the method by Kurtze and Watters [3];  $c_b = (\omega^2 D_x / M_b)^{0.25}$ ;  $c_s = \sqrt{S_x / M_b}$ ;  $c_{b,face} = (2D_{x,face} / M_b)^{1/4} \sqrt{\omega}$ .



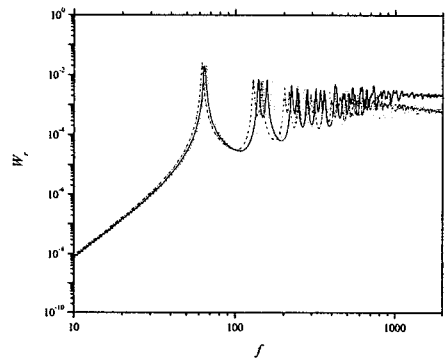
**Figure 3.** Geometry of the rectangular Mindlin plate and its boundary conditions. The supports are shown from a side view of the plate.



(a)

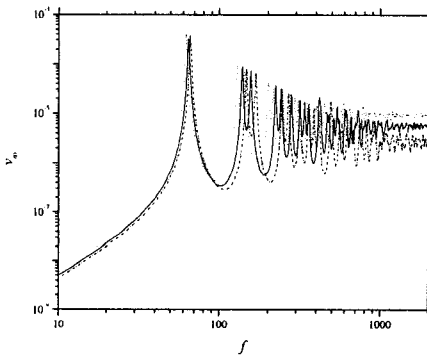


(a)



(b)

**Figure 5.** Variation of the radiated sound power. Same line parameters as in Figure 4.



(b)

**Figure 4.** Variation of the spatially averaged mean square velocity with (a) the bending stiffness,  $D_x$ : -----, 8.8 kNm; ..... , 17.5 kNm; ..... , 35.1 kNm and (b) the shear stiffness,  $S_x$ : -----, 1026 kN/m; ..... , 513 kN/m; ..... , 308 kN/m.