한국소음진동공학회 05추계학술대회(수송기계편), pp.85~89.

스펙트럴유한요소법을 이용한 네 변이 단순지지 된 직사각형평판의 진동해석

Analysis of Simply Supported Rectangular Plate Using Spectral Finite Element Method

주경림†, 홍석윤*, 송지훈**, 김동진**

Kyung-Lim Joo†, Suk-Yoon Hong*, Ji-Hun Song, Dong-Jin Kim****

Key Words : Spectral Finite Element Method(스펙트럴유한요소법), Spectral Finite Element(스펙트럴유한요소), Finite Element Method(유한요소법), Modal Analysis(모드해석법)

ABSTRACT

For the analysis of a vibrating two dimensional structure such as the simply supported rectangular plate, Spectral Finite Element Method (SFEM) has been studied. Under the condition that two parallel edges are simply supported at least and the other two edges can be arbitrary, Spectral Finite Element has been developed. Using this element SFEM is applied to the vibrating rectangular plate which all edges are simply supported, and obtain the frequency response function in frequency domain and the dynamic response in time domain. To evaluate these results normal mode method and finite element method (FEM) are also accomplished and compared. It is seen that SFEM is more powerful analysis tool than FEM in high frequency range.

1. 서 론

소음진동해석에서 전통적으로 널리 사용된 방법은 유한요소법이다. 그러나 이 방법은 해석하고자 하는 주파수가 증가할수록 정확한 해석결과를 얻기 위해서는 많은 수의 요소분할을 필요로 한다. 따라서 고주파수대역을 해석하기 위해서는 계산량이 기하급수적으로 증가하는 단점이 있기 때문에 유한요소법은 고주파수대역의 소음진동해석에서는 실용적이지 못한 것으로 알려져 있다.

이러한 기존의 유한요소법의 문제점을 해결하기 위해서 스펙트럴유한요소법이 도입되었다. 동강성행렬법(dynamic stiffness method)으로도 알려진 이 방법은 구조물의 동적거동을 진행하는 탄성파(propagating elastic wave)의 합으로 보는 것이다[1]. 이러한 개념을 이용하여 해석할 경우, 구조물의 지배방정식으로부터 파수(wave number)와 주파수(frequency)의 관계인 분산관계식(dispersion relation)을 사용하기 때문에 주파수에 관계없이 해석할 수 있으므로 고주파수 대역에서의 소음진동해석이 가능하다.

주파수영역에서 해석하는 이러한 방법을 이용하면 고속 푸리에 변환(Fast Fourier Transform)과 역고속 푸리에 변환(Inverse Fast Fourier Transform)을 도입하여 구조물의 동적응답을 주파수뿐만 아니라 시간영역에서도 구할 수 있으며[2], 다양한 복합구조물을 해석할 수도 있다[3].

이러한 스펙트럴유한요소법은 주로 1 차원 구조물에 대한 연구가 이루어졌으며, 최근에는 2 차원 구조물에 대한 연구가 이루어져 다양한 경계조건에서도 적용가능 하도록 개발되고 있다.[4]

본 연구에서는 네 변이 단순지지 된 직사각형평판의 진동해석을 위하여 스펙트럴유한요소법을 연구하였다. 스펙트럴유한요소를 유도하고 적용하였으며, 동일한 구조물에 모드해석법과 유한요소법을 마찬가지로 적용하여 주파수응답함수와 시간영역에서의 동적응답을 구해보았고 그 결과를 비교함으로써 유도된 스펙트럴유한요소의 타당성을 검증하였다.

2. 평판구조물의 스펙트럴유한요소해석

2.1 모드해석법을 이용한 단순지지평판의 해석

여기서 사용된 평판모델은 Kirchhoff 모델로써 평판의 두께가 길이의 1/50~1/10 인 경우 유효하며 관련그림은 Fig. 1 과 같다. 이 경우 평판의 지배방정식은 다음과 같다[5].

$$D\nabla^4 W(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} = p(x,y,t) \quad (1)$$

† 주경림; 서울대학교 공과대학 조선해양공학과
E-mail : kljoo@korea.com
Tel : (02) 880-7331, Fax : (02) 880-9298
* 서울대학교 공과대학 조선해양공학과
** 동 대학원

여기서 $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$ 이다.
단순지지 되어있는 평판의 정규모드와 고유주파수는 다음과 같다[6].

$$W_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$\omega_{mn}=\sqrt{\frac{D}{\rho h}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} \quad (3)$$

전개이론(expansion theorem)에 의해 응답은

$$W(x,y,t)=\sum_m\sum_n W_{mn}(x,y)\eta_{mn}(t) \quad (4)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 $\eta_{mn}(t)$ 는 일반좌표계로써 (4)식을 (1)식에 대입한 후 정규모드의 성질을 이용하면 구할 수 있다. 평판에 가해지는 힘이 다음과 같이 주어질 때,

$$p(\frac{a}{2},\frac{b}{2},t)=p\cdot\delta(x-\frac{a}{2},y-\frac{b}{2})\cdot e^{i\omega t} \quad (5)$$

$\eta_{mn}(t)$ 는

$$\ddot{\eta}_{mn}+\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2\frac{D}{\rho h}\eta_{mn}=\frac{1}{\rho h}pW_{mn}(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) \quad (6)$$

이다. 여기서 $\eta_{mn}(t)$ 를 구하고 (4)식에 대입하면 다음과 같은 평판의 모드해를 얻을 수 있다.

$$W(x,y,t)=\sum_m\sum_n W_{mn}\frac{Ap}{(1+i\eta)\omega_{mn}^2-\omega^2}e^{i\omega t} \quad (7)$$

여기서 $A=\frac{2}{\rho h\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$ 이다.

2.2 유한요소법을 이용한 단순지지평판의 해석

Kirchhoff 평판모델의 유한요소해석에 사용된 형상함수는 다음과 같다[7].

$$N_j^T(\xi,\eta)=\begin{bmatrix} f_j(\xi)f_j(\eta) \\ bf_j(\xi)g_j(\eta) \\ -ag_j(\xi)f_j(\eta) \\ abg_j(\xi)g_j(\eta)\end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f_j(\xi)=\frac{1}{4}(2+3\xi_j\xi-\xi_j\xi^3) \quad (9)$$

$$g_j(\xi)=\frac{1}{4}(-\xi_j-\xi+\xi_j\xi^2+\xi^3) \quad (10)$$

이 형상함수는 C^1 조건을 만족시키며 요소 하나당 12 개의 자유도를 필요로 한다. 위의 형상함수를 사용하여 다음 식에 대입하면 질량행렬과 강성행렬을 얻을 수 있다.

$$[m]_e=\rho hab\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[N(\xi,\eta)]^T[N(\xi,\eta)]d\xi d\eta \quad (11)$$

$$[k]_e=\int_{A_e}\frac{h^3}{12}[B]^T[D][B]dA \quad (12)$$

2.3 스펙트럴유한요소를 이용한 단순지지평판의 해석

스펙트럴유한요소법을 기존의 단일급수해법을 기반으로 한다. 이러한 단일 급수해법을 적용하기 위해서는 마주보는 한 쌍의 양단은 단순지지어야 하는 조건이 필요하다. 때문에 본 논문에서는 네 변이 모두 단순지지 된 경우에 대하여 스펙트럴유한요소를 유도해 보았다.
식 (1)의 해를 다음과 같은 스펙트럴해의 형태로 가정하고

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}W_n(x)\cdot\sin\frac{n\pi y}{a}\cdot e^{i\omega t} \quad (13)$$

위 식을 (1) 식에 대입하여 자유진동인 경우를 가정하여 정리하면 사인함수의 직교성에 의해서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$W_n''''-2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2W_n''+\left\{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4-\frac{\rho h\omega^2}{D}\right\}W_m=0 \quad (14)$$

이 미분방정식의 해를 $W=e^{kx}$ 라 가정하고 식 (14)에 대입한 후 나오는 특성방정식을 풀면 네 개의 해

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{k_n^2 - k_D}\,,\quad k_{3,4} = \pm\sqrt{k_n^2 + k_D} \qquad (15)$$

를 얻는다. 여기서 $k_n = n\pi/a$, $k_D^2 = \rho h\omega^2/D$ 이다. 따라서 (14)의 해는

$$W(x) = \sum_{m=1}^{4} A_m e^{k_m x} \qquad (16)$$

으로 표현할 수 있다. 편의를 위해 첨자 n 은 생략하였다. 노드점의 변위와 기울기를 다음과 같이 정의한다.

$$W(0) = w_1,\ W'(0) = \theta_1$$
$$W(a) = w_2,\ W'(a) = \theta_2 \qquad (17)$$

식 (17)을 식 (16)에 대입하여 행렬의 형태로 정리하면

$$[d] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ e^{k_1 a} & e^{k_2 a} & e^{k_3 a} & e^{k_4 a} \\ k_1 e^{k_1 a} & k_2 e^{k_2 a} & k_3 e^{k_3 a} & k_4 e^{k_4 a} \end{bmatrix} [A] = [H(\omega)][A] \qquad (18)$$

이다. 여기서 $[d] = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T$, $[A] = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]^T$ 이다.

평판의 양단에서의 전단력과 모멘트의 각각 변위와의 관계식은 다음과 같다.

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$
$$V_y = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] \qquad (19)$$

그리고 노드점에서의 전단력과 모멘트를 각각 다음과 같은 스펙트럴형태로 가정하면

$$Q_1 = -Q_y(0,y) = \sum_{n=1}^{N} Q_{n1} \cdot \sin k_n y$$
$$Q_2 = Q_y(a,y) = \sum_{n=1}^{N} Q_{n2} \cdot \sin k_n y$$

$$M_1 = -M_y(0,y) = \sum_{n=1}^{N} M_{n1} \cdot \sin k_n y$$
$$M_2 = M_y(a,y) = \sum_{n=1}^{N} M_{n2} \cdot \sin k_n y \qquad (20)$$

이다. 식 (20)을 식 (19)에 대입하여 행렬의 형태로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[F] = D\begin{bmatrix} [\Phi_3(0)] + (2-\nu)\cdot k_n^2 \cdot [\Phi_1(0)] \\ [\Phi_2(0)] + \nu \cdot k_n^2 \cdot [\Phi_0(0)] \\ -[\Phi_3(a)] - (2-\nu)k_n^2[\Phi_1(a)] \\ -[\Phi_2(a)] - \nu \cdot k_n^2 \cdot [\Phi_0(a)] \end{bmatrix}[A] = [G(\omega)][A] \qquad (21)$$

여기서 $[F] = [Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2]$ 이며

$$[\Phi_3(x)] = [k_1^3 e^{k_1 x} \quad k_2^3 e^{k_2 x} \quad k_3^3 e^{k_3 x} \quad k_4^3 e^{k_4 x}]$$
$$[\Phi_2(x)] = [k_1^2 e^{k_1 x} \quad k_2^2 e^{k_2 x} \quad k_3^2 e^{k_3 x} \quad k_4^2 e^{k_4 x}]$$
$$[\Phi_1(x)] = [k_1 e^{k_1 x} \quad k_2 e^{k_2 x} \quad k_3 e^{k_3 x} \quad k_4 e^{k_4 x}]$$
$$[\Phi_0(x)] = [e^{k_1 x} \quad e^{k_2 x} \quad e^{k_3 x} \quad e^{k_4 x}] \qquad (22)$$

이다.

식 (18)과 (21)로부터 다음과 같이 노드점에서의 변위와 힘과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$[F] = [G(\omega)][A] = [G(\omega)][H(\omega)]^{-1}[d] = [S(\omega)][d] \qquad (23)$$

여기에서 $[S(\omega)]$는 스펙트럴유한요소행렬이다.

3. 수치예제

이 장에서는 네 변이 모두 단순지지인 경계를 갖는 평판을 앞에서 서술한 모드해석법과 유한요소법 및 스펙트럴유한요소법을 사용하여 해석한 뒤 그 결과를 비교함으로써 스펙트럴유한요소법의 타당성을 검증하였다.

다음과 같이 $x = a/2$, $y = b/2$ 인 지점에 $F = 100N$ 의 힘이 $\Delta t = 0.002s$ 동안 걸린 경우

주파수응답함수 (Frequency Response Function)와 시간에 따른 동적응답을 비교해 보았다.

스펙트럴유한요소법의 경우 가진 되는 점을 기준으로 요소를 나누어야 하며, 해석의 정확도와 요소의 개수는 상관이 없으므로 두 개의 요소만이 필요하다. 그리고 식 (13)에서 보는 바와 같이 n 의 값이 크면 클수록 해의 정확도는 증가한다. 하지만, 기존 연구에서 n 의 값이 커질수록 그 값이 해에 미치는 영향은 대단히 작아진다고 알려져 있으며 그 경계는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$n_{\max} = \frac{a}{\pi}\omega_{\max}^{1/2}\left(\frac{\rho h_{\max}}{D}\right)^{1/4} \qquad (24)$$

여기서 $\omega_{\max}$ 는 해석하고자 하는 최대주파수이고 $h_{\max}$ 는 최대두께로 두께가 다른 여러 요소가 사용되는 경우 고려되어야 하는 값이다.
해석에 사용된 물성치는 다음과 같다.

Table 1 Material and Structural Property

Property	Value
Young' s Modulus(GPa)	900
Density(kg/m^3)	7700
Length(m)	1
Width(m)	1
Thickness(m)	0.01
Poisson' s ratio	0.3

그리고 그 결과는 Fig. 2 와 Fig. 3 에 나타내었다. 여기서 모드해석법의 경우 해가 수렴하여 더 이상 변하지 않을 때까지 모드의 개수를 증가시켰으며, 스펙트럴유한요소법은 식 (24)에 따라 n 의 수를 결정하였다. 가진을 고속푸리에변환을 사용하여 주파수에 따른 값을 구한 후에 Fig. 2 의 주파수응답함수를 구하고 이를 이용하여 역고속푸리에변환에 의해 Fig. 3 을 얻는다.

Fig. 2 를 보면 모드해석법으로 구한 값과 스펙트럴유한요소법으로 구한 값이 저주파수 대역에서 뿐만 아니라 고주파수 대역에서도 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 이것은 스펙트럴유한요소법이 모드해석법과 해를 표현하는 방식만 다를 뿐 기본적으로 동일한 방법으로 해를 유도하기 때문이다. 하지만, 유한요소법으로 구한 결과는 500Hz 미만의 영역에서는 비교적 나머지 방법들과 그 결과가 일치하지만 주파수가 그 이상으로 증가수록 나머지 두 가지 방법과 값에 차이가 생기는 것을 볼 수 있다. 이것은 유한요소법의 경우 주파수가 증가할수록 해가 부정확해지기 때문이며, 정확한 해를 얻기 위해서는 더 많은 수의 요소로 나누어야 한다. Fig. 3 의 동적응답결과도 마찬가지로 Fig. 2 에서와 같은 해석결과를 얻을 수 있다. 모드해석법과 스펙트럴유한요소법에 의한 값은 거의 일치하는 것을 보여주고 있으나 유한요소법의 값은 주파수가 증가할수록 나머지 두 방법과의 값의 차이가 증가하는 것을 볼 수가 있다.

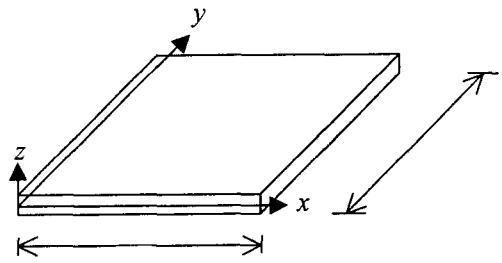

Fig. 1. Simply Supported Rectangular Plate

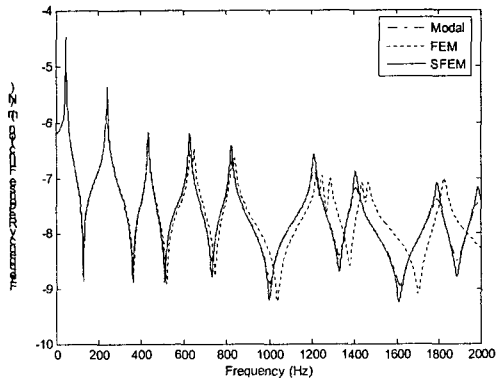

Fig. 2 Comparison of the Frequency Response Function by Modal Analysis, FE Analysis and SFE Analysis

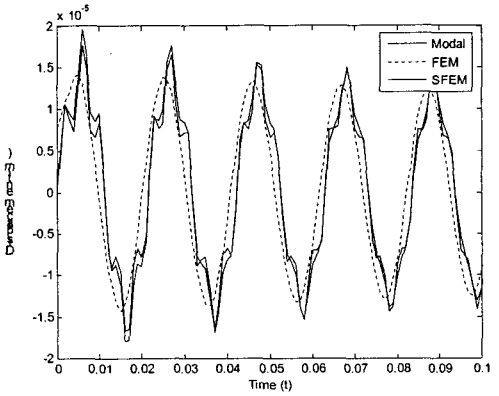

Fig. 3 Comparison of the Dynamic Response by Modal Analysis, FE Analysis and SFE Analysis

4. 결 론

본 연구에서는 네 변이 단순지지 된 직사각형 평판의 스펙트럴유한요소를 개발하였다. 그리고 가진 되었을 경우 주파수에 따른 주파수응답함수와 시간에 따른 동적응답을 모드해석법, 유한요소법과 스펙트럴유한요소법을 이용하여 구하였고 비교하여 검토해 보았다. 그 결과 스펙트럴유한요소법에 의한 해석의 타당성을 검증하였다.

참고문헌

t

(1) Graff, K. F., 1975, Wave Motion in Elastic Dover Publications, Inc., New York.

(2) Doyle, J. F., 1997, Wave Propagation in Structures, Springer-Verlag New York, Inc., New York.

(3) Leung, A. Y. T., 1993, Dynamic Stiffness and Substructures, Springer-Verlag London, Inc., London

(4) Carsimir, J. B., Kevorkian, S., Vinh, T., 2004, The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements: application to Kirchhoff's plate continuous elements, Jounal of Sound and Vibration.

(5) Szilard, R., 2004, Theories and applications of Plate Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 23-40

(6) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan com., New York, 287-298

(7) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, New York, 33-35, 244-248