

## 불일치 절점을 가지는 경우의 축약된 모델을 이용한 동특성 변경법

Structural Dynamics Modification using Reduced Model for Having Non-matching Nodes

강옥현† · 박윤식\* · 박영진\*\*

Ok-Hyun Kang, Youn-sik Park and Young-Jin Park

**Key Words :** SDM(구조물 동특성 변경법), Modified Tree Model(수정된 나무 모델), CMS(부분 모드 합성법)  
Non-matching Node(불일치 절점)

### ABSTRACT

SDM(Structural Dynamics Modification) is to improve dynamic characteristics of a structure, more specifically of a base structure, by adding or deleting auxiliary(modifying) structures. In this paper, I will focus on the optimal layout of the stiffeners which are attached to the plate to maximize 1st natural frequency. Recently, a new topology method was proposed by Yamazaki. He uses growing and branching tree model. I modified the growing and branching tree model. The method is designated modified tree model. To expand the layout of stiffeners, I will consider non-matching problem. The problem is solved by using local lagrange multiplier without the mesh regeneration. Moreover The CMS(Component mode synthesis) method is employed to reduce the computing time of eigen reanalysis using reduced component models.

### 1. 서 론

구조물 동특성 변경법이란 기저 구조물의 동특성을 향상시키는 방법이다. 여기에는 부가 구조물을 더하거나 제거하는 방법, 구조물의 일부분의 물성치를 바꿔주는 방법, 그리고 구조물의 중량의 변화없이 형상을 변형시키는 방법이 있다. 그 중에 범과 같은 보강재를 덧붙이는 방법이 널리 사용되는데 그 이유는 간편하고 편리하기 때문이다. 본 연 구에서는 관심 대상물을 평판에 한정시키겠다.

많은 사람들이 평판과 같은 쉘(shell) 구조물의 동특성을 향상시키기 위하여 보강재의 위상 최적화를 수행하였다. 하지만 기존의 방법들은 초기 보강재의 형상이 정해진다는 단점이 있다. 즉, 길이가 고정된 범이나 일자나 'ㄱ'등과 같이 형상이 고정된 보강재의 배치는 보강재의 길이나 형상에 의존적일 수밖에 없다. 따라서 확장된 보강재의 배치를 위한 연구의 필요성이 제기되었다.

확장된 보강재 배치를 위하여 Yamazaki는 성장과 분기를 하는 나무 모델을 제시하고 이를 보강재 배치 최적화에 적용하였다. 이 방법은 자연의 분기시스템을 적용하여 초기

보강재의 파라미터에 덜 의존적이어서 자유로운 보강재 배치를 얻을 수 있었다. 하지만 이 방법의 경우 비대칭 경계 조건이나 L자 형상과 같은 평판에 적용하였을 때 비대칭적인 보강재의 분기로 인하여 비효율적인 배치를 보였다. 따라서 본 연구는 이러한 문제를 해결하기 위하여 수정된 나무 모델을 제시하겠다. 이 방법은 Yamazaki가 제시한 방법에서 비대칭적인 분기를 발생 시킬 수 있는 부분을 보완하였다.

위에서 언급한 방법은 보강재와 평판의 절점이 일치하는 경우만 다루었다. 보다 확장된 보강재의 배치를 위해서는 보강재와 평판의 절점이 일치하지 않는 문제도 고려하여야 한다. 기존에는 이러한 불일치 문제가 발생할 때 평판의 요소를 재생성함으로서 불일치 절점을 일치시켰다. 하지만 이와 같은 방법은 매번 요소를 재생성 시켜야 하기 때문에 계산시간이 많이 걸렸다. 따라서 본 연구에서는 K.C Park에 의해 제시된 국부 라그랑지 승수를 이용하여 불일치 절점문제를 요소의 재생성 없이 수행하는 방법을 수정된 나무 모델에 적용해보도록 하겠다. 또한 불일치 절점을 고려할 경우 보강재의 성장방향을 구하기 위하여 최적화를 계속하여야 되고 그 과정에서 지속적인 고유치 해석이 필요하다. 이러한 고유치 해석으로 전체 계산시간이 크게 증가한다. 따라서 축약된 모델을 이용하여 구조물을 결합하는 구조물 합성법(Component Mode Synthesis)을 적용시켜 고유치 해석시간을 줄이고자 한다.

† 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : kissmequick00@kaist.ac.kr

Tel : (042) 889-3000, Fax : (042) 889-8220

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

## 2. 위상 최적화 방법

### 2.1 성장과 분기를 하는 나무 모델

2004년 Yamazaki에 의해 성장과 분기를 하는 나무 모델을 평판의 고유치 최적화에 적용하였다. 이 방법은 보강재의 초기 파라미터에 덜 의존적이며 보다 확장된 보강재 배치를 얻을 수 있는 장점이 있다. 다음과 같이 크게 3단계로 나누어 진다.

- 단계 1 : 시작
  - 시드(seed) 설정. (보강재가 처음 자라기 시작하는 점)
  - 아기(baby) 보강재를 미리 뿌림
- 단계 2 : 성장
  - 고유치 민감도를 구하고 보강재의 단면적 증가율이 결정된다.
- 단계 3 : 분기
  - 성장이 완료된 보강재의 양 끝점에서 분기

위의 방법을 비대칭 경계 조건을 가지는 평판에 적용하여 보았고 그 결과는 Figure 2.1에 나타내었다. 평판의 크기는 가로, 세로가 각각 0.8m이고 두께는 0.003m이다. 그리고 경계 조건의 비대칭성을 위하여 한 쪽 모서리에 1000N/m의 스프링 상수를 가지는 스프링을 달았다.

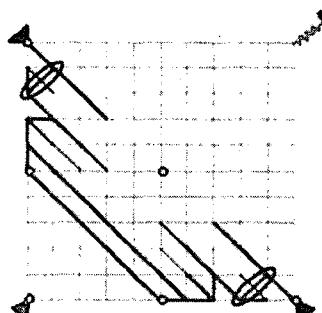


Figure 2.1 Plate with asymmetric BC( $\omega_1=5.52\text{Hz}$ )

Figure 2.1과 같이 비대칭적인 경계 조건을 가지는 평판의 경우 알려진 해는 대각선 방향으로 보강재가 놓이는 것이다. 하지만 원으로 표시한 부분에서 보듯이 비대칭적인 경계 조건의 영향으로 보강재가 성장하면서 비대칭적인 분기가 발생하고 이로 인하여 전체적인 보강재의 배치는 대각선으로 자라지 못하였다. 따라서 보다 일반적인 경계 조건을 가지는 평판에 적용하기 위해서는 수정된 모델이 필요하다.

### 2.2 수정된 나무 모델

수정된 나무 모델은 비대칭 경계 조건을 가지는 평판의 경우에 대해서도 잘 적용할 수 있도록 수정된 방법으로 2단계인 성장단계를 제거하고 고유치 민감도가 제일 높은 부분으로만 고정된 크기의 보강재를 붙이는 방법이다. 이렇게 함으로써 비대칭 경계조건의 경우에서의 비대칭적인 분기를 막음으로서 효과적인 결과를 얻을 수 있었다. 그 결과는 Figure 2.2에 보였다.

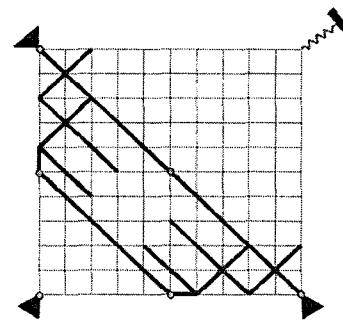


Figure 2.2 Modified tree model ( $\omega_1=5.6\text{Hz}$ )

앞의 예제와 차이점은 보강재가 초기에 성장을 하면서 고유치 민감도가 제일 높은 쪽으로만 자라게 함으로서 일차적으로 대각선 방향으로 자랐다. 그런 다음 대각선 보강재에서 분기를 시작하였다. 그리고 고유치 증가량도 더 높게 나왔다. 따라서 수정된 나무 모델이 보가 효과적인 결과를 보여준다는 것을 알 수 있다.

## 3. 불일치 절점을 가지는 구조물의 합성

### (1) 기준 경계면의 필요성

보다 확장된 보강재의 배치를 얻기 위해서는 보강재와 평판의 절점이 일치하는 경우뿐만 아니라 불일치하는 경우에 대해서도 고려하여야 한다. 기준에는 서로 다른 길이의 보강재를 평판에 붙일 때 불일치되는 점을 일치시키기 위해서 평판의 요소를 재생성하여야 하였다. 이 방법은 계산시간을 증가시켜서 실제 적용하기에 문제가 있었다. 따라서 국부 라그랑지 승수(Local lagrange multiplier)를 이용하여 요소의 재생성 없이 구조물을 결합하도록 하였다. Figure 3.1에서 보듯이 불일치 절점을 가지는 구조물을 직접 결합시키지 않고 기준 경계면(Interface frame)을 만들어서 이와 구조물을 결합하여서 불일치 절점문제를 해결할 수 있다.

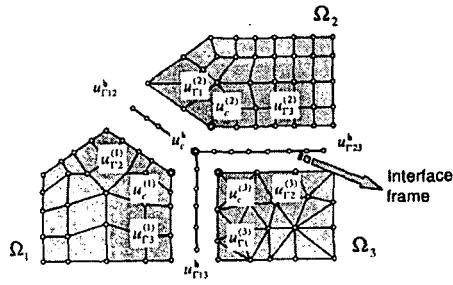


Figure 3.1 Connection of three substructures

## (2) 불일치 절점 구조물의 고유치 해석

부분 구조물을 이용하여 식 3.1과 같은 Hamiltonian 방정식을 세울 수 있다.

$$\delta \int (T - V + \Pi_\lambda) dt = 0, \quad T = \sum_{s=1}^n T_s, \quad V = \sum_{s=1}^n V_s$$

$$\text{그리고 } \Pi_\lambda = \sum_{s=1}^n \int_{\Gamma_s} \lambda_s (u_s - u_\nu) d\Gamma_s \quad (3.1)$$

여기서  $T$ 는 운동에너지,  $V$ 는 위치에너지,  $u_b$ 는 기준 경계면의 변위,  $\lambda$ 는 국부 라그랑지 승수 그리고  $\Pi_\lambda$ 는 기준 경계면과 구조물의 변위가 같다는 구속 조건을 나타낸다.

위의 Hamiltonian 방정식을 통하여 식 (3.2)와 같은 합성된 구조물의 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & -C_1^T & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & -C_2^T \\ 0 & 0 & 0 & (L_{b1})^T & (L_{b2})^T \\ -C_1 & 0 & L_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & L_{b2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_b \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_b \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

여기서  $M$ 과  $K$ 는 질량과 강성 행렬,  $C$ 는 기준 경계면과 결합하는 구조물의 자유도를 뽑아내는 행렬, 그리고  $L_b$ 는 기준 경계면과 부분 구조물을 결합시키는 행렬이다.

여기서

$$B = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & L_{b1} \\ 0 & -C_2 & L_{b2} \end{bmatrix}, \quad Q = I - B^T (BB^T)^{-1} B$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_b \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

라 두면 식 (3.1)은

$$(B^T B + Q^T K Q) u = \omega^2 Q^T M Q u \quad (3.4)$$

와 같이 축약된 고유치 문제로 정의된다.

## 4. 구조물 합성법(CMS)

### (1) 축약된 모델

본 방법의 단점은 보강재가 분기를 하며 자라는 중간 계획해서 최적화를 수행하고 그에 따라 반복적인 고유치 해석으로 인하여 계산 시간이 길어진다는 점이다. 따라서 축약된 모델을 이용하여 구조물을 결합하는 구조물 합성법을 적용함으로서 고유치 해석에 드는 시간을 줄이고자 한다. 부분 구조물을 아래 식 4.1과 같이 분할된 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ic} \\ M_{ci} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_c \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

여기서  $i$ 는 내부 영역의 좌표를 나타내고  $c$ 는 결합 영역의 좌표를 나타낸다. 그런 다음 내부 영역에 작용하는 힘이 없고 결합부분을 고정시킨다 ( $u_c = 0, f_c = 0$ )

$$[M_{ii}] \{\ddot{u}_i\} + [K_{ii}] \{u_i\} = \{0\} \quad (4.2)$$

식 4.2로 부터 내부 영역의 변위는 모우드 형상과 모달 좌표로 표현할 수 있다.

$$\{u_i\} = [\phi_{im}] \{p_m\} \quad (4.3)$$

그리고 정적상태에서 내부 변위를 결합 부분의 변위로 표현할 수 있다.

$$\{u_i\} = [\phi_{ic}^*] \{u_c\}$$

$$\text{여기서 } [\phi_{ic}^*] = -[K_{ii}]^{-1} [K_{ic}] \quad (4.4)$$

### (2) 고유치 해석 시 계산 시간 비교

구조물 합성법을 적용하였을 경우 고유치 해석에 드는 시간을 어느 정도 줄일 수 있는지 표 4.1~2를 통해 나타내었다. 표 4.1의 경우는  $10 \times 10$ 의 사각 평판에 7개의 보강재를 대각선으로 결합시킨 경우 고유치 해석을 수행한 결과이다. 구조물 합성법을 적용하더라도 고유치 값은 일정하게 유지되고 계산시간은 약 28% 정도가 감소된 것을 볼 수 있다. 다음으로 표 4.2의 경우는 사각평판을  $20 \times 20$ 으로 나누고 14개의 보강재를 붙인 보다 큰 시스템 행렬을 가지는 구조물에 고유치 해석을 수행하였다. 그 결과는 표 4.1과 마찬가지로 고유치 값은 일정하게 유지하면서 계산시간은 약 65%가 감소되었다. 이를 통하여 구조물 합성법을 적용함으로서 고유치 값은 정확하게 유지하면서 고유치 해석에 드는 계산시

간을 효율적으로 감소시킬 수 있다는 것을 볼 수 있고 구조물의 크기가 클수록 줄일 수 있는 계산시간이 커지는 것을 알 수 있다.

표 4.1  $10 \times 10$ 인 평판의 경우

	CMS방법적용	기준 모델
고유진동수	5.17Hz	5.17Hz
계산시간	8.88(s)	25.34(s)

표 4.2  $20 \times 20$ 인 평판의 경우

	CMS방법적용	기준 모델
고유진동수	5.175Hz	5.175Hz
계산시간	1.64(s)	2.27(s)

## 5. 모의 실험

이번 장에서는 앞에서 언급한 불일치 절점을 고려하고 계산 시간단축을 위하여 구조물 합성법을 적용한 수정된 나무모델을 앞에서 보인 비대칭 경계 조건을 가지는 평판에 대해 똑같이 적용하여 보겠다. 그 결과는 Figure 4.1에 나타내었다. 이 경우 보강재가 분기를 하는 방향을 최적화하면서 기존의 보강재를 인식하지 못하여 중첩되는 문제가 발생한다. 이러한 현상은 중첩되는 부분의 보강재의 폭이 커지는 것으로 간주하겠다.

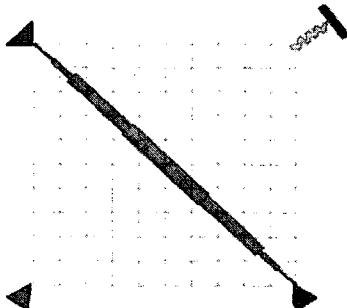


Figure 5.1 평판에 대한 모의실험 결과

## 후기

이 연구는 한국과학재단지정 한국과학기술원 가상입체음향(NRL)연구실과 두뇌한국사업(BK21)의 연구지원으로 수행되었습니다.

## 6. 결 론

지금까지 내용을 정리하면 다음과 같다. 산업 현장에서 널리 쓰이는 평판의 고유치를 향상시키기 위한 방법으로는 보강재를 덧붙이는 방법이 널리 사용된다. 이러한 보강재의 보다 효율적인 배치를 위하여 Yamazaki가 제시한 성장과 분기를 하는 나무 모델을 비대칭 경계조건을 가지는 평판이나 사각이외의 형상의 평판에도 적용할 수 있는 수정된 나무모델을 제시하였다. 하지만 이 경우는 보강재와 평판의 절점이 일치하는 경우만을 다루었다. 불일치 절점 문제를 가질 경우 평판의 요소를 재생성할 필요없이 국부 라그랑지 승수를 이용하는 방법을 적용하여 보강재 배치 확장을 수행하였다. 이 경우 보강재가 분기를 하면서 반복적인 최적화가 수행되고 그에 따라 고유치 해석에 드는 시간이 많아져서 전체적인 계산시간이 증가한다. 따라서 이런 고유치 해석에 드는 시간을 줄이기 위하여 축약된 모델을 이용하여 구조물을 합성하는 구조물 합성법을 적용하여 고유치 해석 시간을 줄였다. 하지만 여전히 계산시간이 오래 걸린다는 단점이 있다. 따라서 계산시간을 효율적으로 줄일 수 있는 연구가 지속되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

- (1) Ding, X. and Yamazaki, K., 2004, Stiffener layout design for plate structures by growing and branching tree model(application to vibration-pr oof design), Struct. Multidisc. Optim..
- (2) Avitabile, P., 2002, Twenty Years of Structural Dynamics Modification- a Review, Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference.
- (3) Lee, Joon-Ho. 2005, Stiffener layout optimization to maximize natural frequencies of a structure using evolution strategies and geometry algorithm, Ph. D Thesis, KAIST.
- (4) Park, K. C., 2000, A Variational Principle for the Formulation of Partitioned Structural Systems, International Journal for Numerical Methods in Engineering
- (5) Castanier, M. P., 2001, Characteristic Constraint Modes for Component Mode synthesis, AIAA.