

## 원판의 준주기운동의 프랙털 흡인경계

Fractal basin boundary of quasi-periodic motions of a circular plate

박해동\* · 이원경\*\*

Hae Dong Park and Won Kyoung Lee

**Key Words :** Nonlinear Vibration(비선형 진동), Asymmetric Vibration of Circular Plate(원판의 비대칭진동), Primary Resonance(주 공진), Period Doubling Bifurcation(주기배가분기), Fractal Dimension(프랙털 차원), Chaotic Motion(혼돈운동), Fractal Basin Boundary(프랙탈 흡인영역 경계).

### ABSTRACT

조화가진력이 작용하는 고정경계를 가진 완전원판의 비선형 진동에 대한 응답특성을 연구하였다. 원판의 비대칭모드의 고유 진동수 근처에 가진주파수가 작용하는 주공진에서의 응답은 정상파(standing wave)뿐만 아니라 진행파(traveling wave)가 존재한다고 알려져 있다. 주공진 근처의 정상상태 응답곡선에서 최대한 5개의 안정한 응답이 존재하는 것으로 밝혀졌으며, 이들은 1 개의 정상파와 4개의 진행파로 나타난다. 이 진행파 중 2개는 가진진동수가 변화함에 따라 Hopf분기에 의해 안정성을 잃은 후 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 이르게 된다. 초기조건에 의해 각각의 끌개(attractor)에 흡인되는 흡인영역의 경계를 주평면의 개념을 통하여 구하였으며, 가진진동수가 변화함에 따라 안정한 해가 혼돈운동에 이르는 과정에 대해 흡인영역의 경계가 변화되는 특성을 관찰하였으며, 흡인영역 경계에 대한 프랙털 차원(fractal dimension)을 계산하였다.

### 1. 서 론

고정경계를 가진 원판의 횡변형은 중간 평면의 신장률을 수반하게 된다. 이 신장에 기인한 기하학적 비선형성은 운동의 진폭이 증가함에 따라 원판의 동적 응답에 심각한 영향을 미치게 된다. 이 경우에는 성평 해석만으로는 이러한 계의 응답특성을 규명하는 데는 한계가 있으므로 비선형해석이 필요하다. von Karman 방정식의 동적상사[1]를 사용하여 원판의 비대칭진동을 해석한 Sridar [2] 등은 가해조건(solvability condition)으로부터 가진진동수가 비대칭모드의 고유진동수에 가까운 주공진에선 정상상태 응답이 정상파(standing wave)의 형태임을 확인하였으며, Yeo와 Lee[3]는 이러한 가해조건에 오류가 있음을 확인하고 그 조건을 수정하였다. 즉, 주공진 정상상태 응답에서는 정상파의 응답뿐만 아니라 진행파(traveling wave)인 응답도 가능함을 관찰하였다. 또한 하나의 정상파와 두개의 진행파 등 3개의 안정한 응답이 존재함을 확인하였다. Lee와 Yeo [4], Lee 등[5]은 두 비대칭모드 고유진동수를 포함하는 내부공진 조건을 가지는

경우, 탄성지반 위에 놓인 고정경계를 갖는 원판의 모드 상호작용을 조사하였다.

본 연구는 조화가진을 갖는 고정경계를 가진 원판의 비선형 비대칭 진동의 Yeo와 Lee[3]의 연구결과로부터 주공진 응답특성을 자세히 조사한 결과, 하나의 정상파와 4개의 진행파 등 총 5개의 안정한 응답이 존재하고 있음을 알게 되었다. 이중 2개의 진행파는 Hopf분기에 의해 안정성을 잃은 후 주기배가 운동을 거쳐 혼돈운동에 이르게 된다. Lee와 Park[8]은 총 5개의 끌개 : 3개의 평형해(하나의 정상파 및 두개의 진행파)와 두개의 혼동운동으로 흡인되는 평형해(두개의 진폭변조 진행파)를 가진 시스템에 대하여 주평면(principal plane)[6]을 구성한 후 각 끌개의 흡인영역 경계를 구한 결과 혼돈운동으로 흡인되는 영역의 경계는 프랙털의 특성을 가지고 있으며 프랙털의 차원을 계산한 결과 1.537의 차원을 가짐을 알 수 있었다. 본 연구는 Hopf분기에 의해 안정한 해가 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 이르는 과정에 대하여 주평면 상의 흡인영역 경계에 대한 변화의 특성을 관찰하였으며, 이러한 흡인영역의 경계가 어떠한 프랙털 차원(fractal dimension)을 갖는지를 살펴보았다.

\* 일엠에스테크놀러지(주)

E-mail : parkhd@rmstech.co.kr

Tel : (041)556-7600, Fax : (041) 556-7603

\*\* 영남대학교 공과대학 기계공학부

### 2. 운동방정식

고정경계를 가진 원판에 절경(nodal diameter)과 경계

를 포함한 절원(nodal circle)이 각각 하나인 비대칭 1차 모드의 고유진동수  $\omega_{11}$  근처에 가진진동수  $\lambda$ 로 진동하는 주공진응답에 대한 자율 상미분 방정식(autonomous ordinary differential equation)은 다음과 같다[3].

$$a' = -c_{11}a + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \sin \mu_a \quad (1a)$$

$$b' = -c_{11}b + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \sin \mu_b \quad (1b)$$

$$a\mu_a' = \sigma a + \frac{\gamma}{8\omega_{11}} a(a^2 + 2b^2) + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \cos \mu_a \quad (1c)$$

$$b\mu_b' = \sigma b + \frac{\gamma}{8\omega_{11}} b(b^2 + 2a^2) + \frac{P_{11}}{2\omega_{11}} \cos \mu_b \quad (1d)$$

여기서  $a, b$  과  $\mu_a, \mu_b$ 는 고유진동수  $\omega_{11}$ 의 모드에 대응하는 진폭과 위상이며,  $c_{11}, P_{11}, \gamma$ 는 해당모드의 감쇠항, 가진진폭 및 경계조건을 만족하기 위한 비선형 계수이다. 가진 진동수와 고유진동수의 근접성을 나타내는 이탈변수  $\sigma$ 는  $\lambda = \omega_{11} + \hat{\sigma}$ ,  $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ 이다.

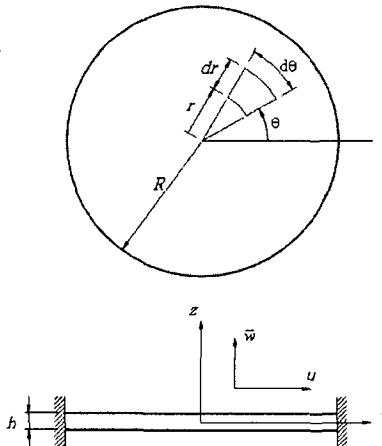


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate

원판의 정상상태 응답특성이 주된 관심사항으로 식 (1)의 평형해( $a' = b' = \mu_a' = \mu_b' = 0$ )로 부터 구해지며, 원판에 대한 비대칭 모드의 1차 근사화된 정상상태 응답은 다음과 같다.

$$w = \phi_{11} \{ a \cos(\lambda t - \mu_a + \theta + \tau) + b \cos(\lambda t - \mu_b - \theta - \tau) \} \quad (2)$$

여기서 원판의 비대칭 응답  $w = (h^2/R)\bar{w}$ 는 시계방향과 반시계방향으로 회전하는 두개의 진행파에 대한 중첩으로 나타나며,  $\tau$ 는  $\theta$ 에 대응하는 위상차를 나타낸다. 식

(2)에서 진폭과 위상이 같을 경우( $a = b, \mu_a = \mu_b$ ) 비대칭 모드의 응답은 다음과 같이 정상파의 형태로 나타난다.

$$w = 2\phi_{11}a \cos(\lambda t - \mu_a) \cos(\theta + \tau_{11}) \quad (3)$$

### 3. 정상상태 응답과 안정성

비대칭 모드의 주공진 근처에서의 응답특성을 알아보기 위해 매개변수를 다음과 같이 정하였다.

$$\{\nu, \epsilon, \epsilon c, \epsilon P_{11}, \gamma\} = [1/3, 0.001067, 0.01, 4, -772.04]$$

$\hat{\sigma}$  값을 사용하여 이탈변수  $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ 에 대한 식(1)의 평형해의 진폭  $a$  과  $b$ 를 Fig. 2에 나타내었다. 실선과 점선은 안정(S: 앞첨자)한 응답과 불안정(U)-응답을 나타낸다. 응답곡선 SS1, US1, SS2 및 US2는 진폭  $a = b$  인 정상파(S: 뒤첨자)이며, ST1, UT1 및 UT2는 진폭  $a \neq b$  인 진행파(T)를 나타낸다. 정상파에 해당하는 응답곡선 SS1은 피치포크 분기점(pitchfork bifurcation)  $\hat{\sigma}_A(0.0245)$ 에서 안정성이 변화하는 점 외에는 Duffing 진동계의 응답곡선과 일치하고 있다.

피치포크 분기점에 의해 시계방향으로 회전하는 응답(ST1-1,  $a > b$ )과 반시계방향으로 회전하는 응답(ST1-2,  $a < b$ )의 두개의 진행파가 존재함을 알 수 있다.

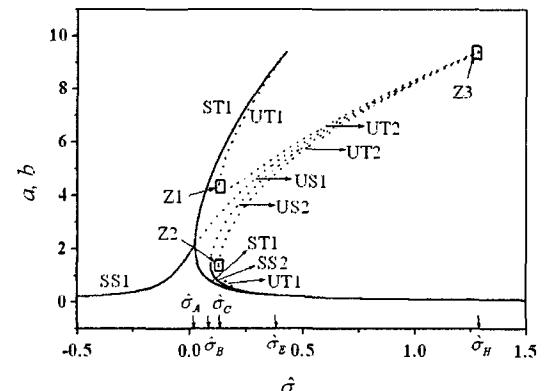


Fig. 2 Variations of the amplitudes with detuning parameter  $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ . —, stable ; ····, unstable [Yeo and Lee, 2002].

Fig. 2의 영역 Z1, Z2 및 Z3은 모든 응답이 불안정해 보이지만 saddle-node 분기와 확실하게 구별되는 영역이 존재하게 된다. 따라서 영역 Z1, Z2, 및 Z3에 대해 확대한 결과를 Fig. 3의 (a), (b) 및 (c)에 나타내었다. Fig. 3에서 보면 Fig. 2에서 나타나지 않는 안정한 ST2와 SS1의 응답곡선이 나타나며, 안정한 진행파 ST2는  $\hat{\sigma}_D(0.13264)$  및  $\hat{\sigma}_F(1.28484)$ 에서 Hopf분기에 의해 안정성이 변화되며,

정상파 SS1은  $\hat{\sigma}_c$ (1.28554)에서 피치포크분기기에 의해 안정성이 변화하고 있다. Fig. 2로부터  $\hat{\sigma}_b$ (0.0950),  $\hat{\sigma}_c$ (0.13248),  $\hat{\sigma}_e$ (0.42902) 및  $\hat{\sigma}_h$ (1.28586)등 4개의 saddle-node 분기점이 있으며,  $\hat{\sigma}_c < \hat{\sigma} < \hat{\sigma}_b$ 에서는 SS2, ST1-1(시계방향), ST1-2(반시계방향), ST2-1(시계방향) 및 ST2-2(반시계방향)등 5개의 안정한 정상상태응답이 존재하고 있으며, 이러한 5개의 원판의 응답은 초기조건에 따라 결정되어 진다.

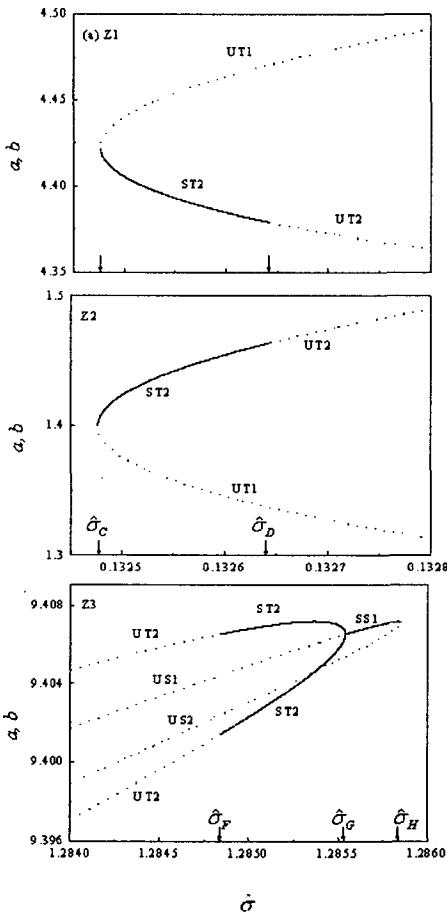


Fig. 3 Variations of the amplitudes with detuning parameter  $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ . —, stable ; ····, unstable. Enlargements of the Z1, Z2, Z3 in Fig. 2.

#### 4. 흡인영역 경계와 프랙탈차원의 변화

한개의 정상파와 4개의 진행파등 5개의 안정한 응답이 존재하며, 이중 진행파의 2개는 Hopf분기기에 의해 안정성을 잃고 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 이려게 된다. 5

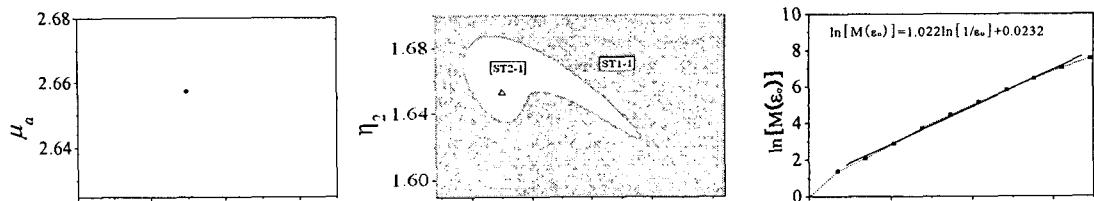
개의 끌개(attractor) : 3개의 평형점(한개의 정상파, 두개의 진행파) 및 2개의 혼돈흡인 끌개(변조응답 진행파)가 존재하는 경우 식(5)의 점근적(asymptotic) 거동은 초기조건에 의존한다. 이러한 초기조건의 집합(흡인영역)은 끌개 중의 하나로 흡인된다. 흡인영역을 구하기 위하여 하나의 정상파(SS2)와 두개의 불안정한 진행파(UT2-1, UT2-2)등 3개의 평형점을 포함하는 주평면(principal plane)의 개념을 도입하였다[6, 7]. 2개의 평형점 UT2-1과 UT2-2는 하나의 정상파 SS2와 동일한 거리에 존재하며, 정상파 SS2가 원점에 존재하고, 두개의 평형점 UT2-1과 UT2-2가  $\eta$ 축에서 동일한 거리에 있도록 주평면상의 직각좌표계  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ 를 설정하였다.

가진진동수가 변화함에 따라 안정한 진행파(ST2-1)는 Hopf분기기에 의해 안정성을 잃고 주기배가운동을 거쳐 불안정한 혼돈운동(UT2-1)으로 이려게 되며. 이러한 과정은 흡인영역의 경계와, 경계에 대한 차원이 변화하게 된다. 혼돈운동이 발생하는 흡인영역의 경계는 프랙털 특성을 가졌으며, 이 경우 프랙털차원은 선에 대한 차원1과 면에 대한 차원 2보다 적은 1.537의 차원을 가짐을 확인하였다. 여기서는 혼돈운동이 발생하기 전의 안정한 진행파가 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동이 발생할 경우 동일특성의 평형점( $\hat{\sigma}_c < \hat{\sigma} < \hat{\sigma}_b$  : SS2, ST1-1, ST1-2,  $\hat{\sigma}_b < \hat{\sigma} < \hat{\sigma}_f$  : SS2, UT2-1, UT2-2)에 대해 주평면을 각각 구한 후 흡인영역의 경계를 관찰하였으며, 흡인영역 경계의 기하학적 구조의 특성을 정량적으로 측정하기 위하여 프랙털차원을 구하였다. 여러종류의 차원중 박스 카운팅 차원(box-counting dimension)으로 프랙털 차원을 계산하였다. 주평면의 경계를 포함하는 공간상에 한변 길이가  $\varepsilon_o$ 인 사각격자를 구성한 후 사각격자  $M(\varepsilon_o)$ 를 통과하는 흡인영역 경계의 수를 계산하였다. 박스 카운팅 차원[8, 9, 10]  $d$ 는 식(7)과 같다.

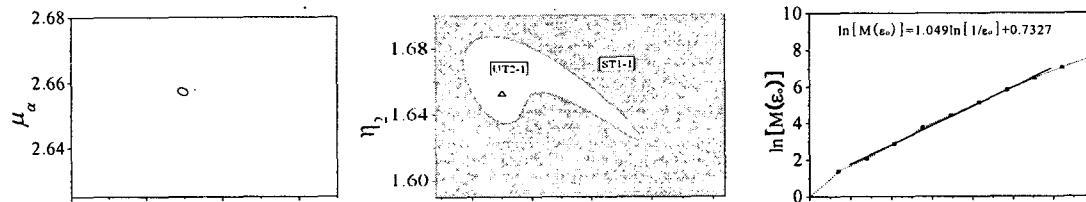
$$d = \lim_{\varepsilon_o \rightarrow 0} \frac{\ln M(\varepsilon_o)}{\ln(1/\varepsilon_o)} \quad (4)$$

혼돈운동이 발생한 가진진동수에서의 프랙털 차원  $d$ 는 Log-Log좌표의 기울기로 나타나게 된다.

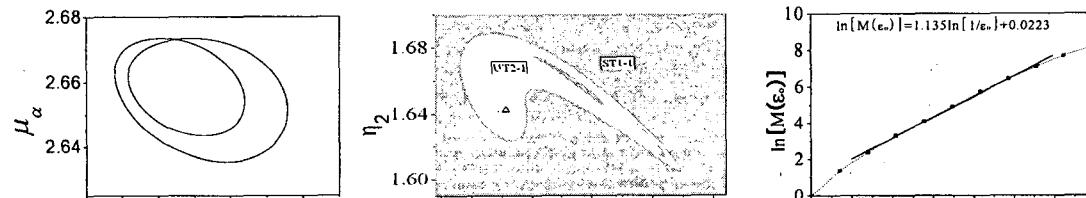
Fig. 4에는 계의 매개변수가 변화함에 따라 위상궤적(위상궤적) 주기배가운동을 거쳐 혼동운동에 이라는 과정을 나타내었으며, 이 경우 초기조건에 의해 두개의 끌개로 흡인되는 흡인영역을 구한 후 프랙털 차원을 나타내었다.



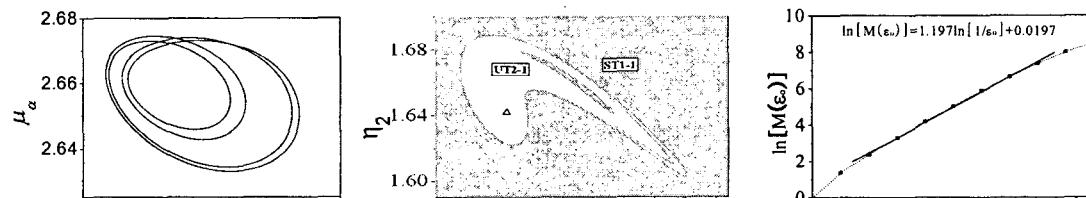
(a)  $\epsilon\sigma=0.13264$ (p-0, d=1.022)



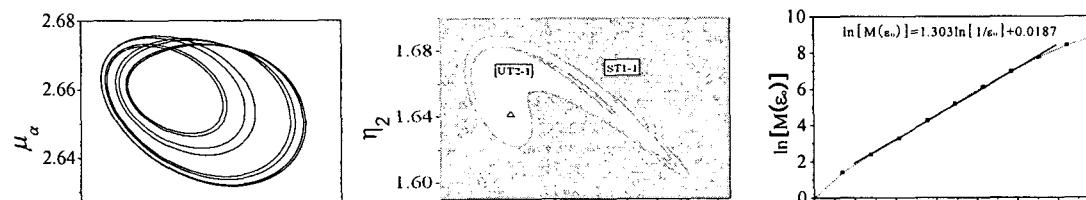
(b)  $\epsilon\sigma=0.132643$ (p-1, d=1.049)



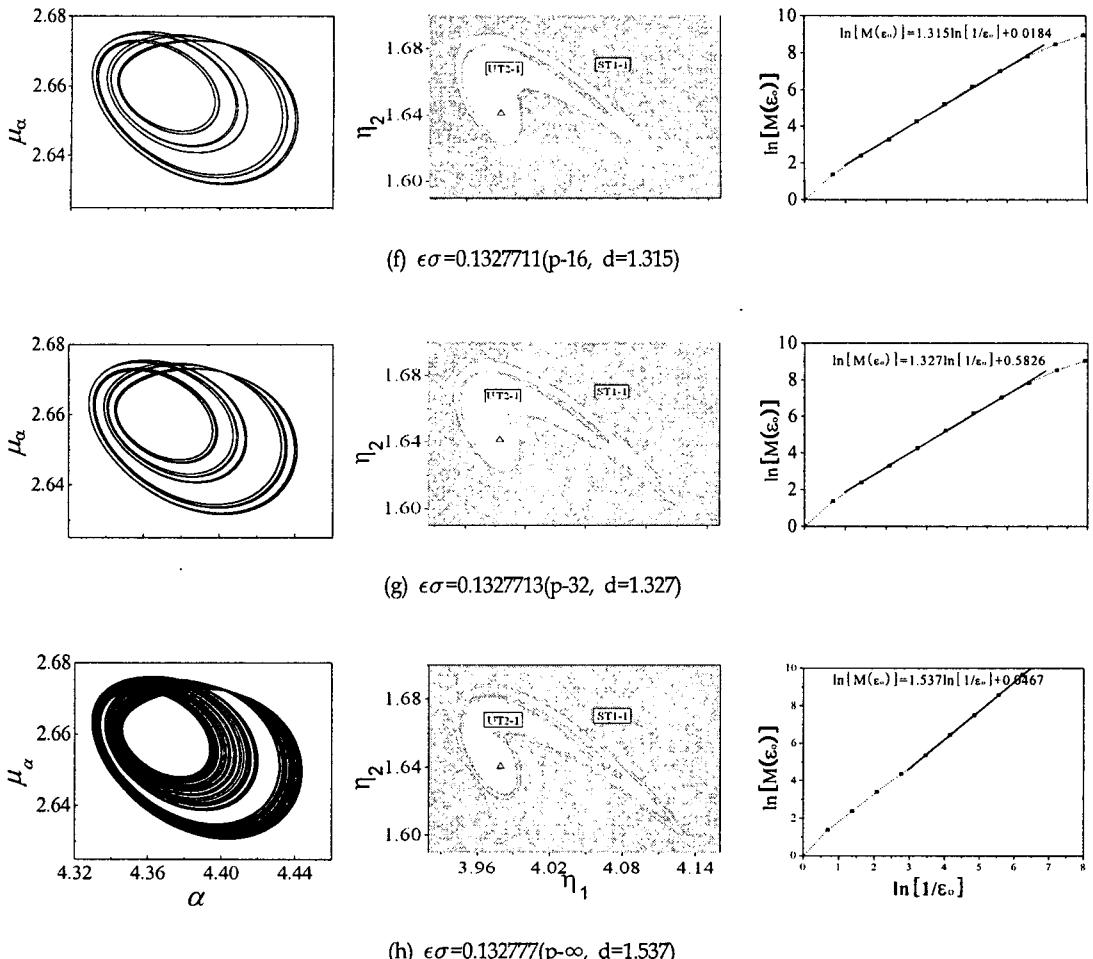
(c)  $\epsilon\sigma=0.132752$ (p-2, d=1.135)



(d)  $\epsilon\sigma=0.132765$ (p-4, d=1.197)



(e)  $\epsilon\sigma=0.132771$ (p-8, d=1.303)



**Fig. 4** Phase plots, basin boundaries and fractal dimensions of quasi-periodic motions in a period-doubling sequence.

Fig. 4 (a)의 경우 Hopf분기가 발생하기 전, 안정한 진행파(ST2-1)와 피치포크 분기의 의한 안정한 진행파 ST1-1에 대한 흡인영역 경계를 나타내었으며, 두 끝개의 경계영역이 명확히 구분되는 밀폐된 라인으로 구성되었으며 흡인영역 경계는 1.022의 차원을 가지고 있다. Fig. 4 (b)에는 Hopf분기에 의해 안정한 진행파 ST2-1가 불안정한 진행파 UT2-1으로 변화하였으며, 위상궤적은 하나의 점에서 주기 1인 운동을 보이고 있다. 흡인영역의 경계는 주기 0인 경계와 큰 차이가 없으며, 프랙털 차원이 일부 증가한 1.049를 가지고 있다. 가진진동수가 증가함에 따라 Fig. 4 (c)~(g)는 주기 2에서 주기 32로 주기배가 운동이 나타나며 흡인영역의 경계는 밀폐된 라인의 수가 점

점 증가하게 되며 프랙털 차원은 P-2: 1.135, P-4: 1.197, P-8: 1.303, P-16: 1.315, P-32: 1.327로 증가하였다. 혼돈운동이 발생하는 Fig. 4(h)의 경우 흡인영역의 경계는 자기유사성을 가진 두한개의 라인으로 구성되었으며, 흡인영역 경계의 프랙털차원은 1.537로 나타나고 있다. 혼돈운동이 발생하는 흡인영역의 경계에서는 초기조건의 아주 미세한 변화에도 원판의 정상상태 응답인 평형해(안정한 시계방향 진행파 UT1-1, 안정한 반시계방향 진행파 UT1-2, 불안정한 시계방향 혼돈응답 진행파 UT2-1, 불안정한 반시계방향 혼돈응답 진행파 UT2-2)가 변화될 수가 있다.

## 5 결 론

조화가진력을 받는 고정경계 원판에 대한 비선형 비대칭모드의 특성을 조사하였다. Yeo와 Lee [3]의 주공진에 대한 연구결과로부터 3개의 안정한 정상상태 응답(하나의 정상파와 두개의 진행파)이 존재함을 알 수 있었으며, Lee와 Park[8]은 세밀한 조사결과 5개의 안정한 정상상태 응답(하나의 정상파와 4개의 진행파)이 구할 수 있었다. 이중 2개의 진행파는 Hopf분기기에 의해 안정성을 잃었으며, 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 이르게 된다. 5개의 끝개 : 3개의 평형해(하나의 정상파, 2개의 진행파) 및 2개의 혼돈 흡인 끝개(2개의 변조 진행파)를 가진 계에 대하여 주평면에서 끝개의 흡인영역 경계의 변화상태를 관찰하였다. 안정한 두개의 진행파가 존재하는 흡인의 경계는 하나의 밀폐된 라인으로 구성되었으나, 가진진동수가 증가함에 따라 하나의 안정한 진행파가 불안정한 진행파(비주기운동)로 흡인되는 영역 경계는 경계를 구분하는 라인의 수가 점점 증가하게 되었으며, 이와 동시에 프랙털 차원도 선의 차원인 1에 가까운 1.022에서 주기 프랙털 차원은 P-1: 1.049, P-2: 1.135, P-4: 1.197, P-8: 1.303, P-16: 1.315, P-32: 1.327로 증가하게 되었다.

## 참 고 문 현

- (1) Efstathiades, G. J., 1971, "A New Approach to the Large-deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin's Procedure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, pp. 231-253.
- (2) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 159-170.
- (3) Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2002, "Corrected Solvability Conditions for Non-linear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 653-665.
- (4) Lee, W. K. and Yeo, M. H., 2003, "Non-linear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263, pp. 1017-1030.
- (5) W. K. Lee, M. H. Yeo and S. B. Samoilenko, 2003, "The Effect of the Number of Nodal Diameters on Non-linear Interactions in Two Asymmetric Vibration Modes of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, 268, pp. 1013-1023.
- (6) Lee, W. K., 1988, "A Global Analysis of a Forced Spring-Pendulum System", Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley.
- (7) Lee, W. K. and C. S. Hsu, 1994, "A Global Analysis of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171, pp. 335-359.
- (8) Lee, W. K. and Park, H. D. 2005. "Chaos and fractal basin boundary of a circular plate", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Submitted
- (9) Lichtenberg,A. J. & Lieberman, M. A. [1983] "Regular and Stochastic Motion", New York: Springer-Verlag.
- (10) Ott, E. [1993] "Chaos in Dynamical Systems", Cambridge University Press.
- (11) Grebogi, C., Mcdonald, S. W., Ott, E. & Yorke, J. A. [1983] "Final State Sensitivity: An Obstruction to Predictability", *Physics Letters*, Vol 99A(9), pp. 415-418.
- (12) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, pp. 359-373.
- (13) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, New York : John Wiley & Sons.
- (14) W. K. Lee and C. H. Kim, 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, No. 4, pp. 1015-1022.
- (15) Nayfeh, T. A. and Vakakis, A. F., 1994, Subharmonic traveling waves in a geometrically non-linear circular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, 233-245.
- (16) W. K. Lee and H. D. Park, 1997 "Chaotic Dynamics of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, No. 3, pp. 211-229.
- (17) W. K. Lee and H. D. Park, 1999, "Second-Order Approximation for Chaotic Responses of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 34, No. 4, pp. 749-757.