

Dynamic Elastica 이론을 통한 유연매체의 거동해석 및 실험

The Simulation and Experiment of Flexible Media using Dynamic Elastica

홍성권† · 지중근* · 장용훈** · 박노철*** · 박영필****

Sung-Kwon Hong, Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

Key Words : Dynamic Elastica Theory, Finite Difference Method, Aerodynamic Force, High-Speed Camera, Feeding Mechanism,

ABSTRACT

In many machines handling lightweight and flexible media, such as automated teller machines(ATM) and printers etc., the media must transit an open space. In the paper feeding mechanism, it is important to feed the sheet without jamming under any conditions. To avoid sheet jamming, first we need to predict the behavior of the sheet exactly. The nonlinear theory of the dynamic elastica has often been used to a nonlinear dynamic deflection model. In this paper, the governing equation is derived and simulated by the finite difference method. The analysis has to include aerodynamic effect for more exact behavior analysis. For verification of the numerical simulation, the experiments were performed using high-speed camera and feeding mechanism. The experimental results show good agreement with the numerical simulations.

1. 서 론

복사기, 팩시밀리, 프린터, 카메라, ATM 등에는 매체 전송 시스템이 적용된다. 이러한 기기들의 소형화, 고속화에 따라서 매체의 정확한 거동해석이 필요하고 최적의 설계조건을 찾는 것이 피딩 시스템 설계에 있어 중요한 인자가 되고 있다. 본 논문에서는 유연매체가 좁은 채널(channel)로부터 빠져나와 가이드와 충돌이 발생하는 경우 Dynamic Elastica 이론[1]을 통하여 거동을 해석해 보고자 한다. 종이는 매우 유연하기 때문에 작은 힘에도 큰 변형을 일으키게 된다. 종이가 공기 중에서 움직일 때 그 움직임을 방해하는 항력이 발생하게 되는데, 이 효과를 고려하지 않으면 정확한 거동을 파악 할 수 없다. 따라서 공기 저항력을

Dynamic Elastica 이론에 적용하여 종이의 거동을 예측하고자 한다. 이것을 검증하기 위하여 고속 카메라와 속도제어가 가능한 금지장치를 이용하여 실험을 수행하였다.

2. 매체의 모델링

2.1. Dynamic Elastica 모델

Fig. 1은 유연매체가 채널로부터 빠져 나올 때의 형상을 나타낸 그림이다. 여기서 g 는 중력가속도를 나타내고 f_x , f_y 는 절점에 작용하는 관성력이다. F_N , F_T 는 매체가 가이드와 충돌할 때 가이드에서 받는 수직방향과 접선방향의 반력을 나타내고, α 는 채널 출구의 각도를 나타낸다. ϕ 는 매체 절점이 x 축과 이루는 각도이다. x' , y' 축은 전체좌표를 나타내고, x , y 는 종이의 진행방향에 따른 국부좌표를 나타낸다. 비선형 Elastica 이론[2]을 이용하여 매체를 평판이라 가정하고 굽힘 강성 D 를 정의하여 지배방정식을 세우면 식 (2.1) 과 같다.

† 연세대학교 기계공학과

E-mail : h11010@yonsei.ac.kr

Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 353-8460

* 연세대학교 기계공학과

** 연세대학교 기계공학부 조교수

*** 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수

**** 연세대학교 기계공학부 정교수

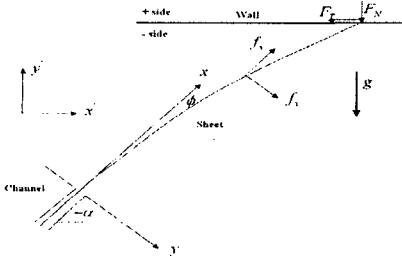


Fig. 1. Geometry of Feeding System

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = mg(L-s)(\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\ - m \int_s^L \ddot{x} \sin \phi d\bar{s} + m \int_s^L \ddot{y} \cos \phi d\bar{s} \\ + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s} \\ - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s}$$
(2.1)

변형 포텐셜을 정의하면 [3] 식 (2.2), (2.3)과 같다.

$$u = \int_s^L x d\bar{s}$$
(2.2)

$$v = \int_s^L y d\bar{s}$$
(2.3)

식 (2.2), (2.3)을 시간에 관하여 두 번 미분하면 식 (2.4), (2.5)와 같이 된다.

$$\ddot{u} = \int_s^L \ddot{x} d\bar{s}$$
(2.4)

$$\ddot{v} = \int_s^L \ddot{y} d\bar{s}$$
(2.5)

(2.4), (2.5)식을 (2.1)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = -m \ddot{u} \sin \phi + m \ddot{v} \cos \phi \\ + mg(L-s)(\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\ + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) \\ - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K)$$
(2.6)

식 (2.6)에서 H 는 Heaviside 함수 [4]를 나타낸다.

$$H(s - s_K) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < s_K \\ \frac{1}{2} & \text{if } s = s_K \\ 1 & \text{if } s > s_K \end{cases}$$

채널 밖에서의 매체의 절점의 위치를 s 에 관하여 두 번 편미분 하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -\cos \phi$$
(2.7)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = -\sin \phi$$
(2.8)

식 (2.6), (2.7), (2.8)의 2차 편미분 방정식의 해는 각각의 시간에 대한 매체의 변형형상을 결정 할 수 있다. 미분 방정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi(c) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial s}(c) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial s}(c) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(L) = K_0 \quad u(L) = 0 \quad v(L) = 0$$

여기서 K_0 는 매체의 곡률을 나타낸다.

2.2. 공기의 저항력을 고려한 Dynamic Elastica 모델

유체 내에서 물체가 움직일 때 그 움직임을 방해하는 공기 저항력이 발생하게 되며, 다음과 같은 식으로 정의된다. [5]

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho_a V^2 A_k$$
(2.9)

식 (2.9)에서 C_D 는 항력계수를 나타내며, ρ_a 는 공기의 밀도, V 는 매체가 움직이는 속도 그리고 A_k 는 항력이 작용하는 면적을 나타낸다. 유체 내에서 평판이 움직일 때의 항력계수는 1.0~2.0 사이의 값을 가지게 된다. 따라서 항력계수 C_D 를 1.0이라 가정하고 그에 따른 항력 F_D 를 지배방정식에 적용하였다.

Dynamic Elastica 이론에서는 중력과 관성력을 D'Alembert의 원리에 의하여 매체에 작용하는 힘으로 가정하여 적용하였다. 여기에 항력 F_D 를 고려하면 절점에 작용하는 힘 f_x, f_y 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_x = mg \sin \alpha - m \ddot{x} - \frac{1}{2} \rho_a \dot{x}^2 A_k$$
(2.10)

$$f_y = mg \cos \alpha - m \ddot{y} - \frac{1}{2} \rho_a \dot{y}^2 A_k$$
(2.11)

식 (2.10), (2.11)에 변형 포텐셜을 적용하고, 지배방정식에 대입하여 정리하면 (2.12)와 같은 지배방정식으로 유도된다. 식 (2.7), (2.8), (2.12)식에 위의 경계조건들을 대입하여 매체의 거동을 해석하게 된다.

$$\begin{aligned}
D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = & -m \ddot{u} \sin \phi + m \dot{v} \cos \phi \\
& + mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
& + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) \\
& - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K) \\
& - \frac{1}{2} \rho_a A_k \ddot{u}^2 \sin \phi + \frac{1}{2} \rho_a A_k \dot{v}^2 \sin \phi
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3. 유한차분 모델

지배방정식을 시간과 공간에 대해서 유한 차분한 결과는 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned}
u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \sin \phi_{i,j}^* & \tag{2.13} \\
= \Delta s^2 (-\cos \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \cos \phi_{i,j}^* & \tag{2.14} \\
= \Delta s^2 (-\sin \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{i-1,j} - \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha \cos \phi_{i,j}^* \\
+ \cos \alpha \sin \phi_{i,j}^* \phi_{i,j} - 2\phi_{i,j}) \\
+ \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \dot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} \\
+ \phi_{i,j} j + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m(\sin \phi_{i,j}^* u_{i,j} - \cos \phi_{i,j}^* v_{i,j}) \\
= \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha (\sin \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) \\
- \cos \alpha (\cos \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j} \sin \phi_{i,j}^*)) \\
+ \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \dot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j}^* \\
+ \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m[(2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}) \sin \phi_{i,j}^* \\
- (2v_{i,j-1} - v_{i,j-2}) \cos \phi_{i,j}^*] \\
- \frac{\Delta s^2}{2D} \rho_a A_k (\ddot{u}_{i,j-1}^2 \sin \phi_{i,j}^* - \dot{v}_{i,j-1}^2 \cos \phi_{i,j}^*)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

식 (2.13), (2.14), (2.15)을 다음과 같이 행렬 형태로 정리한다.

$$Az = b \tag{2.16}$$

(2.13), (2.14), (2.15)의 유한 차분되어진 식에서 우변은 b , 좌변에서 미지수 u, v 와 ϕ 는 z , 상수항은 A 로 표현되어진다.

3. 실험 장치 / 결과

실험을 위하여 종이가 채널로부터 빠져나오는 방식의 급지장치를 제작하였다. 이 장치는 출구에서 원하는 속도가 나올 수 있도록 dSpace를 이용하여 모터제어를 수행하였다. 고속카메라를 이용하여 종이가 장치로부터 빠져나오기 시작할 때부터 종이가 완전히 빠져 나왔을 때까지 촬영하였다. 고속카메라의 촬영 속도는 500FPS(Frame Per Second)로 설정했고, 0.002초당 1프레임을 촬영 할 수 있다. 실험에 사용된 종이의 물성치는 다음과 같다. 종이의 탄성계수는 일반적으로 알려진 모델을 이용하여 정적변형 형상을 실험하여 얻어낸 값이다. 프아송 비는 0.4로 가정하였다.

Table. 1. Properties of paper

Young's modulus [GPa]	5.0168
Surface density [g/mm ²]	7.2022×10^{-5}
Length [mm]	200
Thickness [mm]	0.0959
Poisson's ratio	0.4

Fig. 2.는 실험 장치 구성도를 나타낸다.

급지 장치로부터 종이가 배출되는 시점부터 종이 전체가 나올 때 까지 촬영하여 얻어진 그림을

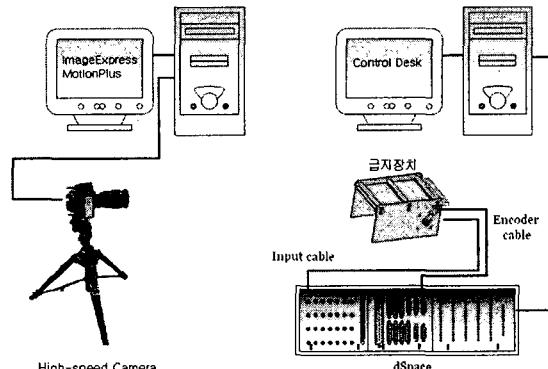


Fig. 2. Experimental setup

ImageExpress MotionPlus를 이용하여 각 프레임 별로 그림을 얻어낸다. 이 그림을 프레임별로 시간을 계산하여 시간에 따른 변형형상을 얻어내게 된다. 위와 같은 실험 장치를 이용하여 모터 속도가 100mm/s일 때 측정한 결과와 Dynamic Elastica 이론을 이용하여 예측한 결과의 끝단좌표(End orbit)를 비교한 결과는 Fig. 3. 과 같다.

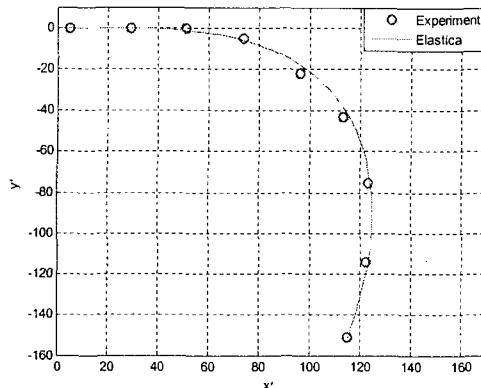


Fig. 3. End orbit ($V_0 = 100\text{mm/s}$)

Fig. 4. 는 출구속도가 200mm/s 일 때 끝단의 좌표를 비교한 결과이다.

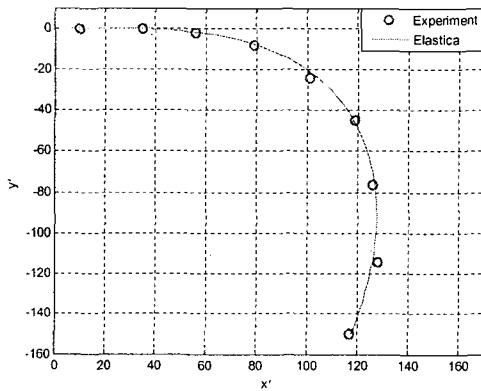


Fig. 4. End orbit ($V_0 = 200\text{mm/s}$)

4. 결 론

Dynamic Elastica이론을 이용하여 공기저항이 고려된 치배방정식을 유도해 보았고, 지배방정식을 시간과 공간에 대하여 유한 차분하여 매체의 거동을 예측해 보았다. 그리고 이것을 검증하기 위하여 고속 카메라와 급지 장치를 제작하여 실험을 수행하였다. 그 결과 시뮬레이션과 실험결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있었다.

후 기

본 연구는 산업자원부 부품소재 개발사업단의 “환경식 지폐 입출금 장치 개발”(10012150) 과제를 수행하는 (주) 노틸러스효성의 위탁과제인 “유연 매체의 거동 해석 및 제어”를 수행하면서 얻어진 결과이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) J. Stolte, R. C Benson, 1992, "Dynamic Deflection of Paper Emerging from a Channel", Journal of Vibration and Acoustics, pp. 187~193.
- (2) Frisch-Fay, R. 1962. "Flexible Bars", Butterworth and Co., Ltd., Washington
- (3) Mansfield, L. Simmonds, J.G, 1987, "The Reverse Spaghetti Problem : Drooping Motion of an Elastica Issuing from a Horizontal Guide.", Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp 147~150.
- (4) Bender, C.M and Orszag, S.A, 1978, "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers." McGraw-Hill, Inc.
- (5) Robert W.fox, Alan T. McDonald, 2000, "Introduction to Fluid Mechanics.", Wiley
- (6) Mortenson, M.E, 1985, "Geometry Modeling", John Wiley & Sons, Inc., New York
- (7) 홍성권, 지중근, 장용훈, 박노철, 박영필, 2005, "Dynamic Elastica에 의한 유연매체의 거동해석", 한국소음진동공학회지, 제 15 권, 제 2 호, pp. 206~212
- (8) Nobuyuki KOBAYASHI and Masahiro WATANABE, 2004, "Dynamics and Stability of Spaghetti and Reverse Spaghetti Problems Coupled with Fluid Force.", Multibody System Dynamics, 11, pp. 111~125
- (9) Kazushi YOSHIDA, 1997, "Dynamic Analysis of Sheet Deformation Using Spring-Mass-Beam Model." 日本機械學會論文集, C編, 63卷 615号, pp. 3926~3932