

## 사장교의 초기형상해석을 위한 탄성포물선요소

### Elastic parabolic element for initial shaping analysis of cable-stayed bridges

경 용 수\*  
Kyung, Yong-Soo

김 호 경\*\*  
Kim, Ho-Kyung

김 문 영\*\*\*  
Kim, Moon-Young

---

#### ABSTRACT

This study presents a elastic parabolic cable element for initial shaping analysis of cable structures. First, the compatibility condition and the tangent stiffness matrices of the elastic catenary cable element are shortly summarized. Next, the force-deformation relations and the tangent stiffness matrices of the elastic parabolic cable elements are derived from the assumption that sag configuration under self-weights is small. To confirm the accuracy of this element, initial shaping analysis of cable-stayed bridges under dead loads is executed. Finally, the accuracy and the validity of the analysis-results are compared and analyzed through numerical examples.

---

#### 1. 서 론

케이블 부재는 구조물에서 중요한 부분을 차지하며 구조시스템에 폭넓게 적용되고 있다. 균일한 인장응력이 발생하고 케이블 길이에 따른 인장력의 변화가 작기 때문에 이러한 케이블 부재는 긴 경간을 갖는 사장교, 현수교, 케이블 지붕(cable roof), guyed tower 및 해저케이블 구조물 등에 많이 사용되고 있다.

전통적인 구조해석은 주로 미소 변위를 일으키는 구조물에 관심을 가져왔고, 이러한 구조물은 선형의 하중-변위관계를 나타내게 되며 기하학적 비선형성을 수반한다. 따라서 전체적인 거동을 지배하는 비선형 편미분방정식을 갖는 케이블 구조물의 정적 및 동적거동을 파악하는 것은 쉽지 않다. 지금까지의 케이블 구조의 대부분의 해석 방법은 구조물에 대한 평형방정식을 세우고 수치적 방법에 의하여 비선형 대수방정식을 풀어나가는 절차를 밟고 있다. Irvine은 Lagrangian 좌표를 사용하여 케이블 부재에 대하여 정적 및 동적해석을 수행하였고<sup>(1)</sup>, Leonard와 Recker는 2절점 유한요소를 사용하여 케이블의 정적 및 동적거동을 규명하였으며<sup>(2)</sup>, Argyris와

---

\* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

\*\* 정희원, 목포대학교 토목환경공학과 교수

\*\*\* 정희원, 성균관대학교 토목환경공학과 교수

Sharp는 케이블망의 기하학적 비선형 해석을 수행하여 뮌헨올림픽 주경기장 설계에 적용하였다<sup>(3)</sup>. Henghold와 Russell은 다절점 곡선요소를 이용하여 케이블 부재를 해석하였으며<sup>(4)</sup> Gambhir와 Batchelor는 케이블 부재를 해석하기 위하여 3차의 보간 다항식을 사용하는 2절점 곡선 유한요소를 제시하였다<sup>(5)</sup>. 또한 Ozdemir는 Lagrangian 함수를 사용하는 곡선요소를 도입하여 케이블 부재를 해석하였다<sup>(6)</sup>. Jayaraman과 Knudson은 탄성 현수선 케이블요소를 이용한 케이블구조의 정적 및 동적 비선형해석법을 개발하였으며<sup>(7)</sup>, 안은 탄성현수선 케이블요소를 공간좌표에서 직접적으로 정식화하고 분포질량행렬을 사용함으로써 더욱 발전시켰다<sup>(8)</sup>. 이러한 연구에도 불구하고 자중에 의한 케이블의 초기형상 결정문제는 아직 분명한 해결을 보지 못하고 있다. 한편 고정하중을 받는 케이블지교량의 초기형상해석은 초기장력을 도입하여야 케이블 구조는 구조적 성능을 발휘하는 특성 때문에 많은 연구자의 주목을 받았다.<sup>(8-10)</sup>

본 연구에서는 케이블구조의 초기형상해석을 위한 새로운 탄성포물선 케이블요소(elastic parabolic cable element)를 제시한다. 먼저 탄성현수선 케이블요소(elastic catenary cable element)에 대한 적합조건과 접선강도행렬 유도과정을 간략히 요약한다. 이를 토대로 장력이 충분히 도입되어 자중에 의한 처짐 형상이 포물선에 가깝다는 가정 하에 탄성포물선 케이블요소의 비선형 힘-변형관계식과 접선강도행렬을 유도한다. 본 요소의 정확성을 확인하기 위하여, 고정하중을 받는 사장교의 초기형상해석을 수행하고 탄성현수선과 탄성포물선 요소를 적용한 해석결과를 비교, 분석을 행한다. 이때 비선형해석법은 TCU(target configuration under dead loads)법과 초기부재력법(initial force method)을 결합시킨 개선된 해석법을 적용하였다.

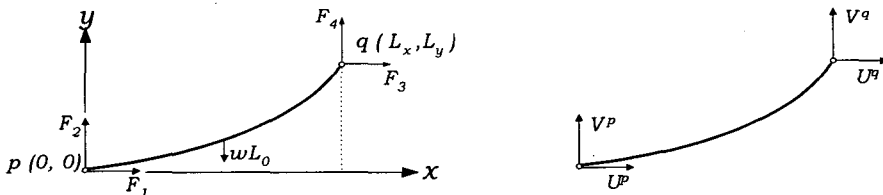
## 2. 탄성현수선 케이블요소

탄성현수선 요소는 자중을 받는 정적 케이블거동을 엄밀하게 파악할 수 있다. 그림 1과 같이 케이블은 두 개의 고정된 점  $p$ 와  $q$ 의 사이에 걸려 있다고 가정한다. 탄성현수선 케이블요소는 기본적으로 무응력길이  $L_0$ 와 케이블의 각각의 장력성분을 미지수로 사용하여 해석한다. 이때 케이블요소의 적합방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다(Irvine, 1981).

$$L_x = -\frac{F_1}{EA_0} L_0 + \frac{F_1}{w_0} \left\{ \sinh^{-1} \left( \frac{F_2 - w_0 L_0}{F_1} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right) \right\} \quad (1a)$$

$$L_y = -\frac{F_2}{EA_0} L_0 + \frac{w_0 L_0^2}{2EA_0} + \frac{1}{w_0} (T_q - T_p) \quad (1b)$$

여기서,  $T_p = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ ,  $T_q = \sqrt{F_1^2 + (F_2 - w_0 L_0)^2}$  이다.



(a) 자중을 받는 케이블요소의 절점력벡터

(b) 케이블요소의 부재변위벡터

그림 1 탄성현수선 케이블요소의 절점력 및 절점변위벡터

식 (1)에서  $L_x$ ,  $L_y$ 는 각각 케이블 부재의  $x$ ,  $y$ 축에 투영된 길이를 나타내며, 반복계산 시 부재양단의 상대변위값에 따라 크기의 변화를 보인다.  $EA_0$ ,  $L_0$ 는 각각 케이블의 축강성과 초기의 무응력길이를 나타내며,  $F_1$ ,

$F_2, F_3, F_4$ 는  $p$ 단과  $q$ 단의 장력에 대한 벡터성분을 나타낸다. 그림 1a에 나타난 자중을 받는 탄성현수선 요소의 절점력에 대한 평형조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 &= 0 \\ F_2 + F_4 &= w_o L_o \end{aligned} \quad (2)$$

이때,  $L_x, L_y, L_o$ 가 주어지는 경우 케이블 부재력  $F_1, F_2$ 를 미지수로 하는 비선형 연립방정식으로 Newton-Raphson 방법을 사용하여 해를 구해야만 한다. 요소 양단  $p, q$ 의 상대변위의 변화량과 절점력 변화량의 관계를 나타내기 위해 식 (1)의 양변을 편미분하면, 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} dL_x &= \frac{\partial L_x}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial L_x}{\partial F_2} dF_2 \\ dL_y &= \frac{\partial L_y}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial L_y}{\partial F_2} dF_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{여기서, } dL_x = dU^p - dU^q, \quad dL_y = dV^p - dV^q \quad (4)$$

윗 식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} dL_x \\ dL_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } f_{12} = \frac{F_1}{w_o} \left( -\frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_q} \right), \quad f_{11} = f_{12}, \quad f_{22} = -\frac{L_o}{EA_o} + \frac{1}{w_o} \left( -\frac{F_2}{T_p} + \frac{F_2 - w_o L_o}{T_q} \right)$$

이를 강도행렬을 구하기 위하여 유연도행렬  $f_{ij}$ 의 역행렬  $k_{ij}$ 를 얻고, 이를 토대로 접선강도행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dL_x \\ dL_y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서,  $k_{ij}$ 는 유연도행렬  $f_{ij}$ 의 역행렬 성분이다.

이제 케이블 상대변위를 나타내는 식 (4)와 식 (6), (7)을 고려하면, 탄성현수선요소의 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \\ dF_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & -k_{12} \\ k_{21} & k_{22} & -k_{21} & -k_{12} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU^p \\ dV^p \\ dU^q \\ dV^q \end{Bmatrix}$$

또는  $\Delta F_c = K_c \Delta U_c \quad (7)$

여기서,  $\Delta F_c$  = 증분 절점력벡터;  $K_c$  = 탄성현수선요소의 강성행렬;  $\Delta U_c$  = 증분 변위벡터를 나타낸다.

### 3. 탄성포물선 케이블요소

일반적으로 자중을 받는 사장교의 케이블은 커다란 인장력을 받아서 케이블에 발생하는 새그(sag)가 매우 작은 처짐형상을 나타낸다. 따라서 이러한 케이블부재는 두 개의 고정된 점  $p$ 와  $q$ 에 포물선 형태로 연결된다

고 가정할 수 있다. 새그의 영향으로 유효한 탄성계수가 현저하게 감소하는 경향을 보이고 이를 사장교의 케이블 모델링 시에 반드시 고려하여야 한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 본 장에서는 새그가 작은 경우에 탄성 현수선 요소대신에 사용할 수 있는 탄성포물선 요소를 제시한다. 이 요소는 현수선요소에 근접하는 정확도를 가지면서 현수선요소에 비하여 수렴속도가 빠르고 계산의 복잡성은 적은 장점을 가진다.

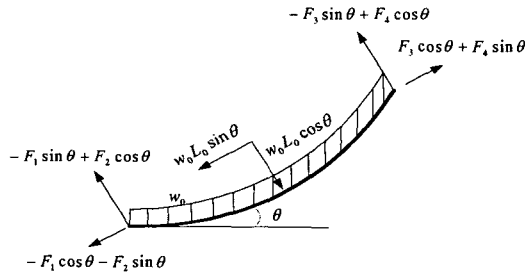
그림 1a의 케이블 길이 방향으로 등분포로 자중을 받는 케이블 요소를 다시 생각한다. 이때 그림 2b와 같이 케이블 절점력과 자중을 케이블 현(chord)방향과 이에 수직한 방향(국부좌표계  $x', y'$ ) 성분으로 각각 분해하여 나타낼 수 있다. 이제 새그가 작아 포물선형상으로 가정하면 자중의 현 방향성분은 양단의 등가절점력으로 표시할 수 있으므로 이를 반영한 케이블요소의 자유물체도는 그림 2c가 된다. 이제 케이블현 방향 장력을  $T$ 로 표시하고 식 (8)을 고려하면

$$T = -F_1 \cos \theta - \left( F_2 - \frac{w_0 L_0}{2} \right) \sin \theta = F_3 \cos \theta + \left( F_4 - \frac{w_0 L_0}{2} \right) \sin \theta \quad (8)$$

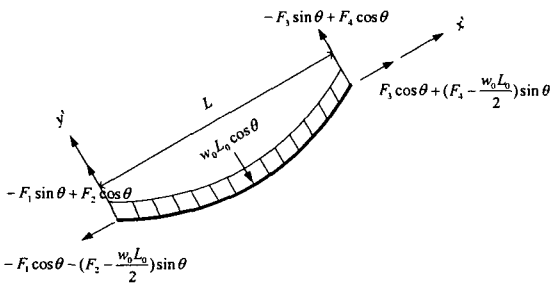
이 되는 것을 알 수 있다. 또한 케이블현의 직각방향 성분은

$$\frac{w_0 L_0}{2} \cos \theta \cong -F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta \cong -F_3 \sin \theta + F_4 \cos \theta \quad (9)$$

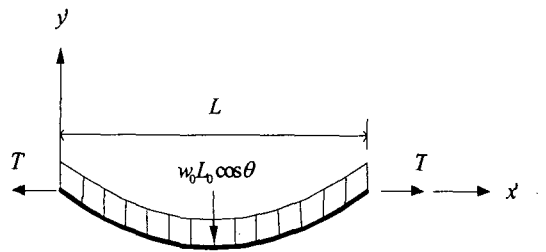
이 된다.



(a) 자중을 고려한 케이블요소



(b) 케이블요소의 절점력벡터



(c) 케이블요소의 포물선 케이블요소화

그림 2 포물선 케이블요소

그림 2c는 설명을 용이하게 하기 위하여 그림 2b를  $x'$  좌표가 수평이 되도록 회전시켜 나타낸 것이다. 이제 탄성현수선 요소의 적합방정식 (1a)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sinh \left( \frac{wl}{2T} - \frac{wL_0}{2EA_0} \right) = \frac{wL_0}{2T} \quad (10)$$

여기서,  $w = w_0 \cos \theta$  이다.

그림 2c에서 큰장력이 도입된 후의 길이가  $l \cong L_0$  일 때, 탄성현수선요소의 케이블 좌표에 대한 식 (1)은 Taylor 급수를 통하여, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(s) = -s \left( 1 + \frac{T}{EA_0} \right) \quad (11a)$$

$$y(s) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{T}{EA_0} \right) \frac{w}{T} s(s-L_0) \quad (11b)$$

식 (11a)를 식 (11b)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 탄성포물선 방정식으로 표현할 수 있다.

$$y = \frac{1}{2} \frac{wL_0}{Tl} x(l-x) \quad (12)$$

그림 2c에 보는 바와 같이 케이블하중  $w$  가 양 절점에 균등하게 작용하므로 대칭 탄성현수선으로 볼 수 있다. 따라서 앞서 유도된 탄성현수선 케이블요소의 적합방정식 (1a)는 Taylor 급수를 통하여 정리하면, 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$T^3 + \frac{EA_0}{L_0} (L_0 - l) T^2 - \frac{EA_0 (wL_0)^2}{24} = 0 \quad (13)$$

위 식을 장력  $T$ 와 케이블의 길이  $l$ 에 대해 미분을 하여 정리하면, 식 (14)와 같다.

$$\frac{dT}{dl} = \frac{EA_0}{L_0} \frac{1}{1 + \frac{w^2 L_0^2}{12T^3} EA_0} \quad (14)$$

여기서, Ernst의 등가케이블요소  $E_{eq}$ 는 다음과 같다.

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(wl)^2}{12T^3} EA_0^2} \quad (15)$$

여기서,  $w$  는 단위길이 당 무게,  $T$ 는 케이블의 장력을 나타낸다. 강성행렬을 구하기 위해 식 (13)을 변환시킨다.

$$T = E_{eq} A_0 \left( \frac{L-L_0}{L_0} \right) \quad (16)$$

장력  $T$ 를 각각의 응력성분으로 나눈 뒤, 증분평형방정식을 구성한다.

$$F_1 = -\frac{L_x}{L} T = \frac{L_x}{L} \frac{E_{eq} A_0}{L_0} (L-L_0) \quad (17a)$$

$$F_2 = -\frac{L_y}{L} T = \frac{L_y}{L} \frac{E_{eq} A_0}{L_0} (L-L_0) \quad (17b)$$

여기서,  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$ ,  $T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

(18)

요소 양단의 상대적인 변위량과 절점력의 변화량의 관계는 위의 양변을 편미분하여 얻을 수 있다.

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_1}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_1}{\partial L_0} dL_0 \quad (19a)$$

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_2}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_2}{\partial L_0} dL_0 \quad (19b)$$

여기서,  $dL_x = dU^a - dU^b$ ,  $dL_y = dV^a - dV^b$  이다.

위 식을 행렬형태로 다시 쓰면,

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dL_x \\ dL_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{bmatrix} dL_0 \quad (20)$$

이때 위 식을 간단한 형태로 나열하면, 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \\ dF_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & -k_{12} \\ k_{21} & k_{22} & -k_{21} & -k_{12} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} & k_{21} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU^p \\ dV^p \\ dU^q \\ dV^q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ -k_{13} \\ -k_{23} \end{bmatrix} dL_0$$

또는  $\Delta F_c = K_c \Delta U + K_g \Delta L_0$  (21)

여기서,  $K_c$ 은 포물선케이블요소의 강성행렬,  $K_g$ 는 무응력길이  $L_0$ 의 변화를 고려한 탄성포물선 요소에서의 탄성강성행렬을 나타낸다.

#### 4. 수치해석 예

고정하중을 받는 케이블지지 교량의 초기형상해석은 TCUD법을 먼저 적용하고, 수렴된 결과에서 계산된 축력을 변화시키지 않고 다른 값들은 초기값으로 원위치 시키고 다시 TCUD법을 적용하여 주탑, 주형이 원래 주어진 좌표값으로 유지하는 최종값에 도달하게 하는 개선된 초기형상해석법을 사용하였다. 본 연구에서는 다양한 케이블 모델링 중 탄성포물선 케이블요소를 이용하여 모델링하였으며, 이를 앞선 연구에서 제시된 탄성현수선 케이블요소와 비교하였다.

##### 4.1 Harp Type 2차원 사장교 모델

본 연구에서 사용된 Harp Type의 2차원 예제는 그림 3과 같으며, 김과 장(1999)의 논문에서 인용하였다. 예제에 적용된 물성치는 표 1과 같다.

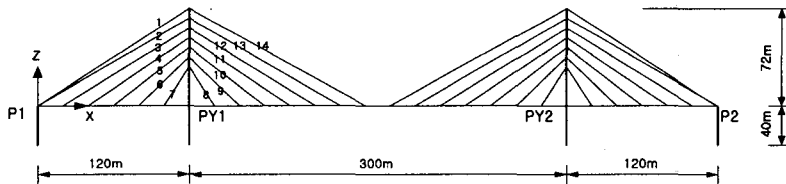


그림 3 Harp Type 사장교 모델

여기서, 2차원 예제는 28개의 케이블로 이루어졌고, 경간의 길이는 각각 120m-300m-120m이고, 총길이 540m의 3경간 사장교로서 주탑의 높이는 112m이다. 경계조건에서 주탑과 주형이 연결되는 지점인 PY2의 지점에서는 교축방향으로 구속하였으며 나머지 부분에서는 교축방향으로 이동이 가능하다. 또한 모든지점에서 회전에 대해 자유롭도록 경계조건을 설정하였다.

표 1 Harp Type 사장교의 단면상수 및 물성값

Member	E(GPa)	A(m <sup>2</sup> )	I(m <sup>4</sup> )	w(KN/m)	부가사하중(KN/m)
Cable	200	0.01	-	0.78	-
Deck	200	1.06	1.00	127.2	40
Pylon	200	1.21	1.30	145.2	-

고정하중 상태에서의 초기형상해석에 의한 주형의 모멘트는 그림 4에 보인다. 모멘트의 분포를 살펴보면 그림에서 보이듯이 김 등의 결과보다 본 연구의 결과가 상대적으로 전 지간에 걸쳐 더욱 균등한 분포를 나타내고 있음을 알 수 있다.

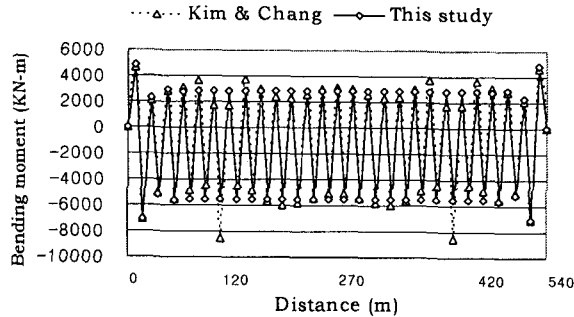


그림 4 주형의 모멘트

그림 5와 표 2는 탄성포물선요소와 탄성현수선요소의 케이블 길이와 각에 따른 장력 및 무응력길이의 차이를 나타내고 있다. 표2에서 보는 바와 같이 사장교와 같이 새그가 작은 케이블 요소인 경우 탄성 포물선 케이블요소와 탄성현수선 케이블요소로 모델링한 경우와 비교하여 별 차이가 없음을 알 수 있다.

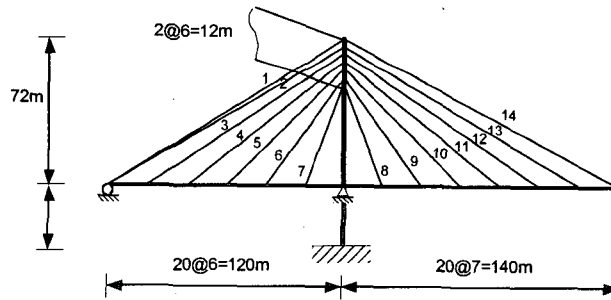


그림 5 상세그림

표 2 탄성포물선요소와 탄성현수선요소의 장력 및 무응력길이의 비교

케이블 번호	좌표상 거리 (m)	탄성포물선		탄성현수선	
		장력(KN)	무응력길이(m)	장력(KN)	무응력길이(m)
1	139.94	8200.98	139.37	8200.90	139.37
2	138.92	5644.99	138.53	5644.95	138.54
3	120.93	6827.87	120.52	6827.78	120.52
4	103.71	5129.04	103.45	5129.00	103.45
5	87.73	4674.81	87.52	4674.73	87.52
6	73.78	4003.46	73.64	4003.39	73.64
7	63.25	3553.42	63.13	3553.30	63.13
8	63.25	3551.14	63.13	3551.02	63.13
9	73.78	4013.73	73.64	4013.61	73.64
10	87.73	4630.55	87.53	4630.51	87.52
11	103.71	5318.08	103.44	5318.04	103.44
12	120.93	6030.48	120.57	6030.44	120.57
13	138.92	6743.78	138.46	6743.74	138.46
14	157.43	7445.23	156.85	7445.18	156.85

## 5. 결 론

케이블구조의 초기형상해석을 위한 새로운 탄성포물선 케이블요소를 제시하였다. 개선된 초기형상해석법을 사용하여 고정하중을 받는 사장교의 초기형상을 결정하고 탄성현수선 케이블요소를 적용한 결과와 비교하였다. 결론적으로 사장교의 사장재(stay cable)는 케이블 자중에 비하여 상당히 큰 장력이 도입되기 때문에 두 케이블 요소를 사용한 결과는 무응력길이 및 초기장력 값이 거의 같음을 확인하였다.

## 참고 문헌

1. Irvine, H. Max., Cable structures, The MIT Press, 1981
2. Leonard, J. W. and Recker, W. W., "Nonlinear dynamics of cables with olw initial thension". J. Engng, Mech. Div., ASCE 98, 1972, pp.293-309
3. Argyris, J. H. and Sharpf, D. W., "Large deformation analysis of prestressed networks", J. Struct Div., ASCE 48, 1972, pp.633-654
4. Henghold, W. H. and Russell, J. J., "Equilibrium and natural frequencies of caable structures (a nonlinear finite element approach)" Comput. struct. 6, 1976, pp.267-271
5. Gambhiir, M. L. and Batchelor, B., "A finite element for 3-D prestressed cable nets", Int. J. Number. Mech. Engng., 1977, pp.1699-1718
6. Ozdemir, H., "A finite element approach for cale problems", Int. J. Solids Struct. 15, 1979, pp.427-437
7. 안상섭, (1990), 탄성현수선 케이블요소를 이용한 3차원 케이블망의 정적 및 동적 비선형해석, 석사학위 논문, 서울대학교
8. Kim, Ki-Seok, Lee, Hae-Sung, (2001), Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges, *Computer & Structures*, Vol.79, pp.2681~2692
9. 김문영, 경용수, 이준석, (2003), 사장교의 개선된 초기형상 해석법, *한국강구조학회 논문집*, 제 15권, 2호, pp.175~185
10. 김제춘, 장승필, (1999), 초기부재력을 이용한 사장교의 초기형상 및 캠버량 결정, *대한토목학회논문집*, 제19권, I-3호, pp.377~386